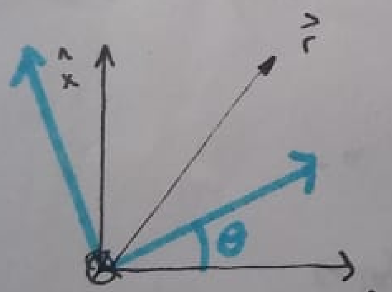
La geometría del espacio euclídeo

Al comienzo de la materia, dijimos que íbamos a ganar generalidad a la hora de considerar vectores y las operaciones entre ellos. El espacio en que vivimos parece ser tridimensional y por lo tanto tiene sentido introducir la idea de vector.

Un vector es una magnitud física tridimensional que posee ciertas propiedades y sobre la cual actúan ciertas operaciones.

En realidad, un vector es una representación matemática de una magnitud física tridimensional, y por lo tanto su forma puede cambiar aunque siga haciendo referencia a una misma magnitud física

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = r\hat{r} + \theta\hat{\theta} + z\hat{z}$$



$$\vec{r} = (\underbrace{x', y'}, z')$$

¡Las componentes cambian!

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \\ y' &= x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{aligned}}$$

Si mi conjunto de tres números no se transforma así, no es un vector.

$$\vec{r} = (A, B, C)$$

A = días desde que empezó la cuarentena

B = mi edad en segundos

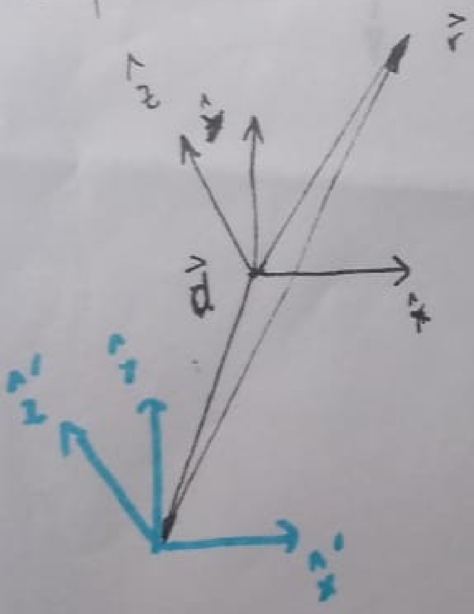
C = goles totales de Messi

$\boxed{\vec{r} \text{ no es un vector.}}$

Puedo decir que $\vec{r}\,' = \underbrace{Rot_z(\theta)}_{\text{operador rot. alrededor de } z}\vec{r}$ donde $Rot_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Así como definimos $Rot_z(\theta)$, podemos definir otras operaciones y especificar cómo se tienen que comportar los vectores.



$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{d}$ $\qquad \vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$

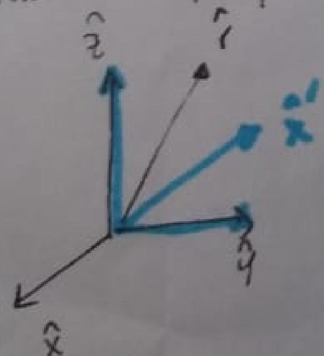
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - d_x \\ y' &= y - d_y \\ z' &= z - d_y \end{aligned}}$$

Así se comportan los vectores ante traslación

Podemos definir $Trans(\vec{d})$

$\vec{r}\,' = Trans(\vec{d})\vec{r} = \vec{r} - \vec{d}$

Finalmente, puedo tener una inversión en un eje,



$\vec{r}\,' = (-x, y, z)$

Podemos definir $Inv(x)$

$(x', y', z') = Inv(x)(x, y, z) = (-x, y, z)$

Idem x, y, z.

Nuestra definición de vectores presenta cómo se comportan ante tres tipos de transformaciones:

$$\underbrace{\text{Rotaciones}, \quad \text{Traslaciones}, \quad \text{Inversiones}}$$

El conjunto de todas estas transformaciones se llama "grupo euclídeo" y se escribe E^3. Es un grupo porque cumple los axiomas de un grupo matemático:

1) Si A, B son dos transformaciones en E^3, hacer A y luego B es una transformación en E^3

2) Si A, B son t. en E^3, hacer A luego B = B luego A (Conmutativo)

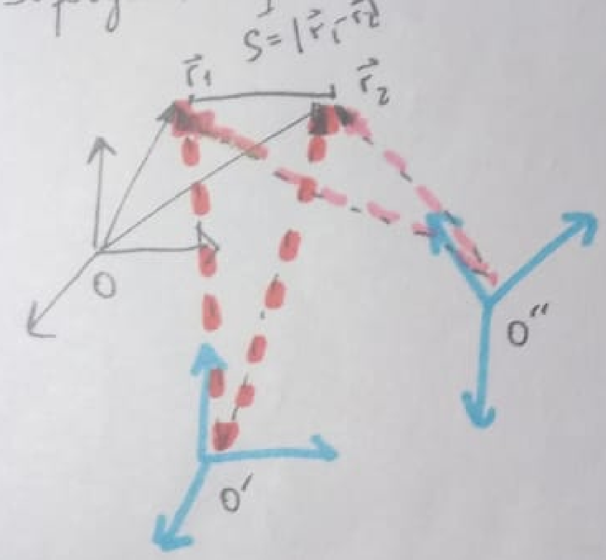
3) Para cada A transformación en E^3 existe A^{-1} tal que A^{-1} "deshace" A

4) Existe [redacted] una transformación $\mathbb{1}$ en E^3 que equivale a no hacer nada.

$\boxed{\text{Definición}}$: Un vector es un elemento en $\mathbb{R}^3$ (tres números) que se transforma como vimos ante las transformaciones en E^3

E^3 determina la esencia geométrica del espacio en que vivimos. (bueno, casi, sigamos leyendo)

Supongamos que tenemos dos vectores $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ y transformo mi sistema c/ transf. de E^3



Como son vectores, se transforman sus coordenadas tal como vimos.

Eso garantiza que

$S = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ = distancia entre $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ = cte.

Decimos que S es un escalar o invariante ante las transformaciones de E^3.

La distancia entre dos puntos no cambia si yo roto, traslado o espejo mi sistema de referencia

Esto no es una propiedad única de los vectores posición. Si O, O', O'' están en mutuo reposo,

$$\left.\begin{aligned} S &= \sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2+(v_3-u_3)^2} \\ S &= \sqrt{(F_1-f_1)^2+(F_2-f_2)^2+(F_3-f_3)^2} \end{aligned}\right\} \text{invariantes ante las transformaciones de } E_3$$

$(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rightarrow$ velocidades

$(F_1, F_2, F_3), (f_1, f_2, f_3) \rightarrow$ fuerzas

y lo mismo para cualquier vector $\mathbb{R}^3$.

La masa, el tiempo, las diferencias de energía son todos escalares en mecánica Newtoniana

¿Cómo calculamos la distancia entre dos puntos?

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}$$

producto escalar

Si $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$$

Otra forma de escribir esto es consideras la matriz identidad

"tensor métrico"

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \vec{b} = \vec{b} \implies \vec{a} \cdot \Delta \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

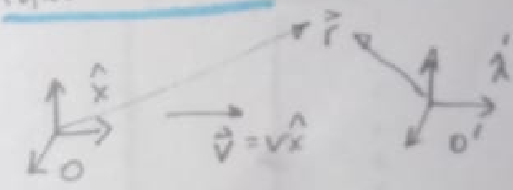
Esto parece trivial, pero si quiero calcular distancias en espacios curvos, el tensor métrico es diferente

Δ ya no es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En resumen, la geometría de nuestro espacio está determinada por E^3, sus transformaciones, sus invariantes, y la estructura del tensor métrico $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ correspondiente al espacio 3D plano.

La geometría del espacio-tiempo de Minkowski

Antes de 1905,



$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= (x, y, z) \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \text{Transformación de Galileo.}$$

Después de 1905 (principio de relatividad de Einstein
c = cte en todo sistema de referencia)

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}\right\} \text{Trasformación de Lorentz}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (\gamma \geq 1)$$

Vimos además que estas transformaciones tenían consecuencias extrañas,

1. Dilatación temporal: Si $\Delta t'$ es el tiempo entre dos eventos para O', para O: $\Delta t = \underbrace{\gamma}_{\geq 1} \Delta t'$

2. Contracción de Lorentz: Si $\Delta x'$ es la distancia entre dos puntos para O', para O la distancia es $\Delta x = \underbrace{\frac{1}{\gamma}}_{\leq 1} \Delta x'$

Esta es la teoría especial de la relatividad, tal como la propuso Einstein. Al principio, podría parecer que únicamente se nos pide abandonar algunas intuiciones sobre el tiempo y el espacio...

... Pero NO! Esto lo cambia TODO

Desde este momento se iniciaron cambios irreversibles no solo en nuestra concepción física del mundo, sino también en la forma misma en que los físicos hacen física.

Lo que estamos por ver es el punto de inflexión exacto entre dos formas distintas de hacer y entender física, al punto que algunos físicos teóricos consideran que este es el momento exacto en que las cosas empezaron a descarrilarse.

Lo que vamos a ver

ANTES:	DESPUÉS:
- Búsqueda de principios físicos para formular nuevas teorías	- Búsqueda de nuevas estructuras matemáticas para formular nuevas teorías
- Unificación entre teorías físicas ocurre de forma natural y espontánea	- El objetivo de la física teórica pasa a ser, en gran medida, la unificación de distintas ramas de la física.
- Los experimentos son la guía principal para desarrollar teoría	- La "belleza" (simetría) de las teorías es una guía para evaluar su plausibilidad
- Análisis matemático. - Ecuaciones diferenciales. - Álgebra lineal.	- Teoría de grupos - Geometría diferencial - Análisis funcional - Topología

¿Cuál es la idea de la que estoy hablando?

A partir de la forma covariante nueva que toman las transformaciones de Lorentz, Einstein seguía pensando en términos de un espacio euclídeo con geometría dada por E^3

Hermann Minkowski (1908)

"Las ideas sobre el tiempo y el espacio que voy a presentarles han surgido de la física experimental, y de ahí surge su fortaleza. Son ideas radicales. A partir de ahora, el espacio por sí mismo, y el tiempo por sí mismo, están condenados a desaparecer apenas como sombras. Únicamente una unión entre ambos mantendrá su realidad de forma independiente"

Vamos a definir un conjunto de cuatro números que alcanza para definir un evento en el tiempo y espacio

$$\bar{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (\underbrace{ct}_{}, \underbrace{x, y, z}_{\text{coord. 3D usuales}})$$

ct: el tiempo en que ocurre el evento multiplicado por c para que también tenga unidad de longitud / la distancia que recorre la luz en el tiempo t del evento

Definamos $\beta = \frac{v}{c}$.

Entonces, las transformaciones de Lorentz,

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) = \gamma x^0 - \gamma\beta x^1$$
$$x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) = \gamma x^1 - \gamma\beta x^0$$
$$x^{2\prime} = x^2$$
$$x^{3\prime} = x^3$$

Comparemos con como se transforma (x, y, z) bajo una rotación:

$$x' = \cos\theta \cdot x - \operatorname{sen}\theta\, y$$
$$y' = \cos\theta\, y + \operatorname{sen}\theta\, x$$
$$z' = z$$

La forma matemática es la misma.
Una rotación en $\mathbb{R}^3$ mezcla las coord. x, y
La transformación de Lorentz es una especie de rotación en un espacio de 4D que mezcla tiempo y espacio

Transformación de Lorentz.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rot. $\mathbb{R}^3$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La idea de Minkowski es la siguiente:

Si comparamos las transformaciones de Galileo con todas las transformaciones posibles de E^3, vemos que únicamente hay una parte (translaciones y vt). Las rotaciones, por ejemplo, no expresan transformaciones de Galileo. De alguna forma es incómodo ("feo") que las leyes de la física se transformen de acuerdo a un subconjunto de las opciones disponibles en E^3.

Minkowski nos dice: "eso es porque están mirando la situación de forma incompleta, porque están separando el tiempo del espacio. En realidad, el tiempo y el espacio no se transforman por separado (de hecho, el tiempo no es un escalar) sino como parte de un único vector ("cuadrivector"), $\bar{x} = (\underbrace{x^0}_{ct}, x^1, x^2, x^3)$".

Combinamos un escalar y un vector en una misma entidad, de forma tal que ahora las transformaciones que respetan [redacted] las leyes de la física son rotaciones + translaciones + simetrías de espejo en ese espacio de 4D.

SI AUMENTAMOS LA CANTIDAD DE DIMENSIONES, TODAS LAS TRANSFORMACIONES POSIBLES DEL ESPACIO PRESERVAN LAS LEYES DE LA FÍSICA

Ceitas ramas de la física moderna hacen eco de esta idea al punto de recorrer el camino inverso.
Primero defino el grupo de transformaciones que quiero, y luego estudio la física.

[redacted] El "problema" que tenemos con el modelo estándar de física de partículas, es que no tiene un único grupo, sino tres y la amalgama de los tres es necesaria para describir las interacciones fuerte + débil + electromagnético.

Muchos físicos argumentan que "la naturaleza no elegiría una solución tan poco elegante" y buscan describir la física con grupos de transformaciones tales como E^8

En general, es necesario añadir más dimensiones para unificar grupos de transformaciones.

El problema es que, a diferencia de lo que hizo Minkowski, con el tiempo, las dimensiones extra no tienen significado físico

Los físicos teóricos discrepan sobre el rol de la "belleza" en la búsqueda de nuevas teorías. Funcionó espectacularmente en el pasado (rel. especial y general, ecuación de Dirac) pero hay problemas sin resolver cuya solución parece desafiar la búsqueda de estructuras matemáticas bellas)

Vamos a ir, entonces, un paso más allá.

Dijimos que $\bar{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ es un cuadrivector, porque se transforma mediante la Λ que especifica la t. de Lorentz.

(cuadrivector espacio-tiempo)

Definamos $\bar{a} = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ un cuadrivector cualquiera, entonces se transforma mediante

$$\Lambda \bar{a} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

Es decir,

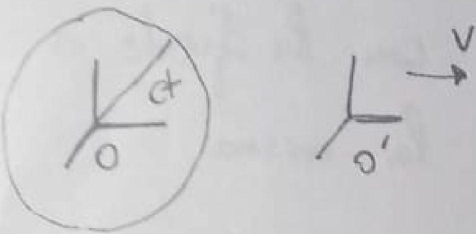
$$a'^0 = \gamma(a^0 - \beta a^1)$$
$$a'^1 = \gamma(a^1 - \beta a^0)$$
$$a'^2 = a^2$$
$$a'^3 = a^3$$

En el espacio euclídeo la distancia entre dos puntos es un invariante ante las transformaciones en el grupo E^3.

Pero sabemos que la distancia entre dos puntos $\boxed{\text{no}}$ es un invariante en el espacio de Minkowski ante transformaciones de Lorentz (contracción de Lorentz)

$\boxed{\text{¿Cuál es el invariante correspondiente?}}$

Cuando O y O' coinciden, O emite un pulso de luz.



Desde O, luego de un tiempo t, el pulso de luz está en la esfera de radio ct, o sea, todos los puntos con una distancia ct al origen,

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = ct \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = c^2t^2$$

$$-c^2t^2+x^2+y^2+z^2=0.$$

Desde O' aplico las tr. de Lorentz, encontrando t', x', y', z' que cumplen $-c^2t'^2+x'^2+y'^2+z'^2=0$

Eso quiere decir que

$$\boxed{-c^2t^2+x^2+y^2+z^2} = -c^2t'^2+x'^2+y'^2+z'^2$$

esta cantidad es invariante ante t. de Lorentz

De la misma forma que $\vec{r}\cdot\vec{r} = x^2+y^2+z^2$ es invariante en E^3 bajo rotaciones, vamos a definir un producto interno entre cuadrivectores de forma tal que obtengamos invariantes ante transform. de Lorentz

En el espacio ordinario definimos el producto interno como

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = (x,y,z)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\text{invariante}}$$

En el espacio de Minkowski, esto no sirve,

$$\bar{x}\cdot\bar{x} = (ct,x,y,z)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ct\\x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{c^2t^2+x^2+y^2+z^2}_{\text{no es invariante.}}$$

En el espacio de Minkowski, entonces, el producto interno usa otro "tensor métrico"

$$\bar{x}\cdot\bar{x} = (ct,x,y,z)\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ct\\x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{-c^2t^2+x^2+y^2+z^2}_{\text{invariante}}$$

El -1 es lo que hace en última instancia que el tiempo sea distinto a las demas dimensiones.

Pero los físicos no lo hacen con la matriz $\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ sino que hacen lo mismo de otra forma.

[redacted] $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ es un cuadrivector. Por ejemplo $x^\mu = (ct, x, y, z)$. Decimos que es la forma CONTRAVARIANTE del cuadrivector.

Definimos $a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a^1, a^2, a^3, a^4)$

la forma **COVARIANTE** del cuadrivector.

Por ejemplo, $\bar{x}_\mu = (-ct, x, y, z)$ es la forma covariante del vector tiempo-espacio.

(En la forma covariante se pone un -1 en la primera componente).

Luego, el producto interno del vector tiempo-espacio consigo mismo es,

[redacted] $$\sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu = x_0 x^0 + x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3$$

$$= (-ct)(ct) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$= \underbrace{-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2}_{\text{invariante}}$$

En general,

dados dos cuadrivectores a, b hacemos el producto interno como $\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3$

$$= -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

Notación de Einstein

Dejemos de escribir el signo de sumatoria.

Cuando dos letras griegas ("μ") aparecen repetidas, se sobre-entiende que suma entre 0 y 3

$$x_\mu x^\mu = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

(Claramente $a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$.)

En resumen, para cualquier cuadrivector $\bar{a}$, $a_\mu a^\mu$ es un escalar, un número que no [redacted] depende del sistema de referencia.

El intervalo invariante.

Supongamos que tenemos dos eventos, A y B con sus cuadrivectores correspondientes,

Los escribo así en la forma contravariante

$$\bar{x}_A = (ct_A, x_A, y_A, z_A) = (x_A^0, x_A^1, x_A^2, x_A^3) = x_A^\mu$$
$$\bar{x}_B = (ct_B, x_B, y_B, z_B) = (x_B^0, x_B^1, x_B^2, x_B^3) = x_B^\mu$$

Considero entonces la resta que es el cuadrivector

$$\Delta x^\mu = x_A^\mu - x_B^\mu = (\overbrace{x_A^0 - x_B^0}^{\Delta x^0}, \overbrace{x_A^1 - x_B^1}^{\Delta x^1}, \overbrace{x_A^2 - x_B^2}^{\Delta x^2}, \overbrace{x_A^3 - x_B^3}^{\Delta x^3})$$

El producto escalar consigo mismo es, como vimos, un invariante,

$$\Delta x^\mu \Delta x_\mu = \underbrace{-(\Delta x^0)^2}_{-c^2t^2} + \underbrace{(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2}$$

t es el tiempo entre eventos

esto es la distancia en el espacio euclídeo al cuadrado, llamemosla d^2

Las transf. de Minkowski cambian t y d pero el intervalo

$$I = \Delta x^\mu \Delta x_\mu = -c^2t^2 + d^2$$ es invariante

Supongamos que tenemos dos eventos A, B y calculamos el intervalo. $I = -c^2t^2 + d^2$.

Tenemos tres posibilidades,

$I > 0$, $I = 0$, $I < 0$.

$\boxed{I > 0}$ $-c^2t^2 > d^2 \Rightarrow d^2 > c^2t^2$. La separación espacial entre los eventos es mayor que ct, y no pueden estar influenciados causalmentre entre sí.

"intervalo tipo espacial"

$\boxed{I < 0}$ $-c^2t^2 < d^2 \Rightarrow d^2 < c^2t^2$.

En este caso los eventos pueden comunicarse e influenciarse causalmente, porque es posible enviar un pulso de luz de uno hacia el otro.
Uno de ellos [redacted] ocurre antes que el otro

"intervalo tipo temporal"

$\boxed{I = 0}$ $c^2t^2 = d^2 \Rightarrow$ En este caso, los eventos A y B están separados por una distancia que la luz recorre en t
(únicamente pueden comunicarse a la vel. de la luz)

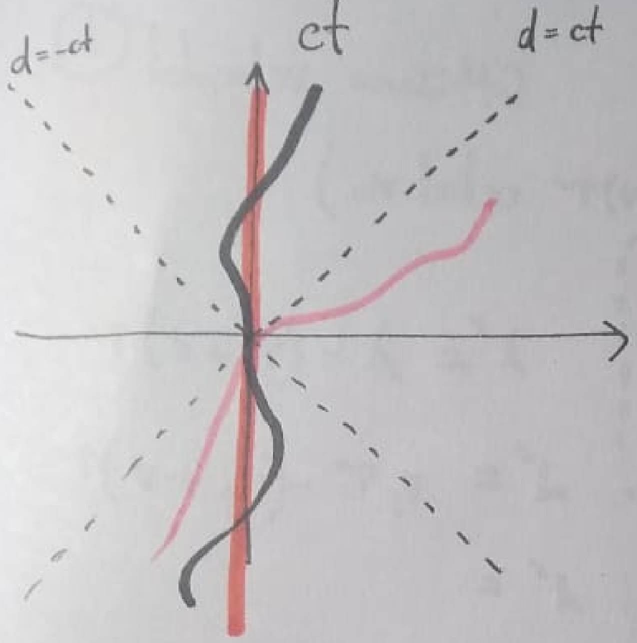


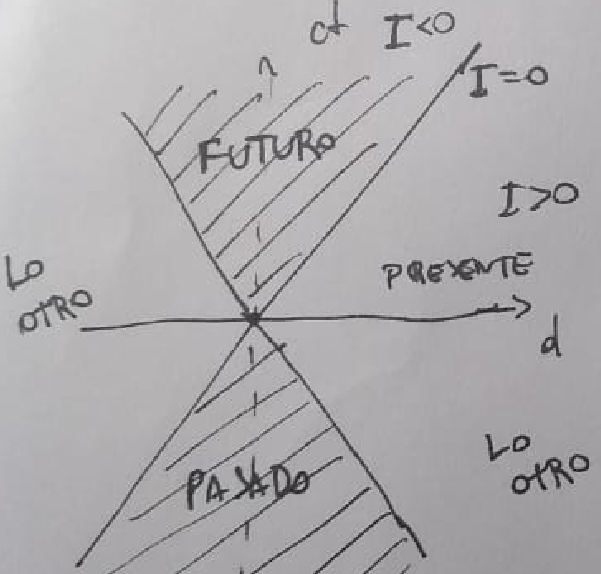
Diagrama de Minkowski
una línea representa una trayectoria en el espacio-tiempo (línea de mundo)

---- línea de mundo de un fotón

línea de mundo de alguien quieto, (d=cte).
sólo avanza en el tiempo

línea de mundo de alguien que se desplaza en el tiempo y el espacio.

ESTA LÍNEA DE MUNDO ESTÁ PROHIBIDA ($v > c$)



[redacted] Sea el evento $\bar{x}_A$ nuestro presente, aquí y ahora.
Si un evento $\bar{x}_B$ tiene $I<0$ [redacted] está en mi pasado o mi futuro. Por ejemplo, el asesinato de Julio César, el gol de Diego a los ingleses, los procesos que emiten la luz que me llega de una estrella lejana, el prefinal de F1, todos tienen $I<0$.

Supongamos que considero un evento con un t muy muy pequeño (una distancia en el tiempo muy pequeña en relación a mi presente).

Entonces sin necesidad de que d sea muy grande puede ocurrir $I > 0$.

Eso significa que ese evento está en "LO OTRO".

No puedo decir decir que esté ni en mi pasado ni en mi futuro. En algunos sistemas de referencia estará en mi futuro, en otros en el pasado, en otros, simultaneamente.

Yo vivo en Vicente López. [redacted]

En 10^{-20} s. alguien prende una lamparita en La Plata

¿ Está la lamparita siendo prendida en mi pasado o futuro ?.

En 10^{-20} la luz no llega de La Plata a Vicente López y viceversa.

En lo que a mi respecta, la lamparita pudo haberse prendido antes, después o simultáneamente, y hay sistemas de referencia donde efectivamente es el caso.

$\boxed{\text{La idea de que existe un presente que todos compartimos es ilusoria. Cada uno tiene su único presente.}}$

Dijimos que $x^\mu = (ct, x, y, z)$ es un cuadrivector.

Busquemos otros ejemplos. El siguiente candidato tiene que ver con la velocidad.

Supongamos que pasa un intervalo de tiempo $d\tau$ en nuestro sist. de referencia. Vemos un intervalo mayor en un sist. que se mueve a vel. v respecto de nosotros

$$\underbrace{d\tau}_{\text{mi tiempo}} = \underbrace{\sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt}_{\text{el tiempo en el objeto que se mueve.}}$$

Supongamos que viajamos en una nave espacial hacia Marte. La nave atraviesa una nube de polvo.

La velocidad de la nave respecto a la nube de polvo es su desplazamiento dividido el tiempo para alguien fijo a la nube.

$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Por ejemplo si la nube tiene 100 km de largo y alguien ve a la nave cruzarla en 10 s, $\vec{v} = \frac{100 \text{ km}}{10 \text{ s}} = 10 \text{ km/s}$

Ahora, para alguien en la nave es más natural usar su tiempo propio $d\tau$

$\vec{\eta} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} \Rightarrow$ vel. propia.

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

¿Usamos $\vec{u}$ o $\vec{\eta}$ para definir un cuadrivector de velocidad?

Rta: $\vec{\eta}$, sino no obtenemos un cuadrivector que se transforme de acuerdo a la T. de Lorentz.

Defino el cuadrivector velocidad,

$$\boxed{\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}} \qquad \eta^0 = \frac{d(ct)}{d\tau} = c\,\frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Para las otras coordenadas, ej,

$$\eta^1 = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \text{etc}$$

¿Cómo podemos verificar que η^μ realmente es un cuadrivector?

$\eta^\mu \eta_\mu$ tiene que ser invariante.

$$\eta^\mu \eta_\mu = -\eta^0\eta^0 + \eta^1\eta^1 + \eta^2\eta^2 + \eta^3\eta^3 = \frac{-c^2 + \overbrace{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}^{u^2}}{(1 - u^2/c^2)}$$

$$= c^2\left(\frac{u^2 - c^2}{c^2 - u^2}\right) = \underline{-c^2} \quad \text{invariante.}$$

La velocidad en el espacio de Minkowski tiene módulo c.

Todos nos movemos a la velocidad de la luz sólo que algunos más en el espacio y otros más en el tiempo.

Tenemos dos cuadrivectores: x^μ, η^μ.

Nos gustaría tener un equivalente del momento en el espacio de Minkowski.

En el espacio euclídeo, $\vec{p} = m\vec{v}$.

En el espacio de Minkowski, definimos

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{\eta} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}$$

Como siempre, como η^μ tiene η^0, preguntemonos quien es P^0.

$$P^0 = m\eta^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Tenemos entonces que armar un cuadrivector

$$p^\mu = \Big(\underbrace{\frac{mc}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}_{\text{¿qué es esto?}}, \underbrace{p^1, p^2, p^3}_{\text{momento}}\Big)$$

$$\boxed{\text{Minkowski se dio cuenta de que } \frac{mc}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \text{ tiene unidades de energía / velocidad.}}$$

Por lo tanto, propuso unificar la energía y el momento en un mismo cuadrivector, $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, \gamma m u_x, \gamma m u_y, \gamma m u_z\right)$

Cuadrivector energía momento

De acuerdo con esto,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Si $\vec{u}=0$ (el objeto está quieto) la energía relativista no es cero. Vale que,

$$\boxed{E = mc^2}$$

Si el cuerpo se está moviendo, tendremos además una contribución de la energía cinética.

Como $u<<c$ en el caso del movimiento cotidiano, $u/c \approx 0$. Podemos desarrollar

$E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ en series de Taylor. $\left(f(x) \approx f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2 \right.$ con $\left. x = \frac{u}{c} \right)$

$$E \approx \underbrace{mc^2}_{?} + \overbrace{\frac{1}{2}mu^2}^{K} + \dots$$

esto se conserva, pero un tipo puede transformarse en otra

m es un invariante, pero no es una cantidad conservada, puede transformarse en energía cinética.

La energía se conserva (pero no es invariante, porque es parte de un cuadrivector p^μ).

$p^\mu p_\mu$ si es invariante: $p^\mu p_\mu = -m^2c^2$