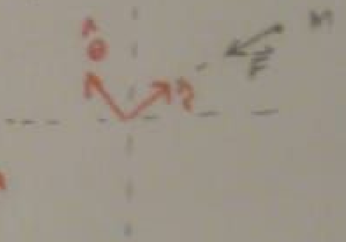
Fuerzas centrales y potencial efectivo

1/13

Consideremos el movimiento bidimensional de una partícula de masa m bajo una fuerza del tipo:

$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\hat{r}$ ← este tipo de fuerzas se llaman "centrales" porque apuntan siempre en la línea que pasa por el centro de coordenadas

En ppo. podría ser $\vec{F}(\vec{r}) = F(r,\theta)\,\hat{r}$. Pero como en el espacio todas las direcciones son iguales ("isotropía") no habrá dependencia con θ.



Supongamos que queremos encontrar $\vec{r}(t)$.

Planteamos la 2ª ley en coordenadas polares:

[redacted] $F_r =$ [redacted] $F(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ ☹

[redacted] $F_\theta = 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

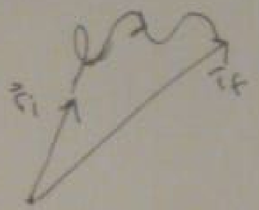
El problema para resolver estas ecuaciones es que <u>no</u> es cierto que $\dot{r} = 0$, o que $\ddot{\theta} = 0$ (el tipo de simplificaciones que usábamos antes en la materia para resolver este tipo de problemas.

Entonces, vamos a avanzar aplicando nuestros nuevos teoremas de conservación.

<u>Pregunta</u>: $\vec{F}(r)$ fuerza central, ¿es conservativa?

Respuesta: si solo depende de la posición, ¡sí! ↘ ¿Por qué?

Calculemos W de $\vec{F}$.



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

En polares, sé que las velocidades se escriben,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

Luego, los desplazamientos infinitesimales,

$$d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta}$$

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} F(r)\hat{r} \cdot (dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta})$$

$$= \int_{r_i}^{r_f} F(r)\,dr + \int_{\theta_i}^{\theta_f} F(r)\,r\,\overbrace{\hat{r}\cdot\hat{\theta}}^{=0}\,d\theta$$

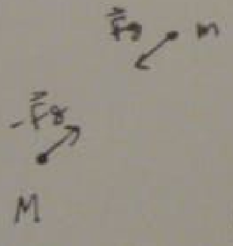
Pero para una función de una variable $F(r)$ puedo encontrar su primitiva y escribir,

$$W = \int_{r_i}^{r_f} F(r)\,dr = U(r_i) - U(r_f) \quad \text{donde} \quad F(r) = -\frac{dU}{dr}.$$

$\Rightarrow \vec{F}$ es conservativa.

Veamos algunos ejemplos,

① Atracción gravitatoria:



Supongamos que $M \gg m$, entonces lo podemos considerar fijo en el origen.

Entonces, $\vec{F}_g = -\underbrace{\frac{GMm}{r^2}}_{F(r)}\hat{r}$.

El potencial $U(r) = -\frac{GMm}{r}$

Notamos que en una dimensión

$F(r) = -\frac{dU}{dr}$

En tres dimensiones, también se cumple que

$$\vec{F}(r) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = -\nabla U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

pero como no vimos gradiente en Física 1, y tampoco lo vamos a necesitar, esto es por ahora anecdótico

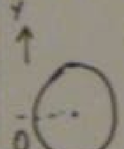
<u>obs</u>: U está definido a menos de una constante.

$U' = -\frac{GMm}{r} + C$ también es un potencial válido para $\vec{F}(\vec{r})$

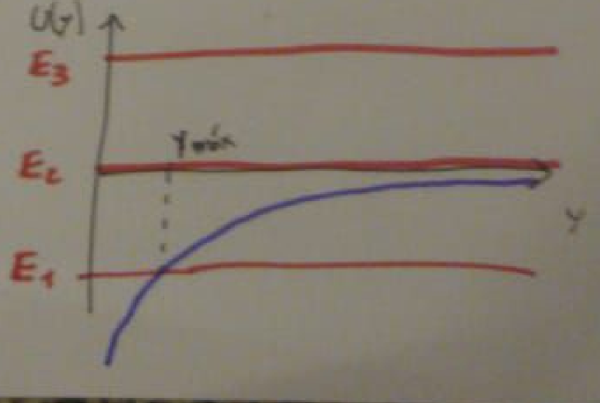
Se toma $C=0$ y se dice que "U vale 0 en el infinito" porque en ese caso,

$$\lim_{r\to\infty} -\frac{GMm}{r} = 0 \quad (\text{pues } C=0)$$

<u>obs 2</u>: Si la masa se mueve en una dimensión (por ej. en un tiro vertical), entonces $U(r)$ (ó $U(y)$, dependiendo de cómo llame a mi versor) tiene este aspecto:



E_1, E_2, E_3 son tres energías mecánicas totales que me dan distintos comportamientos (Notar que la energía mecánica total depende de las condiciones iniciales del problema)



Para E_3, el movimiento es desligado, porque es posible encontrar la partícula en $y \to +\infty$

Si $y_0 = R$ (el radio de la Tierra) y M es la masa de la Tierra,

$$E_3 = \underbrace{\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{R}}_{E_i} = \underbrace{\frac{mv_f^2}{2} - \frac{GMm}{y}}_{E_f}$$

$$E_i = E_f$$
$$(W_{NC} = 0)$$

de acá despejo v_f como función de y.

En el caso E_1 cuando $y > y_{max}$ la energía cinética debería pasar a ser negativa, lo cual no tiene solución. Entonces el movimiento es ligado ($y < y_{máx}$)

En el caso E_2, tengo que

$$0 = \frac{\cancel{m}v_0^2}{2} - \frac{GM\cancel{m}}{R} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

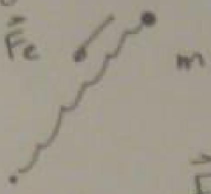
A medida que $y \to \infty$, toda la energía se hace potencial, luego $v_f \to 0$.

Es el caso límite en el cual la partícula puede escapar de la atracción gravitatoria y $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ se llama velocidad de escape

≈ 11 km/s

para la Tierra

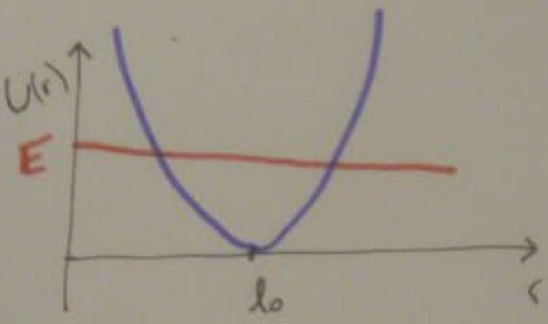
② Fuerza elástica



La $\vec{F}_e$ apunta siempre en $\hat{r}$. Además, depende únicamente de la longitud del resorte, dada por r,

$$\vec{F}_e(\vec{r}) = -k\underbrace{(r-l_0)}_{\Delta = \text{estiramiento del resorte.}}\hat{r}.$$

$$U(r) = \frac{k}{2}(r-l_0)^2.$$



En este caso, el movimiento siempre es ligado, sin importar E. (en la práctica, por supuesto, hay un límite a la fuerza que puede hacer un resorte, y el movimiento puede volverse desligado).

Llegamos a la conclusión de que para una fuerza central, vale que

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) = \text{constante}$$

Hay dos formas en que podemos volver a esta expresión más útil.
Primero, r es una coordenada de polares.
Así que escribamos a v^2 en polares,

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \qquad v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})\cdot(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})$$
$$= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2.$$

Entonces, $E = \underbrace{\frac{m\dot{r}^2}{2}}_{①} + \underbrace{\frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2}}_{②} + U(r)$

① Es la contribución a K de la velocidad radial

② Es la contribución a K de la velocidad angular otra cosa que podemos hacer es preguntarnos que más se conserva en un movimiento bajo fuerzas centrales.

¿$\vec{p}$? <u>No!</u> $\vec{F}^{ext} \neq 0$ ($\vec{p}$ puede cambiar de dirección <u>y</u> de módulo si el mov. no es circular)

¿$\vec{L}$? <u>Si!</u> Porque $\vec{\tau} = r\hat{r} \times F(r)\hat{r} = 0$. → Como $\vec{L}$ se conserva ya podemos afirmar que el movimiento será confinado a un plano

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r\hat{r} \times m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \Rightarrow$

en polares

$\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\,\hat{z} = cte.$

¿Cuál es la estrategia ahora?

Yo quiero encontrar algo que se conserve en el movimiento, y que además pueda entender en términos de L, que depende de las condiciones iniciales del problema (r_0 y $\dot{\theta}_0$). En la expresión de E aparece $\dot{\theta}$. Entonces, escribamos a L en función de $\dot{\theta}$.

$$L^2 = \vec{L}\cdot\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\,\hat{z} \cdot mr^2\dot{\theta}\,\hat{z} = m^2r^4\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m^2r^4}$$ Reemplazando en E,

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2L^2}{2m^2r^4} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \underbrace{\boxed{\frac{L^2}{2mr^2} + U(r)}}_{U_{ef}(r)}$$

$U_{ef}(r)$ se denomina potencial efectivo. ¿Cómo se interpreta?

$U_{ef}(r)$ <u>no</u> es un potencial de verdad, en el sentido de que no existe una fuerza $\vec{F} = -\frac{dU_{ef}}{dr}$.

El término $\frac{L^2}{2mr^2}$ aparece únicamente debido a la inercia.

Debido a que la masa conserva su momento angular, si r se hace pequeño, $\dot{\theta}$ se hace muy grande, entonces casi toda la energía cinética pasa a ser angular y el término $\frac{m\dot{r}^2}{2}$ se hace muy pequeño.

El término $\frac{L^2}{2mr^2}$ entonces representa la contribución de la velocidad angular a la energía mecánica; como me interesa $\dot{r}$ puedo pensar a esta contribución como una parte del potencial en el que se mueve la coordenada r de la partícula.

Dicho de otro modo,

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{ef}(r)$$

es la energía mecánica de una masa m en un movimiento unidimensional en un potencial U_{ef}, pero es muy importante recordar que el movimiento no es unidimensional, dado que aún conociendo $\dot{r}$ me hace falta conocer $\dot{\theta}$ para escribir la velocidad de la partícula en un punto dado de la trayectoria. (lo cual se obtiene de la conservación de L).

En el problema de mov. bajo fuerzas centrales, el desafío es encontrar y entender $\dot{r}$, porque $\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4}$ implica que $\dot{\theta}$ siempre es > 0 < 0 dependiendo del L y disminuye para r grande y aumenta para r chico.

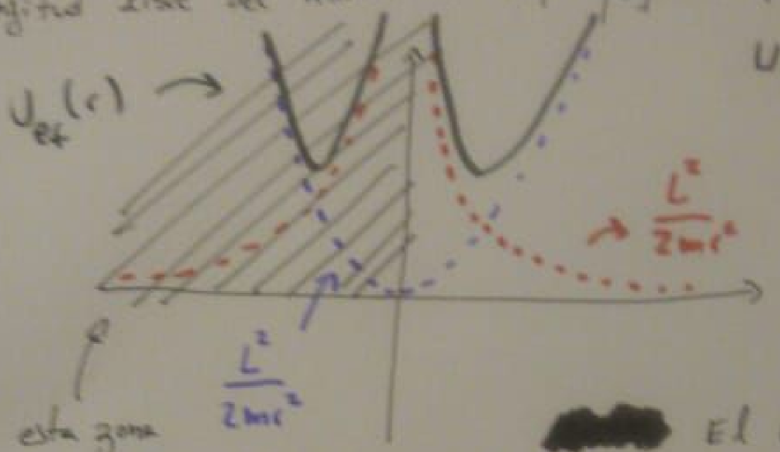
Un ejemplo de potencial efectivo: masa unida al origen con un resorte.

$$U(r) = \frac{k}{2}(r - l_0)^2, \text{ entonces}$$

$$U_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}(r - l_0)^2.$$

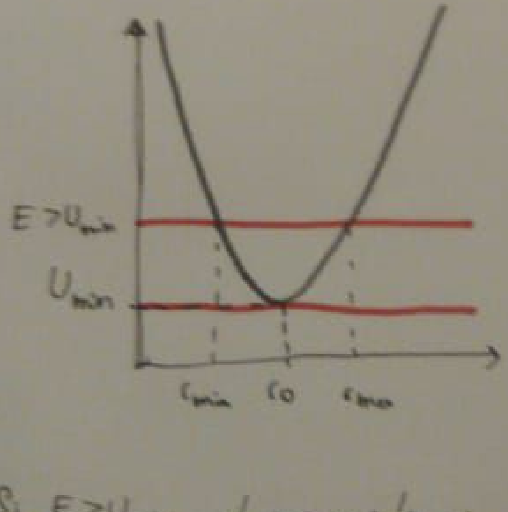
Para hacer las cosas más simples supongamos que la longitud libre del resorte es muy pequeña ($l_0 \approx 0$)

$$U_{ef} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2$$



esta zona la descarto pues $r \geq 0$.

[redacted] El caso $E < U_{min}$ no corresponde a un movimiento posible.

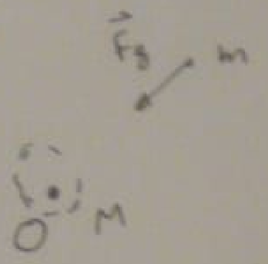


El caso U_{min} corresponde a un movimiento con $r = r_0 = cte$ (pues estoy en un mínimo de potencial). Ese es el caso en que el movimiento es circular, en el que la fuerza elástica [redacted] es igual a la fuerza centrípeta [redacted]

[redacted]

Si $E > U_{min}$, el movimiento es ligado pero r se mueve entre r_{min} y r_{max}

Ahora vamos a estudiar cualitativamente el movimiento bajo una atracción gravitatoria 2D hacia el origen



Obs 1: No hay pérdida de generalidad en considerar un movimiento 2D ($\vec{L}$ = cte $\Rightarrow$ mov. confinado a un plano)

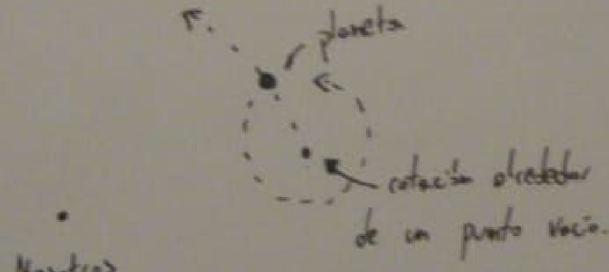
Obs 2: Si bien M y m pueden ser cuerpos extensos, la fuerza gravitatoria que ejercen es idéntica a la de un punto que concentra toda su masa en el C.M.

Obs (histórica)

El movimiento de los astros a cautivado a los seres humanos desde siempre (al menos cuando no está nublado).

Parece como si el Sol se moviese alrededor de la Tierra (lo cual no debería ser muy extraño, dado que nosotros estamos, justamente, en la Tierra).

Para los antiguos, el movimiento de los planetas era una epicicloide, es decir, un movimiento circular "montado" sobre otro movimiento circular.



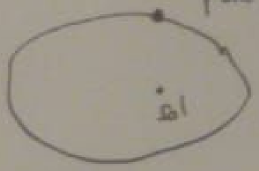
Hoy sabemos que si las órbitas de los planetas fuesen exactamente circulares, esta descripción no estaría mal, únicamente sería muy rebuscada, porque corresponde a mov. alrededor del Sol descripto en un sistema de coordenadas con origen en la Tierra.

Pero los antiguos encontraban más y más problemas al describir los planetas y sus movimientos de esta manera. Fue Copérnico quien sugirió que quizás no todo girase alrededor de la Tierra.

Pero el problema aún no estaba resuelto, porque un modelo en el cual los planetas giran alrededor del Sol con movimiento circular es incorrecto.

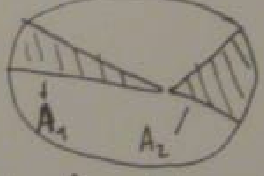
Fue Kepler partiendo de observaciones de Tycho Brahe quien encontró tres leyes para describir el movimiento planetario.

1) Los planetas se mueven en elipses con el Sol en uno de sus focos



2) El radio r de planetas barre áreas iguales en tiempos iguales

En el mismo Δt, $A_1 = A_2$



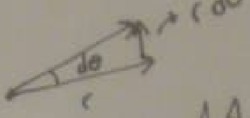
3) El periodo de la órbita al cuadrado es [redacted] proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita

$$T^2 \propto l^3$$

Newton se dio cuenta de que las leyes 1 y 3 son una consecuencia del decaimiento de la atracción gravitatoria como el cuadrado de la distancia.

Además, Newton demostró que 2) vale para cualquier fuerza central y es una consecuencia de la conservación de $\vec{L}$.

Una demostración rápida de 2)



$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

$\Delta A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 d\theta$ ↗ ángulo entre θ_0 a t_0 y θ_1 a t_1

Cambio de variables, $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \Rightarrow d\theta = \dot{\theta}\, dt$

$\Delta A = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} r^2 \dot{\theta}\, dt$. Pero $L = m r^2 \dot{\theta} = cte$, entonces,

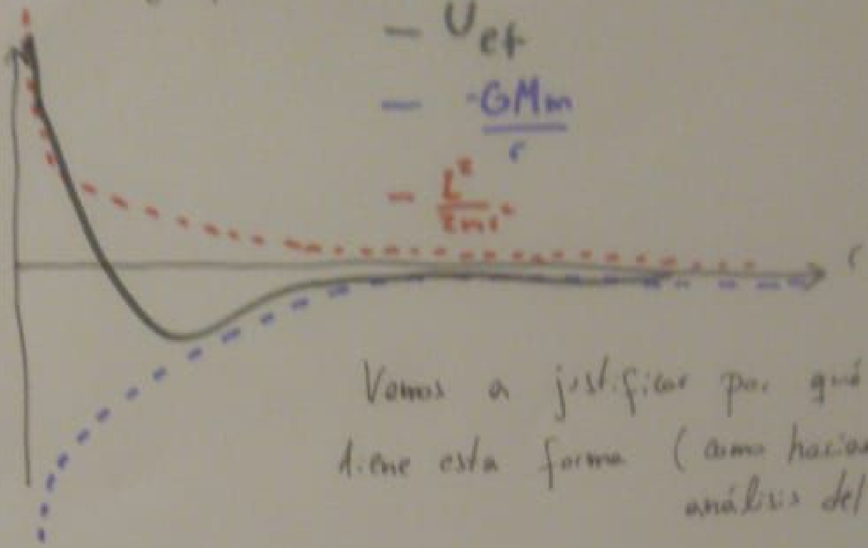
$\Delta A = \frac{L}{2m} \int_{t_0}^{t_1} dt = \frac{L}{2m} \Delta t$ ↗ $\Delta A \propto \Delta t$, luego para un mismo Δt tengo el mismo ΔA

1) y 2) se deducen de integrar las ecuaciones de Newton. Esto está hecho en los libros, son muchas cuentas que es mejor evitar en la teórica (por un tema de tiempo). No necesitan conocer la ecuación de las trayectorias para los ejercicios de la guía. De todas formas, vamos a resolver numéricamente las ecuaciones de Newton, y por ahora concentrarnos en describir las órbitas cualitativamente.

Escribamos el $U_{ef}(r)$,

$$U_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Vamos a graficarlo,



Vamos a justificar por qué tiene esta forma (como hacíamos en análisis del CBC)

$U_{ef}(r) \xrightarrow[r \to 0]{} +\infty$ ($\frac{L^2}{2mr^2}$ se va a $+\infty$ más rápido que $\frac{-GMm}{r}$ a $-\infty$)

U_{ef} corta el eje x una sola vez,

$$\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = 0 \underset{(r \neq 0)}{\Leftrightarrow} L^2 \cancel{r} = 2GMm^2 r^{\cancel{2}} \Rightarrow r = \frac{L^2}{2GMm^2}$$

Como $U_{ef}(r) \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$, tiende a 0 "por debajo" del eje x (dado que no vuelve a cortar el eje)

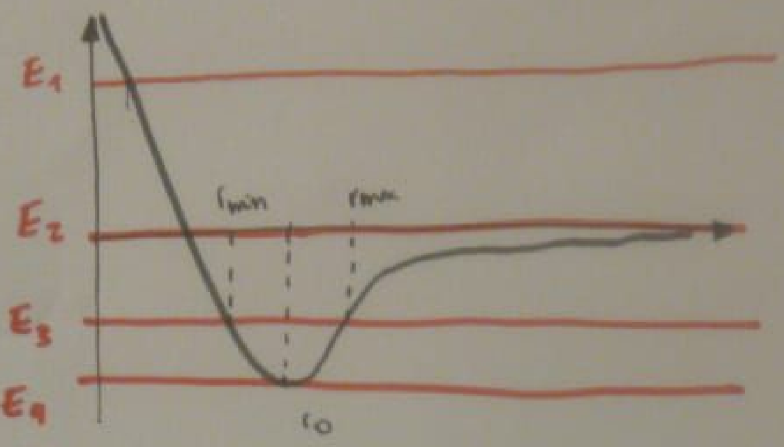
Además, eso significa que U_f tiene al menos un mínimo entre $\frac{L^2}{2GMm^2}$ y $+\infty$. Para buscarlo, estudio la [redacted] derivada

$$\frac{dU_{ef}}{dr}(r) = \frac{-L^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dU_{ef}}{dr} = 0 \iff \frac{L^2}{mr^3} = \frac{GMm}{r^2} \iff L^2 r^2 = GMm^2 r^3 \iff r = \frac{L^2}{GMm^2}$$
$(r \neq 0)$

Noto que este es el r en el cual tengo que

$$\frac{GMm}{r^2} = mr\dot{\theta}^2 \quad \text{(condición de mov. circular uniforme)}$$



E_1 : Movimiento desligado (hipérbola). Ocurre si,

$$E = \frac{m\dot{r}_0^2}{2} + \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{GMm}{r_0} > 0 \quad \text{con} \quad L = mr_0^2\dot{\theta}_0$$

E_2 : Movimiento desligado crítico (parábola). Ocurre si,

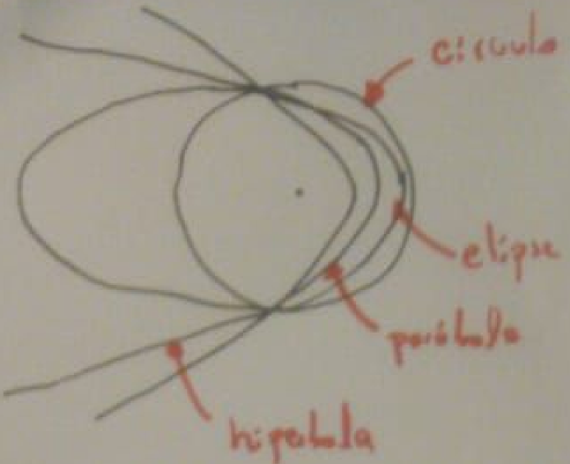
$$E = \frac{m\dot{r}_0^2}{2} + \frac{L}{2mr_0^2} - \frac{GMm}{r_0} = 0$$

E_3 : Movimiento ligado entre r_{min} y $r_{máx}$ (elipse). Ocurre si:

$$E_4 < E = \frac{m\dot{r}_0^2}{2} + \frac{L}{2mr_0^2} - \frac{GMm}{r_0} < 0 \quad \text{Con} \quad E_4 = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{GMm}{r_0}$$

E_4 : Movimiento ligado con trayectoria circular ($\dot{r} = 0$) y $r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}$

14/14
M



órbitas posibles bajo la acción de una fuerza gravitatoria central

En general, los planetas poseen órbitas de baja excentricidad (parecidas a círculos, aunque elípticas).

Hay una excepción al movimiento planetario: la órbita de Mercurio

Si bien Mercurio se mueve en una órbita elíptica, la órbita tiene un movimiento de <u>precesión</u> (va rotando)

La precesión es muy lenta, pero suficientemente notoria como para llamar la atención de los astrónomos.

Durante algún tiempo considerable se especuló con que había un planeta cerca del Sol que aún no había sido detectado ("Vulcano")

Vulcano sería el responsable de modificar la órbita de Mercurio, alejándola de la elipse predicha por la gravitación de Newton

A pesar de los esfuerzos, Vulcano nunca fue encontrado

En 1915 Albert Einstein publicó su nueva teoría de la gravitación, conocida como "Relatividad general". La relatividad general predice correctamente la precesión de Mercurio.