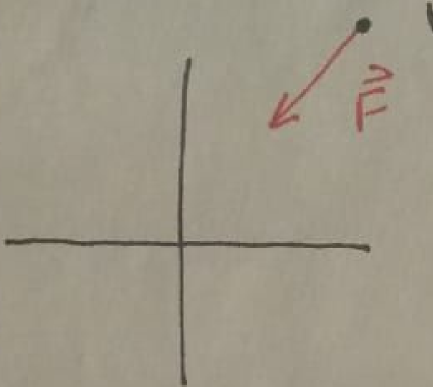
Gravitación y fuerzas centrales



$\vec{F} = F(r)\,\hat{r}$ es conservativa

Existe $U(r)$ tal que

$F(r) = -\dfrac{dU}{dr}$ $\quad E = \dfrac{mv^2}{2} + U(r) = cte$

$\vec{L} = r\hat{r} \times (m\dot{r}\hat{r} + mr\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\,\hat{z}$

Además $\vec{L} = cte.$

Combinando la conservación de $\vec{L}$ y E, llegamos a:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \boxed{\frac{L^2}{2mr^2} + U(r)}$$

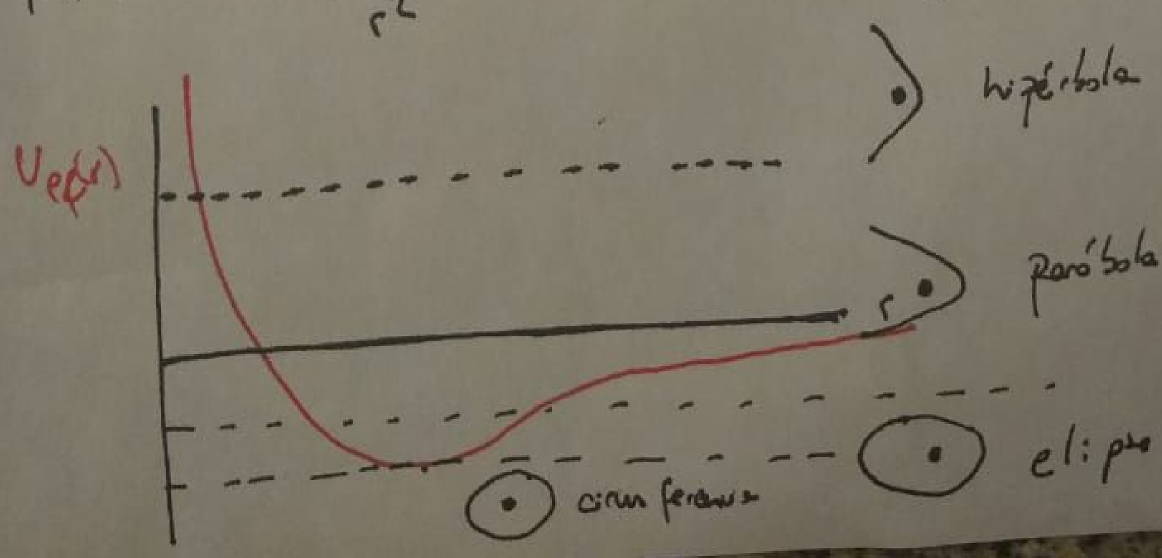
$U_{ef}(r)$ = potencial efectivo

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{ef}(r)$$

$\Rightarrow$ Energía para el movimiento unidimensional en r (recordar que $\dot{\theta} = \dfrac{L}{mr^2}$)

Para el caso de la interacción gravitatoria,

$F(r) = -\dfrac{GMm}{r^2} \Rightarrow U(r) = -\dfrac{GMm}{r}$

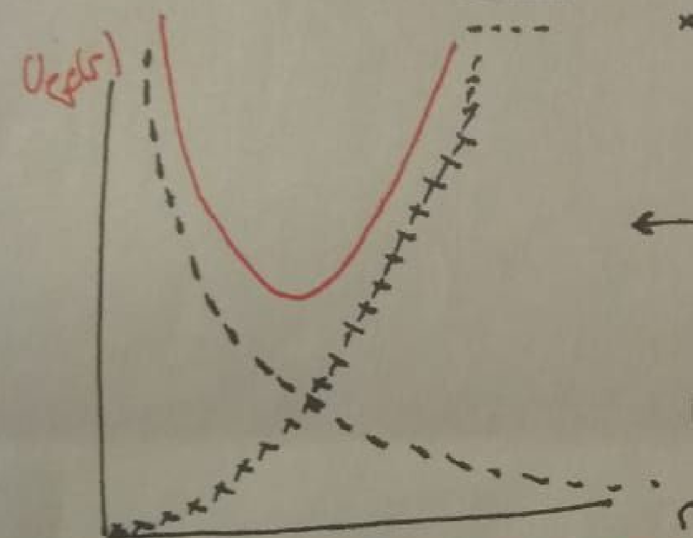


Otro ejemplo de potencial efectivo: fuerza elástica

$\vec{F} = -k(r - l_0)\hat{r}$ Consideremos el caso $l_0 = 0$

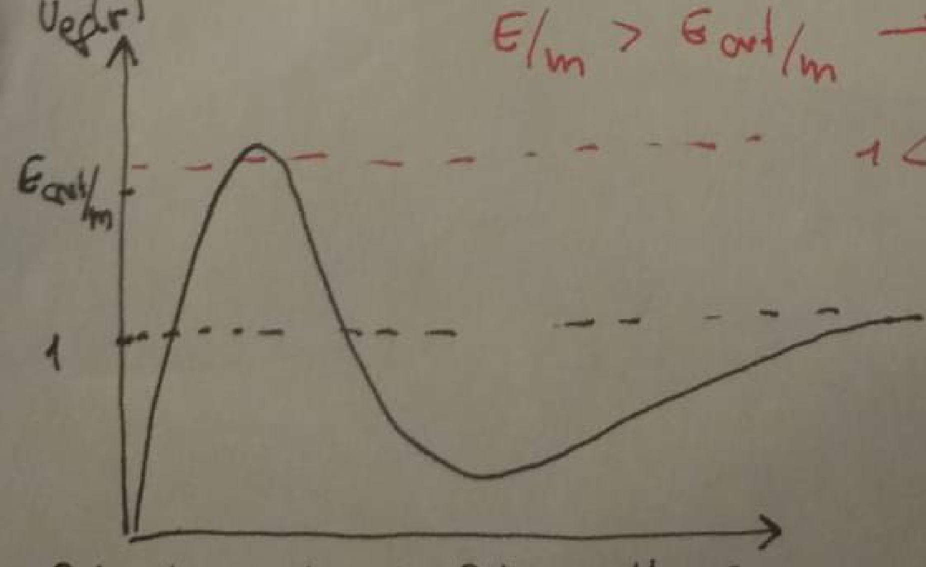
$\vec{F} = -kr\hat{r} \Rightarrow U(r) = \frac{kr^2}{2}$.

Luego $U_{ef} = \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{- - - -} + \underbrace{\frac{kr^2}{2}}_{\times\times\times\times\times}$



← el movimiento siempre es ligado entre un r_{min} y r_{max} (excepto para el mínimo de energía)

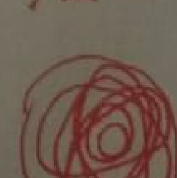
¿Cómo son los potenciales efectivos en relatividad general?



$E/m > E_{crit}/m$ → cae en el agujero

$1 < E/m < E_{crit}/m$ → desligado

$E/m < 1$ → movimiento ligado.



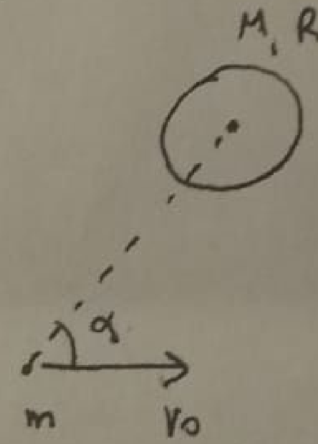
→ precesión

Potencial efectivo de Schwarzschild

<u>Ejercicio</u>: Satélite de masa m aproximándose a la Tierra (con masa M y radio R). En el momento en que el satélite está a distancia $D = 6R$ del centro de la Tierra, el módulo de su velocidad es

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{3R}} \quad (G = \text{cte de gravitación})$$

Suponga que la Tierra está quieta y desprecie el efecto de otros cuerpos celestes.



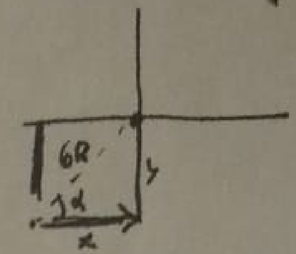
a) Magnitudes conservadas

b) ¿V_{ef} y tipo de órbita?
¿Para qué valores de α <u>NO</u> choca con la superficie?

c) Si $\alpha = \pi/4$, calcule la componente tangencial y el módulo de la componente radial de $\vec{v}$ del satélite como función de la distancia al centro de la Tierra?

a) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Podemos escribir todo en cartesianas



$\cos\alpha = \frac{x}{6R}$ $\quad$ $\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{6R}$

$\vec{r} = -6R\cos\alpha\,\hat{x} - 6R\operatorname{sen}\alpha\,\hat{y}$

$\vec{p} = mV_0\,\hat{x}$

$$\vec{L} = (-6R\cos\alpha\,\hat{x} - 6R\operatorname{sen}\alpha\,\hat{y}) \times mV_0\,\hat{x}$$

$$= -6R\operatorname{sen}\alpha\, m\, v_0\, (\underbrace{\hat{y} \times \hat{x}}_{-\hat{z}}) = 6R\operatorname{sen}\alpha\, mV_0\,\hat{z}$$

$$\boxed{L = 6R\operatorname{sen}\alpha\, m\, v_0.}$$

También se conserva la energía mecánica:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + U(6R) = \boxed{\frac{m v_0^2}{2} - \frac{GMm}{6R}} = \text{cte.}$$

b) Potencial efectivo $U_{ef}(r)$

$$U_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{[6R\operatorname{sen}\alpha\, m\, v_0]^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

¿Tipo de órbita? Necesitamos evaluar el signo de

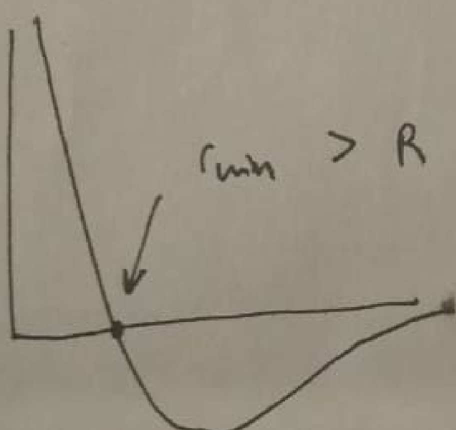
[redacted] $E = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{GMm}{6R}$

5

$v_0^2 = \frac{GM}{3R}$ $E = \frac{\cancel{m}GM}{6R} - \frac{GMm}{6R} = 0$

$E = 0 \rightarrow$ tengo un movimiento parabólico

¿Para qué valores de α no choca con la superficie?



$r_{min} > R$ para que no choque contra la superficie.

r_{min} sale de plantear $U_{ef}(r) = 0$.

$\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = 0$ $\frac{L^2}{2mr^{\cancel{2}}} = \frac{GMm}{\cancel{r}}$

$r = \frac{L^2}{2mGMm} = \frac{L^2}{2GMm^2}$

La condición es $\frac{L^2}{2GMm^2} > R$

$\frac{[6R \operatorname{sen}\alpha \, m v_0]^2}{2GMm^2} > R$ $\Bigg] \frac{\cancel{36}^{18} R^2 \operatorname{sen}^2\alpha \, \cancel{m^2} v_0^2}{\cancel{2} G M \cancel{m^2}} = \frac{18 R^2 \operatorname{sen}^2\alpha \, v_0^2}{GM} > R$

$$\frac{\cancel{48}\,\cancel{R}^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{\cancel{GM}} \frac{\cancel{GM}}{3\cancel{R}} > \cancel{8}\ 1$$

$$6 \operatorname{sen}^2\alpha > 1$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha > 1/6 \qquad \operatorname{sen}\alpha > \frac{1}{\sqrt{6}}$$

---

c) Si $\alpha = \pi/4$, calcular comp. tangencial y radial de la velocidad.

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{ef}(r) = 0$$

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{GMm}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$|\dot{r}| = \sqrt{\frac{2GMm}{r} - \frac{L^2}{mr^2}}$$

$$\dot{\theta} = \frac{L^2}{mr^2} \Rightarrow \text{v. tangencial} = \boxed{r\dot{\theta} = \frac{L^2}{mr}}$$