Momento lineal.

<u>Idea</u>: Si encontramos cantidades que se conserven en un movimiento, entonces es más fácil encontrar relaciones entre el estado del sistema entre tiempos distintos

Definimos "momento lineal" ó "impulso lineal" ó "cantidad de movimiento" como

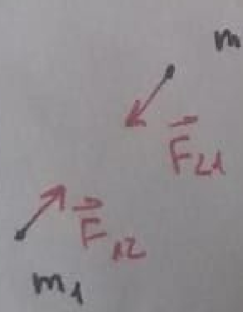
$$\vec{p} = m\vec{v}$$ "masa en movimiento"

Suponemos que $m = cte.$ Luego,

$$\dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}.$$

Por lo tanto (2da ley de Newton) $\boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{F}}$ $(m = cte)$

Suponemos que tenemos dos partículas m_1, m_2,



Si $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ (3era ley de Newton)

$$\vec{P}_{TOT} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad \dot{\vec{P}}_{TOT} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0.$$

3era ley de Newton $\Rightarrow \dot{\vec{P}}_{TOT} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{TOT} = cte$

Si $\vec{P}_{TOT} = cte \Rightarrow \dot{\vec{P}}_{TOT} = 0 = -\underbrace{\dot{\vec{p}}_1}_{F_{12}} = \underbrace{\dot{\vec{p}}_2}_{F_{21}}$

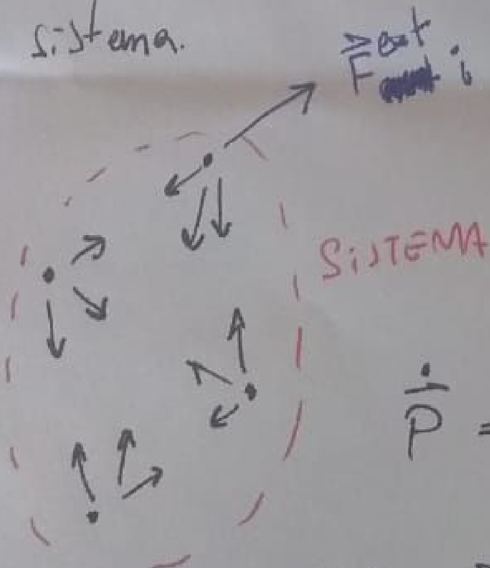
$\Rightarrow$ vale 3era ley de Newton

En resumen, si defino $\vec{P}_{TOT} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ partículas que sólo interactúan entre sí $\Rightarrow$

$$\boxed{\text{3ª ley de Newton} \Leftrightarrow \dot{\vec{P}}_{TOT} = 0}$$

Supongamos que tenemos N partículas que forman nuestro SISTEMA.

Una fuerza se dice EXTERNA al SISTEMA si o por no actúa sobre una partícula del sistema.



$$\vec{P}_{TOT} = \vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} p_i$$

dejo el "TOT" y uso mayúscula

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{p}_i = \dot{p}_1 + \dot{p}_2 + \dots + \dot{p}_N$$

$$= \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \dots\right) + \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} + \dots\right)$$

$$+ \left(\vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{N3} + \dots\right) + \vec{F}^{ext}_1 + \vec{F}^{ext}_2 + \vec{F}^{ext}_3 \dots + \vec{F}^{ext}_N$$

$$= \overset{=0}{\left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}\right)} + \overset{=0}{\left(\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}\right)} + \dots + \overset{=0}{\left(\vec{F}_{1N} + \vec{F}_{N1}\right)} + \sum_i \vec{F}^{ext}_i$$

$$= \vec{F}^{ext}$$

Entonces, dado un sistema de N partículas que interactúan, $\boxed{\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext}}$ donde $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ $\vec{F}^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext}$

Ahora, vamos a demostrar que vale la ecuación

$$\boxed{\vec{F}^{ext} = M\ddot{\vec{R}}} \quad \text{con} \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \text{ (masa total)}$$

donde $\vec{R}$ es un punto del espacio (¡no necesariamente tiene que haber una partícula ahí!)

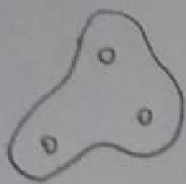
Dicho de otra forma, $\vec{R}$ se mueve como una partícula que concentra toda la masa del sistema, y sobre la cual actúan todas las fuerzas externas al sistema.

$$\vec{R} = \vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$. Luego,

$$\dot{\vec{R}} = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}^{\vec{P}}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{M}} \Rightarrow \vec{P} = M\dot{\vec{R}}$$

$$\boxed{\vec{F}^{ext} = \dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}}}$$

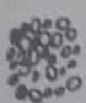
¡Eso quiere decir que puedo reemplazar los detalles del movimiento de un sistema de partículas por el movimiento de una sola partícula!



quarks formando un protón

zoom out

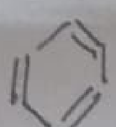
p^+



protones y neutrones en un núcleo

zoom out

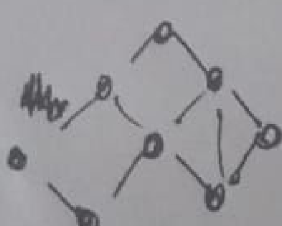
Uranio-235



núcleos en una molécula

zoom out

C_6H_6 (molécula)



moléculas en un material

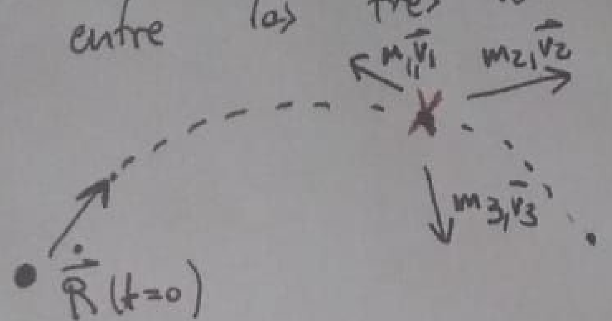
zoom out

(pelota)

zoom out

Esto me permite resolver un problema complicado en uno más fácil cambiando de escala

Supongamos que tiro una granada y explota en tres pedazos diferentes. ¿Cuál es la relación entre las tres velocidades?



$$\vec F^{ext} = M\ddot{\vec R}$$

$$-\cancel{M}g\,\hat y = \cancel{M}\ddot{\vec R} \rightarrow \text{Tiro oblicuo}$$

$$\ddot{\vec R} = -g\,\hat y$$

Todas las fuerzas que causan la explosión son $\boxed{\text{internas}}$. Eso quiere decir que sigue valiendo

$\vec F^{ext} = -Mg\,\hat y$. Y por lo tanto,

el centro de masa se sigue moviendo con la misma trayectoria (como si no hubiese habido explosión).

t_i = tiempo de inicio de la explosión

t_f = tiempo final de la explosión

$$\vec P_{inicial} = \vec P(t=t_i) = M\dot{\vec R}(t=t_i)$$

$$\vec P_{final} = \vec P(t=t_f) = M\ddot{\vec R}(t=t_f)$$

Ahora, $\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}_{final} - \vec{P}_{inicial}}{t_f - t_i} \approx \dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext} \neq 0$

$\Delta t \to 0$

$$\vec{P}_{final} - \vec{P}_{inicial} \approx \underbrace{(t_f - t_i)}_{\to 0} \vec{F}^{ext}$$

(pues en una explosión $t_f \approx t_i$)

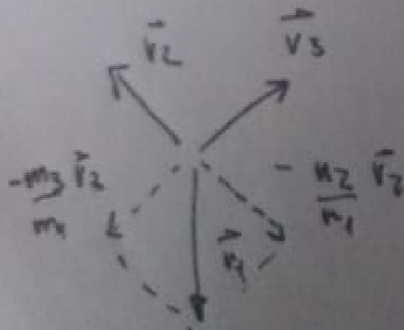
$\Rightarrow \vec{P}_{final} \approx \vec{P}_{inicial}$

Dicho de otra forma, $\vec{P}$ no se conserva porque no hay $\vec{F}^{ext}$, sino porque hay $\vec{F}^{ext}$ pero actúan sobre Δt muy muy corto (¡explosión!).

$$\vec{P}_{inicial} = M\dot{\vec{R}}(t=0) = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3$$

Por ejemplo, $\vec{v}_1 = \frac{\vec{P}_{inicial} - m_2 \vec{v}_2 - m_3 \vec{v}_3}{m_1}$.

Supongamos $\vec{P}_{inicial} = 0$ (reposo). Entonces $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ están en el mismo plano



Notar que lo mismo vale para el problema en que tres masas colisionan para formar una única masa

$t = 0 - t_f$

Impulso

Sabemos que $\dot{P} = F^{ext}$ $\quad \frac{dP}{dt} = F^{ext}(t)$

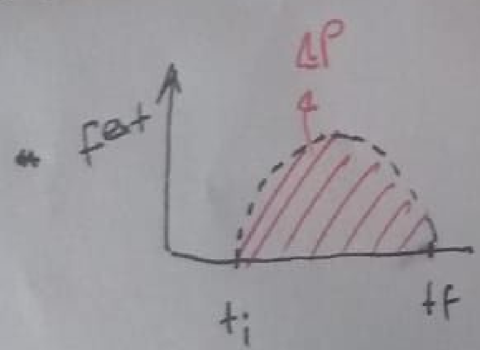
$$\int_{P_{inicial}}^{P_{final}} dP = \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} F^{ext}(t)\,dt}_{\text{Impulso}}$$

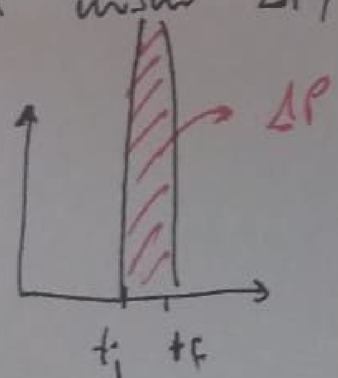
$$P_{final} - P_{inicial} = \Delta P$$

$$\Delta P = \int_{t_i}^{t_f} F^{ext}(t)\,dt$$

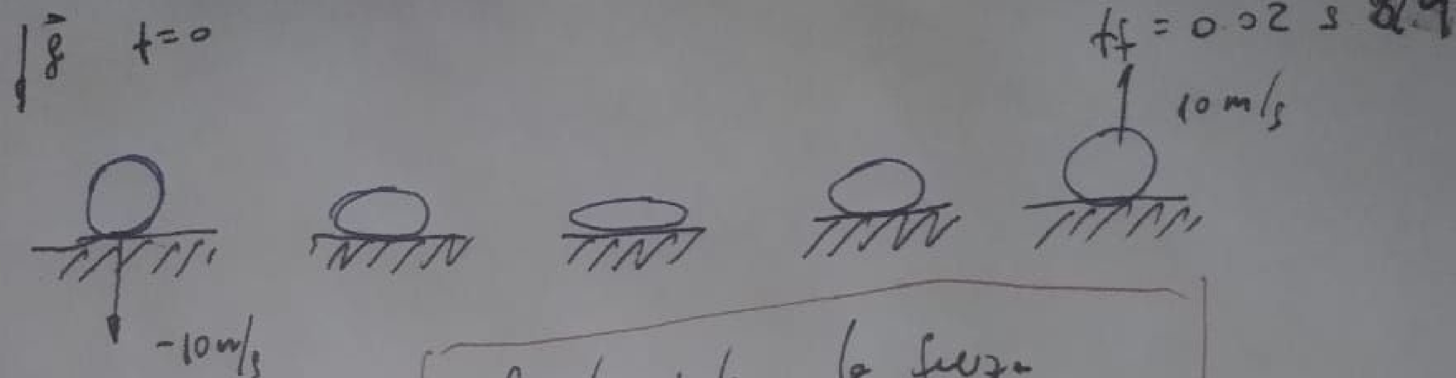
El impulso me determina el cambio de P.

Tengo diferentes posibilidades dependiendo de cuanto dure la interacción para un mismo ΔP,





En un choque siempre es mejor maximizar la duración para sobrevivir (porque eso disminuye la fuerza máxima experimentada durante el choque)



¿Cuánto vale la fuerza promedio de la normal sobre la pelota?

$$\vec{P}_{inicial} = 1\,kg \times \left(-10\,\frac{m}{s}\,\hat{y}\right) = -10\,kg\,\frac{m}{s}\,\hat{y}$$

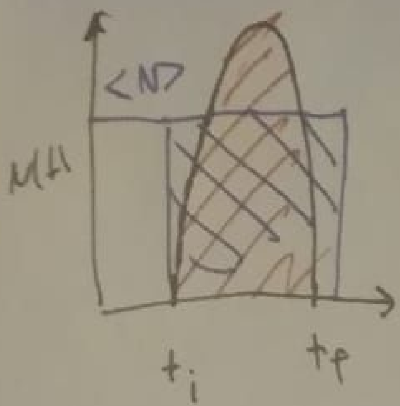
$$\vec{P}_{final} = 1\,kg \times \left(10\,\frac{m}{s}\,\hat{y}\right) = 10\,kg\,\frac{m}{s}\,\hat{y}$$

$$\Delta\vec{P} = 20\,kg\,\frac{m}{s}\,\hat{y}$$

$$\Delta\vec{P} = 20\,kg\,\frac{m}{s}\,\hat{y} = \int_0^{0.02\,s} \vec{F}^{ext}(t)\,dt = \int_0^{0.02\,s} (N(t) - mg)\,dt\,\hat{y}$$

$$20\,kg\,\frac{m}{s} = \int_0^{0.02\,s} N(t) - \underbrace{mg\,dt}_{mg \times 0.02\,s}$$

$$20\,kg\,\frac{m}{s} + \underbrace{mg \times 0.02\,s}_{\approx 0.2\,kg\,\frac{m}{s}\ (\approx 0)} = \int_0^{0.02\,s} N(t)\,dt$$



$$\int_0^{0.02\,s} N(t)\,dt = \langle N \rangle\, 0.02\,s$$

$$20.2\ kg\ \frac{m}{s} = \langle N \rangle\, 0.02\ s.$$

$$\Rightarrow \langle N \rangle = 1010\ N$$

(¡Equivalente a la fuerza peso de una masa de 100 kg!)