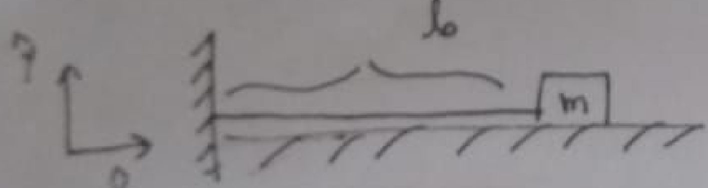
Movimiento oscilatorio (clase 1)

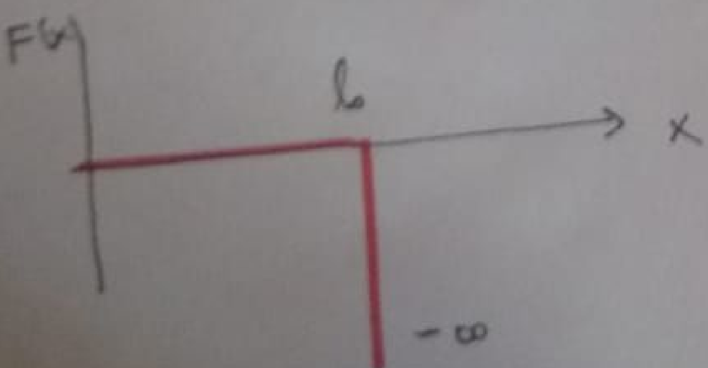
En las clases anteriores introdujimos vínculos por medio de sogas. Vimos que la tensión de una soga sin masa es la misma en todos los puntos de la soga

Ahora vamos a preocuparnos por el caso de sogas extensibles. Eso nos va a llevar a estudiar el oscilador armónico simple, uno de los sistemas físicos más importantes.

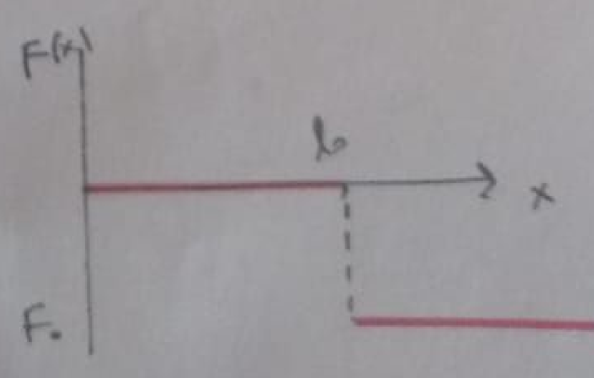
Consideremos una masa m unida a una soga:



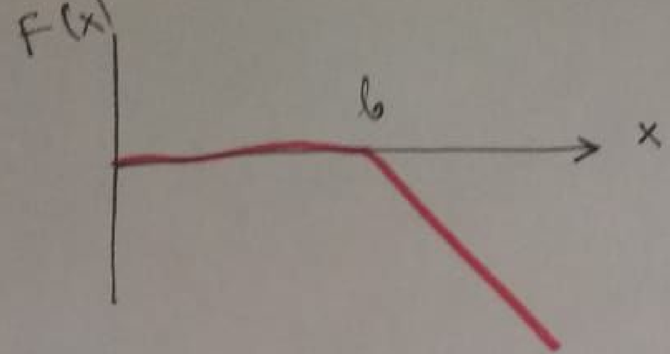
Si la soga es inextensible, entonces cuando la masa m intenta cruzar $x = l_0$, una fuerza infinita lo impide



Otra opción es considerar una fuerza constante que no depende de qué tan estirada está la soga



En realidad, más estiramos de la soga, mayor es la fuerza que esperamos:



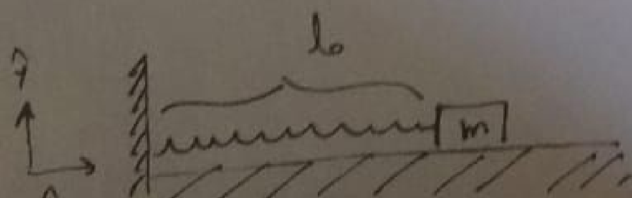
Esta función indica que la soga solo hace fuerza si está estirada ($x > l_0$) y esa fuerza aumenta con el estiramiento

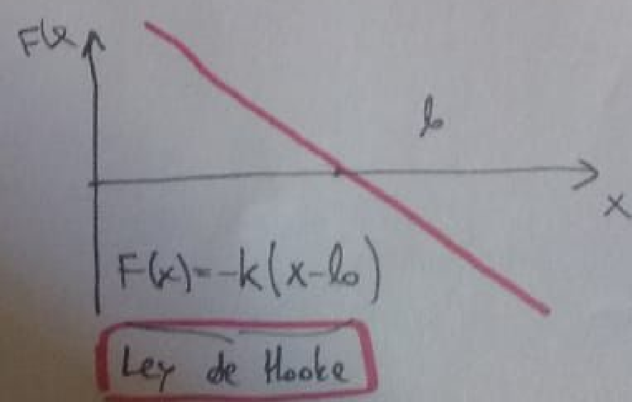
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < l_0 \\ -k(x - l_0) & \text{si } x \geq l_0 \end{cases}$$

↑ función lineal por ser la más simple

A mayor k, mayor la pendiente, y por lo tanto más "dura" es la soga. **En el caso $k \to \infty$ tenemos una soga inextensible.**

Si bien podríamos analizar el movimiento de una masa sujeta a la fuerza F(x), matemáticamente no sería cómodo por la discontinuidad en $x = l_0$.
Por lo tanto, vamos a considerar una fuerza idéntica pero también capaz de empujar, es decir, de tener $F(x) > 0$ si $x < l_0$. Este sistema es un resorte:

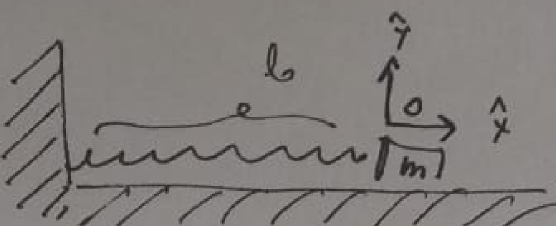




$\boxed{\text{Ley de Hooke}}$

Si queremos encontrar $x(t)$, tenemos que plantear Newton, $m\ddot{x}(t) = -k(x(t) - l_0)$ ⊛

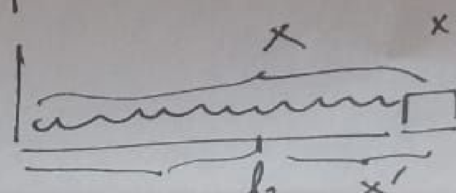
Notemos que l_0 es la distancia del extremo libre respecto de la pared. Si cambiamos el origen,



Entonces medimos $x'(t)$ desde el punto de equilibrio del resorte. Dicho de otra forma, hacemos

$x = x' + l_0$

$$x' = x + l_0$$



y reemplazando en la ecuación

⊛ $m\ddot{x}'(t) = -kx'(t)$.

A partir de ahora $x' = x$ y dejamos de escribir la dependencia temporal de forma explícita,

$$m\ddot{x} = -kx \quad , \text{ ó bien}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

→ ecuación diferencial del oscilador armónico simple

Esta es una ecuación diferencial donde la incógnita es la función $x(t)$. Buscamos encontrar una función $x(t)$ tal que al derivarla dos veces y sumarle $\frac{k}{m}$ por ella misma, el resultado sea 0.

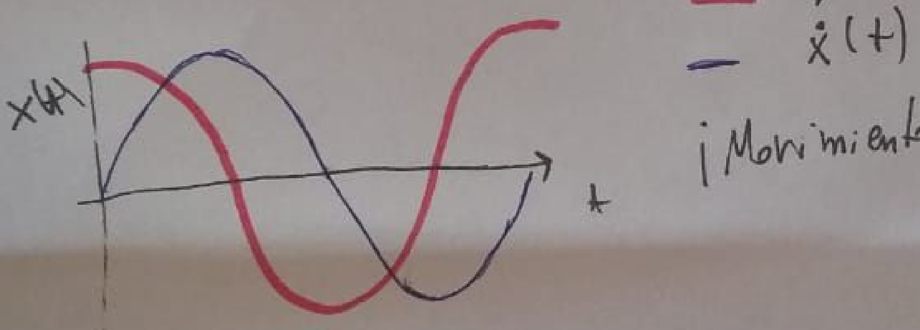
Esta ecuación es de 2do orden (aparece hasta la segunda derivada) y lineal.

Vamos a resolver la ecuación, pero antes vamos a intentar averiguar el aspecto de la solución.

$m\ddot{x} = -kx.$ Supongamos que el resorte está inicialmente desplazado a la derecha ($x>0$)

Entonces $\ddot{x} < 0$.

Como $\ddot{x} < 0$, acelera desde $v(t=0)$ hasta un valor máximo en $x=0$. Cuando $x<0$, $\ddot{x}>0$. Como la velocidad es de signo negativo, el movimiento se frena. Entonces, se repite el proceso pero en el sentido opuesto.



¡Movimiento oscilatorio!

Ahora sí busquemos una solución.

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \dot{x}\,d\dot{x} = -\frac{k}{m}x\,dx$$

Integrando de ambos lados,

$$\int_{v_0}^{\dot{x}} \dot{x}\,d\dot{x} = \int_{x_0}^{x} -\frac{k}{m}x\,dx \Rightarrow \left.\frac{\dot{x}^2}{2}\right|_{v_0}^{\dot{x}} = -\frac{k}{m}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x_0^2}{2}\right)$$

$$\dot{x}^2 - v_0^2 = -\frac{k}{m}x^2 + \frac{k}{m}x_0^2.$$

En esta ecuación puedo despejar $\dot{x}(x)$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}x_0^2 - \frac{k}{m}x^2 + v_0^2} \quad \text{o bien,} \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}x_0^2 - \frac{k}{m}x^2 + v_0^2}}$$

Puedo reordenar de la siguiente manera,

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}\left[x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2\right] - \frac{k}{m}x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\underbrace{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}_{= A^2} - x^2}}$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}}.$$ Ahora integro respecto de t y x,

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) = \arcsin\left(\frac{x}{A}\right)\Bigg|_{x_0}^{x}$$

Tabla de integrales

$$= \arcsin\left(\frac{x}{A}\right) - \arcsin\left(\frac{x_0}{A}\right)$$

Entonces despejo $x(t)$,

$$x(t) = A \operatorname{sen}\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + \arcsin\left(\frac{x_0}{A}\right)\right]$$

$$\text{donde } A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}$$

observemos que $\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\right] = [T]^{-1}$. Por lo tanto defino la frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y llego a

$$\boxed{x(t) = A \operatorname{sen}(\omega(t - t_0) + \varphi) \quad \text{con} \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{x_0}{A}\right) \quad \text{y} \quad A = \sqrt{\frac{\omega^2 x_0^2 + v_0^2}{\omega^2}}}$$

Esta solución tiene que cumplir con las C.I.,

$$x(t_0) = A\,\text{sen}\left(\text{arcsen}\left(\frac{x}{A}\right)\right) = A\frac{x_0}{A} = x_0.$$

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos\left[\omega(t-t_0) + \text{arcsen}\left(\frac{x_0}{A}\right)\right]$$

$$\dot{x}(t_0) = A\omega\cos\left(\text{arcsen}\left(\frac{x_0}{A}\right)\right)$$

¿cómo es $\cos(\overbrace{\text{arcsen}(x)}^{\alpha})$?

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Entonces,

$$\dot{x}(t) = A\cdot\omega\cdot\sqrt{1-\frac{x_0^2}{A^2}} = \omega\sqrt{A^2\left(1-\frac{x_0^2}{A^2}\right)} = \omega\sqrt{A^2-x_0^2}.$$

$$= \omega\sqrt{\frac{\omega^2x_0^2+v_0^2}{\omega^2} - x_0^2} = \omega\sqrt{\frac{\omega^2x_0^2+v_0^2-x_0^2\omega^2}{\omega^2}} = \frac{\cancel{\omega}v_0}{\cancel{\omega}} = v_0.$$

Como $A = cte$, $\text{arcsen}\left(\frac{x_0}{A}\right) = \underset{\varphi}{\underset{\parallel}{cte.}}$ y entonces la solución se escribe,

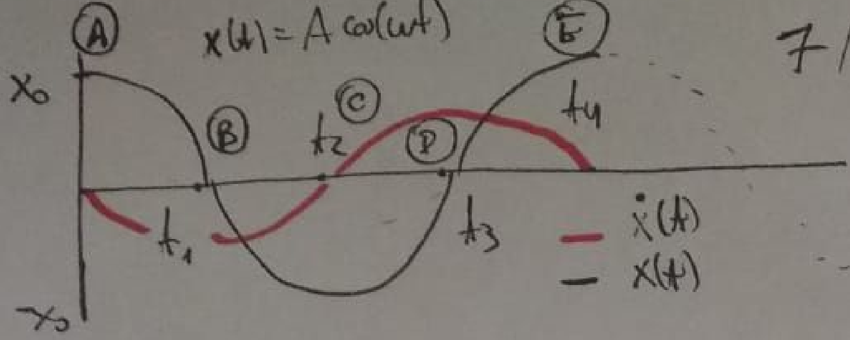
$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega(t-t_0)+\varphi) \quad \text{con } A, \varphi = cte.$$

$\left.\begin{array}{l} A = \text{"amplitud"} \\ \varphi = \text{"fase".} \end{array}\right\}$ Si conozco x_0, v_0 puedo encontrar A, φ de $x(t_0)=x_0$, $\dot{x}(t_0)=v_0$.

— Caso particular: [redacted] masa quieta en resorte estirado ($t_0=0$)

$\left.\begin{array}{l} x(0) = A\,\text{sen}\,\varphi = x_0 \\ \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t+\varphi) \\ \dot{x}(0) = A\omega\cos\varphi \end{array}\right\}$ Si no me [redacted] acuerdo de memoria $A(x_0,v_0)$, $\varphi(x_0,v_0)$ puedo despejar de estas ecuaciones

$\varphi = \frac{\pi}{2}$, $A = x_0$



$$\omega t_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$$

$$\omega t_2 = \pi \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow t_3 = \frac{3\pi}{2\omega}$$

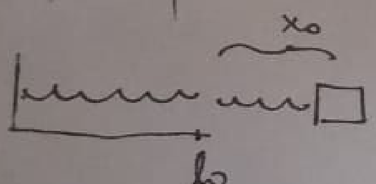
$$\omega t_4 = 2\pi \Rightarrow t_4 = \boxed{\frac{2\pi}{\omega}}$$

T = periodo

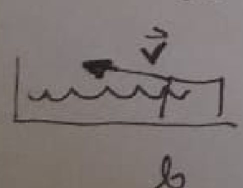
Observemos que $T = \frac{2\pi}{\omega}$ el periodo, no depende de las condiciones iniciales, únicamente de k y m.

Como $\dot{x}(t) = A\omega\, \text{sen}\,\omega t$, hago el gráfico ROJO para la velocidad

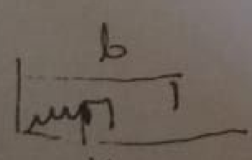
Veamos qué pasa en los puntos A, B, C, D, E

A 

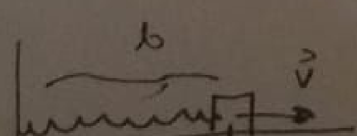
parte con $v_0 = 0$

B 

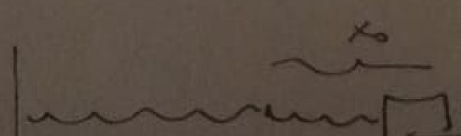
$\vec{v}$ es máxima en dirección de x negativos

C 

el resorte llegó a su máxima compresión y está quieto.

D 

el resorte tiene $\vec{v}$ máxima en $\hat{x}$ positivo.

E 

Volvemos a la posición inicial del bloque

Ahora vamos a ver algunas propiedades que cumplen todas las ecuaciones diferenciales lineales,

tales como $\ddot{x} + w^2 x = 0$.

- Como es una ecuación de segundo orden, las soluciones dependen de dos constantes a determinar con las condiciones iniciales. (si fuese de orden N, habría N constantes).

- Si x_1, x_2 son soluciones, su suma lo es,

pues $\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2} + w^2(x_1+x_2) = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} + w^2x_1 + w^2x_2$

$= \underbrace{\left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + w^2x_1\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{d^2x_2}{dt^2} + w^2x_2\right)}_{=0} = 0$

- Consideremos

$x_1(t) = A\cos(wt)$, $x_2(t) = B\,\mathrm{sen}(wt)$.

Verificamos que x_1 y x_2 son soluciones,

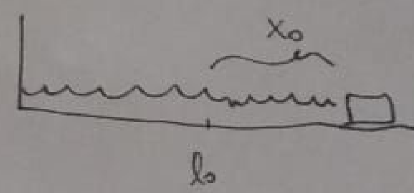
Para x_1, $-Aw^2\cos(wt) + w^2A\cos(wt) = 0$

Para x_2, $-Aw^2\,\mathrm{sen}(wt) + w^2A\,\mathrm{sen}(wt) = 0$

- Entonces, $\boxed{x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(wt) + B\,\mathrm{sen}(wt)}$ es una solución. Como tiene dos constantes, es una solución general, equivalente a $x(t) = A\cos(wt+\varphi)$ o bien a $x(t) = A\,\mathrm{sen}(wt+\varphi)$

Si bien las ecuaciones se ven diferentes, puedo plantear las condiciones iniciales de forma de obtener constantes para que las soluciones queden iguales.

Por ejemplo, vimos que la solución de $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ era $x(t) = X_0 \cos(\omega t)$.



Si parto de la solución general

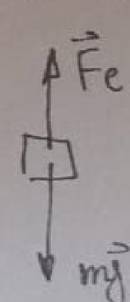
$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

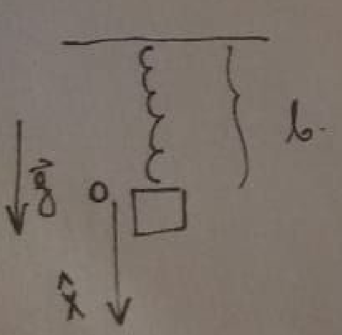
llego al mismo resultado, pues

$$x(0) = A = x_0 \qquad \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

$$\dot{x}(0) = B\omega = 0 \Rightarrow B = 0$$

Supongamos que tengo un cuerpo colgado de un resorte de constante k, y longitud libre l_0,





Entonces,

$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

o bien,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g$$

Esta es una ecuación inhomogénea pues está igualada a una constante. Decimos que $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ es su ecuación homogénea asociada.

¿Cómo hacemos para resolver $\ddot{x} + \omega^2 x = g$?

La forma en que resolvemos una ecuación inhomogénea es siempre la misma.

Supongamos que ya resolvimos la ecuación homogénea asociada. En este caso, ya resolvimos $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ y sabemos que una solución general del sistema homogéneo se puede escribir como $x_h(t) = A\cos(\omega t) + B\,\text{sen}(\omega t)$

Ahora supongamos que encontramos <u>una</u> solución del sistema inhomogéneo, $x_i(t)$.

Entonces todas las soluciones posibles del sistema inhomogéneo se escriben como $x(t) = x_h(t) + x_i(t)$

En este caso, nos faltaría encontrar $x_i(t)$.

Esto es muy fácil con una solución constante, $x_i(t) = \frac{g}{\omega^2}$

pues $\underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{g}{\omega^2}\right)}_{=0} + \omega^2 \frac{g}{\omega^2} = g$.

Entonces, la solución más general posible es,

$$x(t) = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

y ahora encuentro A, B por condiciones iniciales

Observación importante:

$\boxed{\text{PRIMERO}}$ escribimos $x(t) = x_i(t) + x_h(t)$ y

$\boxed{\text{DESPUÉS}}$ hacemos $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ para encontrar las constantes en $x_h(t)$.

NUNCA encontramos las constantes en $x_h(t)$ y después armamos $x(t) = x_i(t) + x_h(t)$.

En este caso, $x(0) = A + \frac{g}{\omega^2} = 0 \Rightarrow A = -\frac{g}{\omega^2}$

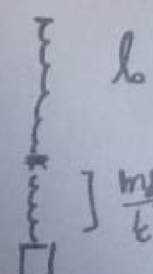
$$\dot{x}(t) = -A\omega \,\text{sen}\,\omega t + B\omega \cos\omega t = \frac{g}{\omega^2}\omega \,\text{sen}\,\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$\dot{x}(0) = B\omega = 0 \Rightarrow B = 0$$

La solución es $x(t) = -\frac{g}{\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}$

Notemos que otra forma de proceder era poner el origen en el punto de equilibrio, y en ese caso la ecuación quedaba homogénea.

Busco x_{eq}, $0 = -kx + mg \Rightarrow x = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega^2}$



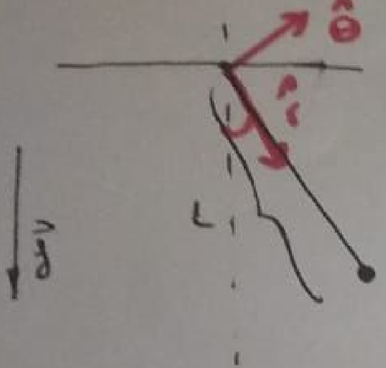
Entonces quiero usar [redacted] $x = x' + \frac{g}{\omega^2}$

o sea $x' = x - \frac{g}{\omega^2}$, llegando a

$$\ddot{x}' + \omega^2\left(x' + \frac{g}{\omega^2}\right) = g \qquad \ddot{x}' + \omega^2 x' + \cancel{g} = \cancel{g}\; 0$$

$$\ddot{x}' + \omega^2 x' = 0.$$

Finalmente, ¡el péndulo!



Vamos a usar polares.

Después de hacer DCL llegamos a

$\hat{r}: m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta - T$

$\hat{\theta}: m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -mg\,\text{sen}\,\theta$

Con las condiciones de vínculo $r = L$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\hat{r}: -mL\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \rightarrow$ Me determina T

$\hat{\theta}: mL\ddot{\theta} = -mg\,\text{sen}\,\theta \rightarrow$ Si la resuelvo, tengo $\theta(t)$

La ecuación para $\hat{\theta}$ es,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\,\text{sen}\,\theta = 0.$$

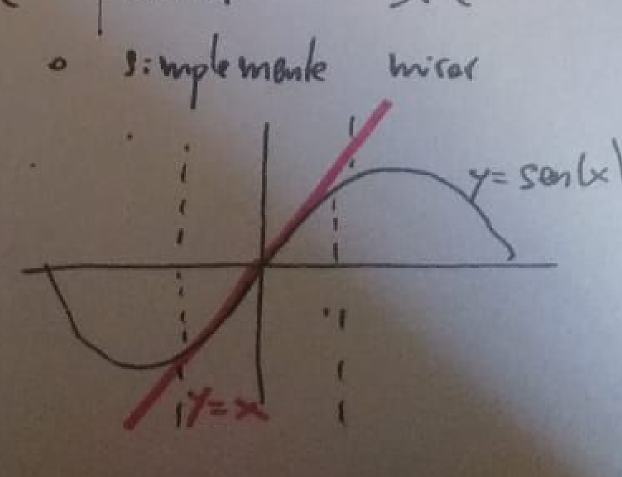
Es decir, busco $\theta(t)$ tal que metiéndola en esta ecuación de 0.

El problema es que no sé resolver esta ecuación diferencial. La que sí se resolver es $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

Pero está todo o.k. pues si $\theta \approx 0$,

$\text{sen}\,\theta \approx \theta$. Esto sale de plantear la serie de Taylor o simplemente mirar el gráfico.

entre las líneas punteadas es buena aproximación $\leftarrow$



Entonces, $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\,\text{sen}\,\theta \approx \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

Esta ecuación ya la sé resolver, pongo $\omega^2 = \frac{g}{L}$ y

$$\theta(t) = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t.$$

Pero, esta solución únicamente es válida para θ pequeño.

¿Qué tan bien funciona la aproximación?

Si $L = 1\ m$, $g = 9.8\ m/s^2$, $\dot{\theta}_0 = 10°$, $\dot{\theta}_0 = 0$

$T_{real} = 2.0102\ldots$ s. $T_{aprox} = 2.0064\ldots$ s.

Pero para ángulos grandes deja de ser buena aproximación, y el período empieza a depender de las condiciones iniciales, algo que no sucedía con el oscilador armónico.