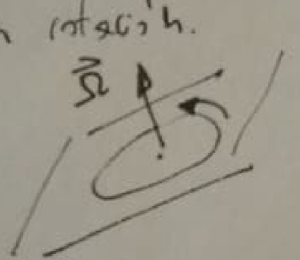
Sistemas no inerciales en rotación

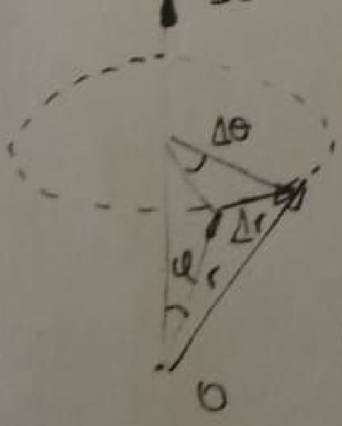
Podemos representar la velocidad angular Ω como un vector, donde su magnitud indica $\frac{d\theta}{dt}$ y su dirección indica la normal del plano que contiene a la rotación.

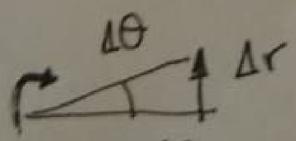


Notamos que hubiese sido válido poner a $\vec{\Omega}$ en la otra dirección.

Pero lo ponemos de acuerdo a la "regla de la mano derecha". Esta decisión arbitraria hace que $\vec{\Omega}$ sea un "pseudovector", con algunas propiedades diferentes a las usuales.

Consideremos un movimiento circular con velocidad angular $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$.





$$\text{sen}\,\Delta\theta = \frac{\Delta r}{r\,\text{sen}\,\varphi}$$

φ = ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{\Omega}$

$$\Delta r = r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\Delta\theta \approx r\,\text{sen}\,\varphi\,\Delta\theta$$

$$\frac{dr}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}\,\text{sen}\,\varphi = r\,\Omega\,\text{sen}\,\varphi$$

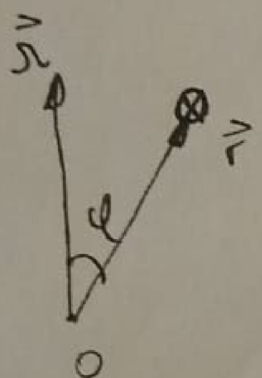
Además, $\vec{\Omega} \perp \vec{v}$ $\quad \vec{r} \perp \vec{v}$ $\Rightarrow \vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$

¿Por qué funciona definir $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$?

El módulo es correcto, pues $v = \Omega r \operatorname{sen} \varphi$

Además, así definido $\vec{v}$ es $\perp$ a ambos.

Por último, definimos $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ en vez de $\vec{r} \times \vec{\Omega}$ para que avance el movimiento de acuerdo a la regla de la mano derecha



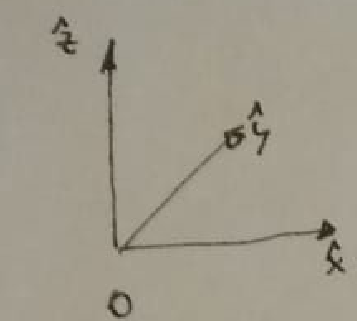
← $\vec{v}$ está hacia dentro de la hoja.

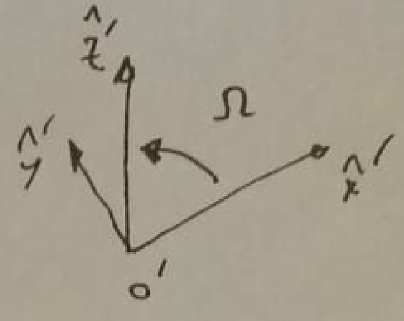
Supongamos que O es un S.I.
Definamos un sistema de coordenadas cartesianas con origen en O, y escribamos,

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}.$$

Ahora definamos otro sistema de coordenadas con origen en O, O', con versores $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$.

En este caso, $\hat{z}' = \hat{z}$, pero $\hat{x}', \hat{y}'$ rotan con velocidad angular Ω.

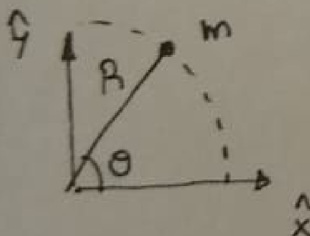




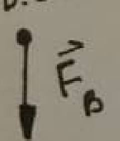
Podemos ver que O′ es un sistema de referencia no inercial y que necesitamos F^* fuerzas no inerciales para que la 2da ley de Newton funcione.

Ejemplo Una barra rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$, siempre apuntando en $\hat{x}'$, con una masa m en su punta.

Desde O.



D.C.L.



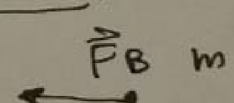
Como m rota, adopto polares y la 2da ley queda,

$$m(R\ddot{\theta} + \cancel{2\dot{R}\dot{\theta}}) = F_\theta = 0$$

$$m(\cancel{\ddot{R}} - R\dot{\theta}^2) = F_r = -F_B$$

$$m(-R\Omega^2) = -F_B \Rightarrow \boxed{F_B = mR\Omega^2}$$

Desde O′.



$$m\underbrace{\vec{a}'}_{=0} = -F_B\hat{x}'$$

(Pues O′ ve m en reposo)

La única forma en que O′ llegue al mismo resultado que O es sumando

$$F^* = mR\Omega^2\hat{x}'$$

("fuerza centrífuga")

¿Cuál es la diferencia entre O' y O?
¿Acaso los versores de polares no rotan también?

Rta: Sí, los versores de polares rotan, pero las coordenadas de polares describen una rotación en x, y, mientras que en O' no hay una rotación en x', y' = la mesa está quieta porque giramos con ella.

Dicho de otra forma,
En O con polares, $\vec{r} = R\hat{r}$ donde $\hat{r}$ rota visto desde O.
En O', $\vec{r}' = R\hat{x}'$, donde $\hat{x}'$ es constante visto desde O' (pero rota visto desde O)

Lo que hace que O' sea inercial no es escribir las coordenadas con vectores que rotan vistos desde O', sino hacerlo con vectores que están fijos vistos desde O', pero rotan vistos desde O (que es un S.I.)

Vamos a relacionar derivadas en O (inercial) y O' (rotante)

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{in} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$

También puedo escribir la posición $\vec{r}$ en el sistema de coordenadas O',

$$\vec{r} = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'$$

Notamos que desde O, $\hat{x}'(t)$, $\hat{y}'(t)$, $\hat{z}'(t)$.

Derivando $\vec{r}$ escrito en O'

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{in} = \underbrace{\frac{dx'}{dt}\hat{x}' + \frac{dy'}{dt}\hat{y}' + \frac{dz'}{dt}\hat{z}'}_{} + \underbrace{x'\frac{d\hat{x}'}{dt} + y'\frac{d\hat{y}'}{dt} + z'\frac{d\hat{z}'}{dt}}_{}$$

$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rot}$ = la derivada de $\vec{r}$ en el sistema rotante O'.

Esta parte la expreso como

Notar que no derivo los versores pues son constantes vistos desde O'

$$\ldots + x'(\vec{\Omega} \times \hat{x}') + y'(\vec{\Omega} \times \hat{y}') + z'(\vec{\Omega} \times \hat{z}')$$

$$= \vec{\Omega} \times (\underbrace{x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'})$$

Entonces $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ ⊛

$$\boxed{\vec{v}_{in} = \vec{v}_{rot} + \vec{\Omega} \times \vec{r}}$$

Ahora quiero derivar una vez más para obtener $\vec{a}_{in}$.

Ahora, veamos que la expresión ⊛ también vale para $\vec{v}$, o sea

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\Omega} \times \vec{v}.$$

Yo escribo $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$

$\vec{v} = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}'$

Cuando derivo, vuelvo a aplicar la regla del producto,

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{in} = \underbrace{\frac{d\dot{x}'}{dt}\hat{x}' + \frac{d\dot{y}'}{dt}\hat{y}' + \frac{d\dot{z}'}{dt}\hat{z}'}_{\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{rot}} + \underbrace{\dot{x}'\frac{d\hat{x}'}{dt} + \dot{y}\frac{d\hat{y}'}{dt} + \dot{z}\frac{d\hat{z}'}{dt}}$$

$$= \dot{x}'(\vec{\Omega} \times \hat{x}') + \dot{y}'(\vec{\Omega} \times \hat{y}') + \dot{z}'(\vec{\Omega} \times \hat{z}')$$

$$= \vec{\Omega} \times (\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}')$$

$$= \vec{\Omega} \times \vec{v}$$

Observar que la cuenta que hicimos vale en general para un vector cualquiera,

$$\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z} = B_x' \hat{x}' + B_y' \hat{y}' + B_z' \hat{z}'$$

Calculemos la aceleración,

$$\vec{a}_{in} = \left[\frac{d\vec{v}_{in}}{dt}\right]_{in} = \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{rot} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\right]_{in} =$$

$$= \left[\frac{d\vec{v}_{rot}}{dt}\right]_{rot} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_{rot} + \left[\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}\times\vec{r})\right]_{in}$$

$$= \vec{a}_{rot} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_{rot} + \underbrace{\left[\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}\times\vec{r})\right]_{rot}} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$

Asumimos que no hay aceleración angular

$$0 = \cancel{\left[\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right]_{rot}\times\vec{r}} + \vec{\Omega}\times\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_{rot}$$

$$= \vec{\Omega}\times\vec{v}_{rot}$$

$$\vec{a}_{in} = \vec{a}_{rot} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_{rot} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_{rot} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$

O bien,

$$\vec{a}_{rot} = \vec{a}_{in} - 2\vec{\Omega}\times\vec{v}_{rot} - \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$

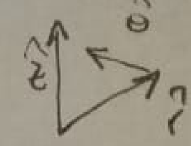
Multiplicando por m,

$$m\vec{a}_{rot} = \vec{F} \underbrace{\underbrace{- 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}_{rot}}_{①} \underbrace{- m(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}))}_{②}}_{F^{*}}$$

① Fuerza de Coriolis

② Fuerza Centrífuga

F. Centrífuga.



$$\vec{F}_{cent} = -m\,\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}).$$

Si la rotación ocurre en el plano x, y, entonces $\vec{r} = r\hat{r}$, por lo que

$$\vec{\Omega}\times\vec{r} = \Omega\hat{z}\times r\hat{r} = \Omega r(\hat{z}\times\hat{r}) = \Omega r\hat{\theta}$$

$$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = \Omega\hat{z}\times(\Omega r\hat{\theta}) = r\Omega^2(\hat{z}\times\hat{\theta}) = -r\Omega^2\hat{r}$$

Luego, $\vec{F}_{cent} = -m(-r\Omega^2\hat{r}) = \underline{m r\Omega^2\hat{r}}$

Apunta en la dirección radial.

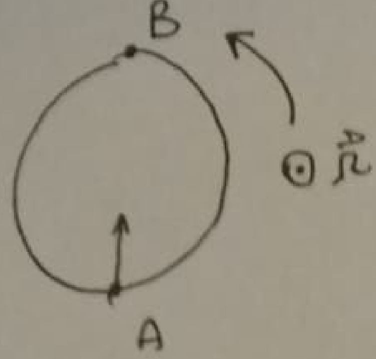
Interpretación. Cuando vemos una masa rotar en un M.C.U. desde O, necesitamos una fuerza centrípeta.

Desde O', esa fuerza centrípeta aparece descompensada en el D.C.L. por lo que necesitamos $\vec{F}_{cent}$ para que m esté en equilibrio desde O'.

F. Coriolis.

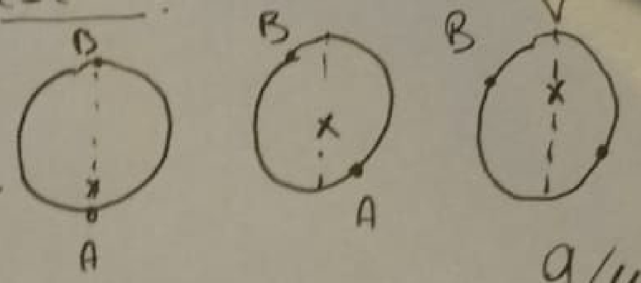
$$\vec{F}_{Cor} = -2m\,\vec{\Omega}\times\vec{v}_{rot}.$$

Si la rotación ocurre en el plano x, y, entonces $\vec{F}_{Cor}$ es un vector confinado al plano donde ocurre la rotación.



Desde O

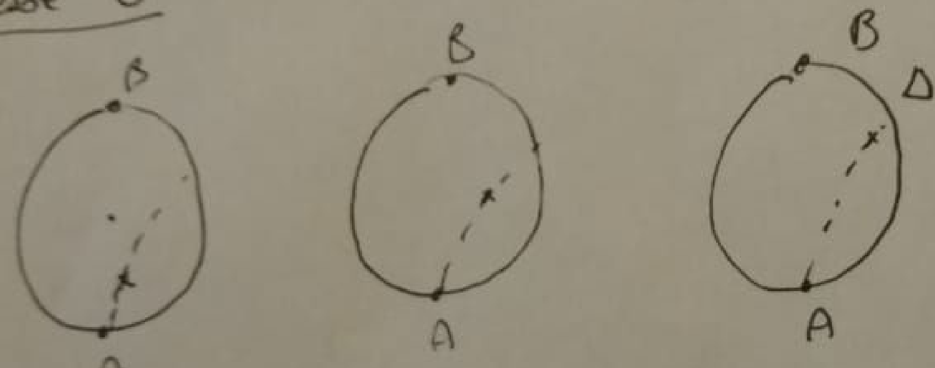
× pelota



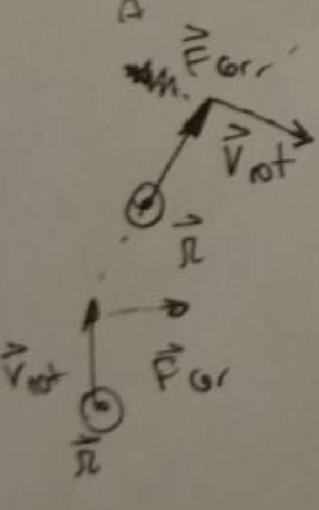
A le tira una pelota a B.

La pelota se mueve en una línea recta y termina llegando a un punto donde no está B.

Desde O'



Desde O', la pelota tampoco llega a B, pero su trayectoria se ve curvada

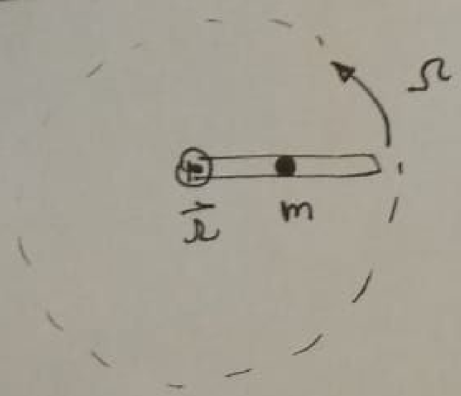


$\vec{F}_{cor}$ apunta inicialmente a la derecha, y es $\perp$ $\vec{v}_{rot}$.

Si únicamente hubiese $\vec{F}_{cor}$, entonces la curva sería un fragmento de circunferencia, y $v_{rot} = cte.$

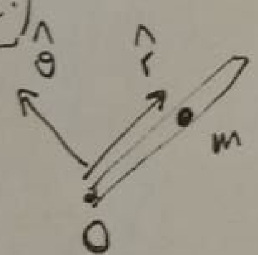
Pero $\vec{F}_{cent.}$ apunta en la dirección radial, de forma tal que $\vec{F}_{cor} + \vec{F}_{cent}$ no es $\perp$ $\vec{v}_{rot}$.

Ejemplo. Ejercicio 9, guía 5

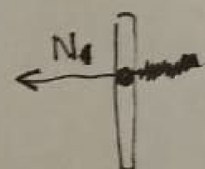


a) Calcule la aceleración de m respecto de un sistema inercial y respecto de un sistema fijo al tubo.

O, S.I.



D.C.L.



$F_r = 0 \quad F_\theta = N$

Entonces,

$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 0. \qquad \dot{\theta} = \Omega = cte$

$(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = N$

① $\ddot{r} - r\Omega^2 = 0.$

② $2m\dot{r}\,\Omega = N$

② A priori no nos sirve hasta que sepamos $r(t)$. usemos ①

① Es como una ecuación para el oscilador armónico pero con el signo al revés.

Si encuentro dos soluciones del homogéneo y las sumo, ya está.

$r_1(t) = Ae^{\Omega t}$

$\dot{r}_1(t) = A\Omega e^{\Omega t}$

$\ddot{r}_1(t) = A\Omega^2 e^{\Omega t}$

$A\Omega^2 e^{\Omega t} - \Omega^2 A e^{\Omega t} = 0$ ✓

$r_2(t) = Be^{-\Omega t}$

$\dot{r}_2(t) = -\Omega Be^{-\Omega t}$

$\ddot{r}_2(t) = \Omega^2 Be^{-\Omega t}$

$B\Omega^2 e^{-\Omega t} - \Omega^2 Be^{-\Omega t} = 0$ ✓

$r(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}$

con A, B cond. iniciales

Si parte del reposo a una distancia R del origen,

$2A = R \Rightarrow A = R/2 = B.$

$r(0) = A + B = R \rightsquigarrow$

$\dot r(0) = A\Omega - B\Omega = 0 \rightsquigarrow \boxed{A = B}$

Luego, $r(t) = R\left(\frac{e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}}{2}\right) = R\cosh(\Omega t).$

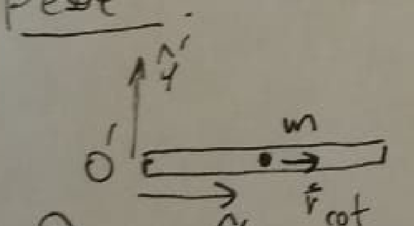
Verificar que $\frac{d\cosh x}{dx} = \operatorname{senh} x$ y $\frac{d \operatorname{senh} x}{dx} = \cosh x$

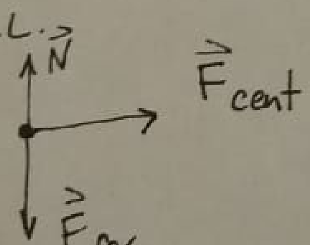
con $\operatorname{senh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

A partir de esto y (2) podemos calcular la normal,

$2m\dot r\,\Omega = 2m\Omega^2 R\operatorname{senh}(\Omega t) = N.$

Desde O'





$\vec v_{rot} = v_{rot}\,\hat x$

$\vec F_{cor} = -2m\Omega\,\hat z \times v_{rot}\hat x$

$= 2m\Omega v_{rot}(\hat z \times \hat x)$

$= -2m\Omega v_{rot}\,\hat y$

$\overset{-}{\underset{}{x}}\,y\,z\;\overset{+\,+\,+}{x\,y\,z}\;x\,y\,z \ldots$

$\hat x \times \hat y = \hat z$

$\hat x \times \hat z = -\hat y$

$\hat y \times \hat z = \hat x$

Usar $\vec a \times \vec a = 0$
$\vec a \times \vec b = -\vec b \times \vec a$

$m\ddot x = m\Omega^2 x$

$\ddot x - \Omega^2 x = 0$

$x(t) = R\left(\frac{e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}}{2}\right) = R\cosh(t)$

$N = 2m\Omega\,\dot x(t)$

$= 2m\Omega^2 R\operatorname{senh}(\Omega t)$

$\vec F_{cent} = -m(\vec\Omega \times (\vec\Omega \times \vec r))$

$\vec\Omega \times \vec r =$
$\Omega\,\hat z \times x'\hat x'$
$= \Omega x'\,\hat y$

$-m\Omega\,\hat z \times (\Omega x'\hat y)$

$= -m\Omega^2 x'(\hat z \times \hat y)$

$= m\Omega^2 x'\,\hat x'$