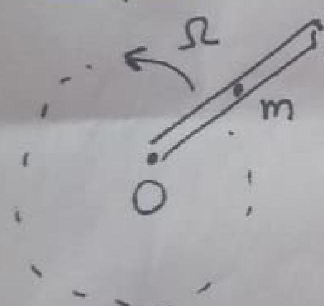
Sistemas no inerciales (3era clase)

La clase anterior vimos que para describir el movimiento en un S.N.I rotante con velocidad angular $\vec{\Omega}$ necesitábamos incorporar dos fuerzas no inerciales, o pseudo fuerzas $\vec{F}^*$.

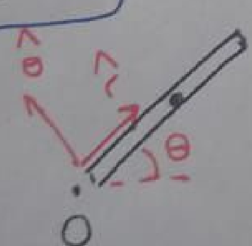
$$\boxed{\begin{aligned} \text{Fuerza centrífuga} &= \vec{F}_{cent} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \\ \text{Fuerza coriolis} &= \vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{V}_{rot} \end{aligned}}$$

Ejemplo (Ej. 9, guía 5)



Vamos a calcular las fuerzas, aceleraciones, y trayectoria de m desde O (S.I.) y O' (S.N.I).

Desde O,



D.C.L.

$F_r = 0 \quad F_\theta = N$

Planteando Newton, $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r = 0$

$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = N$

Pero $\dot{\theta} = \Omega = cte$,

① $\ddot{r} - r\Omega^2 = 0$

② $+2m\dot{r}\Omega = N$

La ecuación ② no nos sirve porque no conocemos N.

Resolvamos ①

$\ddot{r} - r\Omega^2 = 0$ (Idéntica a oscilador armónico, pero con un signo al revés)

- Ec. diferencial de orden 2.
- Ec. diferencial homogénea

$\Rightarrow$ $r_1(t)$ y $r_2(t)$ son soluciones distintas,

$r(t) = r_1(t) + r_2(t)$ es la solución general.

Probemos con $r_1(t) = Ae^{\Omega t}$ y $r_2(t) = Be^{-\Omega t}$

$\dot{r}_1(t) = A\Omega e^{\Omega t}$

$\ddot{r}_2(t) = A\Omega^2 e^{\Omega t}$

$\dot{r}_2(t) = -B\Omega e^{-\Omega t}$

$\ddot{r}_2(t) = B\Omega^2 e^{-\Omega t}$

$\ddot{r}_1 - \Omega^2 r_1 =$

$A\Omega^2 e^{\Omega t} - Ae^{\Omega t}\Omega^2 = 0$

$\ddot{r}_2 - \Omega^2 r_2 =$

$B\Omega^2 e^{-\Omega t} - Be^{-\Omega t}\Omega^2 = 0$

$\Rightarrow$ $r(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}$ es la solución que busco (A, B cond. iniciales)

Supongamos que m parte del reposo a una distancia r_0 del origen.

$r(0) = A + B = r_0$

$\dot{r}(0) = A\Omega - B\Omega = 0$

$\Rightarrow A = B$

$2A = r_0 \Rightarrow A = \frac{r_0}{2}$

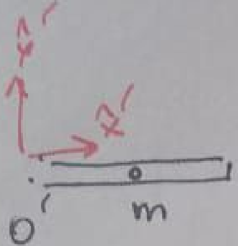
$\Rightarrow r(t) = r_0\left(\frac{e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}}{2}\right) = r_0 \cosh(\Omega t)$

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ con $\frac{d\cosh x}{dx} = \operatorname{senh} x$, $\frac{d \operatorname{senh} x}{dx} = \cosh x$

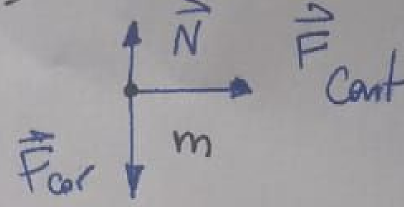
Entonces, podemos encontrar N(t) usando (2)

$$N(t) = +2m\Omega\,\dot{r}(t) = +2m\Omega^2 r_0 \operatorname{senh}(\Omega t)$$

$\boxed{\text{Desde } O'}$



D. C. L.



$\boxed{\text{Coriolis}}$

$$\vec{F}_{cor} = -2m\,\vec{\Omega}\times\vec{V}_{rot}$$

$$\vec{\Omega} = \Omega\hat{z} \qquad \vec{V}_{rot} = V_{rot}\,\hat{x}'$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{cor} = -2m\,\Omega\hat{z}\times V_{rot}\,\hat{x}' = -2m\Omega V_{rot}\underbrace{(\hat{z}\times\hat{x}')}_{\hat{y}'}$$

$$\vec{F}_{cor} = -2m\Omega\underbrace{V_{rot}}_{\dot{x}'}\hat{y}'$$

$\boxed{\text{Centrífuga}}$

$$\vec{F}_{Cent} = -m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')$$

$$\vec{\Omega}\times\vec{r}' = \Omega\hat{z}\times x'\hat{x}' = \Omega x'\hat{y}'$$

$$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = \Omega\hat{z}\times\Omega x'\hat{y}' = \Omega^2 x'(\hat{z}\times\hat{y}')$$

$$= -\Omega^2 x'\hat{x}'$$

$\Rightarrow$

$$\vec{F}_{cent} = m\Omega^2 x'\hat{x}'.$$

Ec. de Newton,

$$m\ddot{x}' = m\Omega^2 x'$$

$$m\ddot{y}' = 0 = N - 2m\Omega\dot{x}'$$

$$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$$

$$\hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$$

$$\hat{r}\times\hat{\theta} = \hat{z}$$

$$\hat{\theta}\times\hat{z} = \hat{r}$$

$$\hat{z}\times\hat{r} = \hat{\theta}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{a}\times\vec{a} = 0$$

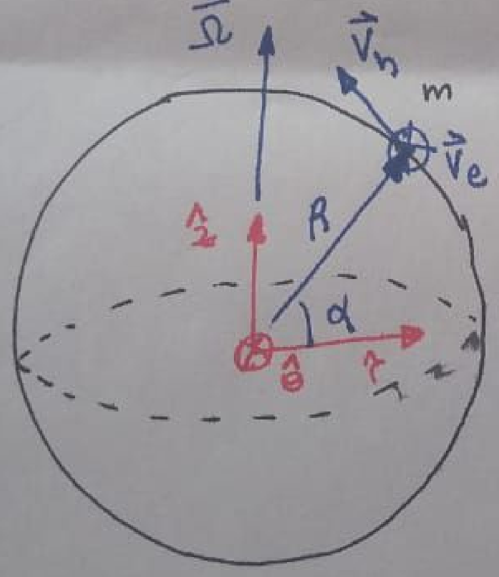
Llegamos a la misma ecuación para $\ddot{x}'$,

$\ddot{x}' - x'\Omega^2 = 0$ con solución $x'(t) = r_0 \cosh(\Omega t)$

$N(t) = 2m\Omega \dot{x}' = 2m\Omega^2 r_0 \operatorname{sen}(\Omega t)$

Es decir, llegamos a la misma $N(t)$ en ambos sistemas de referencia y a una descripción compatible del movimiento entre ambos.

La Tierra como un S.N.I en rotación



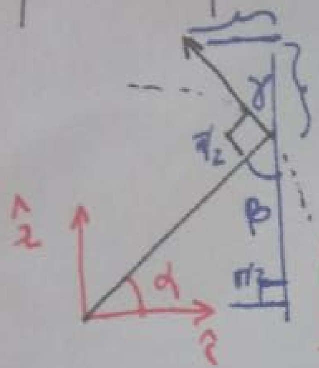
Consideremos un cuerpo de masa m con latitud α. $\vec{v}_n$ representa la componente NORTE de la vel. $\vec{v}_e$ representa la componente ESTE de la vel.

¿Cuánto valen $\vec{F}_{cent}$ y $\vec{F}_{cor}$?

Notamos que $\vec{v}_e$ y $\vec{v}_n$ no están en el sistema de coordenadas $\hat{z}, \hat{\theta}, \hat{r}$ por lo que nos conviene expresarlas en ese sistema.

Empecemos por $\vec{v}_h$

$$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=\pi \qquad \beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$



$$\beta+\frac{\pi}{2}+\gamma=\pi \qquad \frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}+\gamma=\pi$$

$$\boxed{\gamma=\alpha}$$

$$\boxed{\vec{V}_h=-V_h\operatorname{sen}\alpha\,\hat{r}+V_h\cos\alpha\,\hat{z}}$$

Para el caso de $\vec{v}_e$, tenemos simplemente que

$$\boxed{\vec{V}_e=V_e\,\hat{\theta}}$$

Además, $\boxed{\vec{r}\,'=R\cos\alpha\,\hat{r}+R\operatorname{sen}\alpha\,\hat{z}}$

Entonces, tengo todo lo necesario para calcular $\vec{F}_{cent}$ y $\vec{F}_{cor}$.

$$\hat{z}\times\hat{z}=0$$

$$\vec{\Omega}\times\vec{r}\,'=\Omega\hat{z}\times(R\cos\alpha\,\hat{r}+R\operatorname{sen}\alpha\,\hat{z})$$
$$=\Omega R\cos\alpha\,(\hat{z}\times\hat{r})$$
$$=\Omega R\cos\alpha\,\hat{\theta}$$

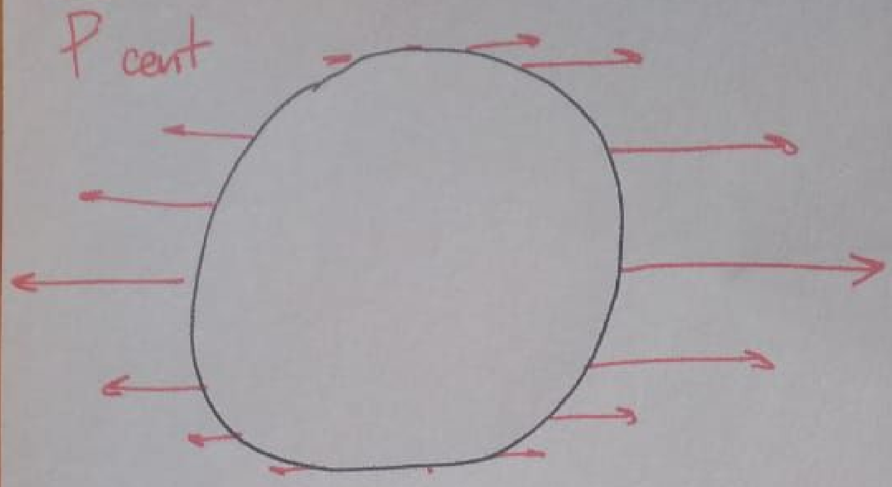
$$\vec{F}_{cent}=-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,')$$

$$\vec{F}_{cent}=-m(-\Omega^2R\cos\alpha\,\hat{r})$$

$$\boxed{\vec{F}_{cent}=m\Omega^2R\cos\alpha\,\hat{r}}$$

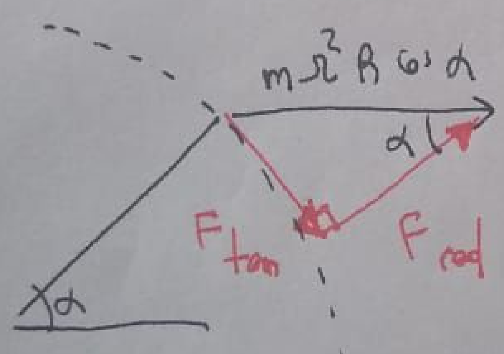
$$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,')=\Omega\hat{z}\times\Omega R\cos\alpha\,\hat{\theta}$$
$$=\Omega^2R\cos\alpha\,(\hat{z}\times\hat{\theta})$$
$$=-\Omega^2R\cos\alpha\,\hat{r}$$

Siempre apunta en $\hat{r}$, máximo en el ecuador, mínimo en los polos



Notar que la aceleración de la gravedad es mínima en el ecuador y máxima en los polos

Además, $\vec{F}_{cent}$ tiene una componente SUR en el hemisferio NORTE y viceversa



$$F_{rad} = m\Omega^2 R\cos^2\alpha$$

$$\boxed{F_{tan} = -m\Omega^2 R\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha}$$

Es $\alpha > 0$ en el hemisferio norte y $F_{tan} < 0$. y viceversa. Además es máxima $\frac{\pi}{2}$.

Ahora vamos a calcular $\vec{F}_{cor}$ para un
moviéndose con $\vec{v}_n$ y $\vec{v}_e$.

$\hat{z} \times \hat{z} = 0$

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rot} = -2m\Omega\hat{z} \times \left(-v_n \operatorname{sen}\alpha\,\hat{r} + v_n \cos\alpha\,\hat{z}\right)$$

$$\vec{F}_{cor} = +2m\Omega v_n \operatorname{sen}\alpha\,(\hat{z} \times \hat{r}) = 2m\Omega v_n \operatorname{sen}\alpha\,\hat{\theta}$$

Si estoy en el hemisferio norte, significa $\alpha > 0$
$\vec{F}_{cor}$ es en $\hat{\theta}$ positivo (este)

Si estoy en el hemisferio sur, significa $\alpha < 0$
$\vec{F}_{cor}$ es en $\hat{\theta}$ negativo (oeste)

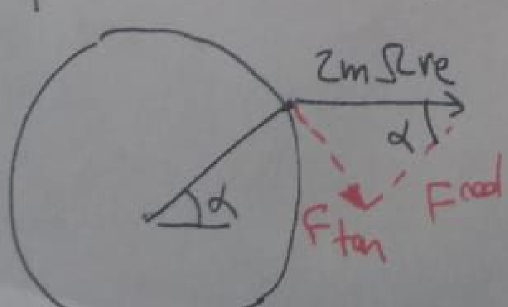
$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rot} = -2m\Omega\hat{z} \times v_e\hat{\theta} = -2m\Omega v_e(\hat{z} \times \hat{\theta})$$

$$\vec{F}_{cor} = 2m\Omega v_e\hat{r}$$

En este caso, la fuerza de Coriolis es // F. centrífuga

¿No depende del hemisferio? Sí

no depende del hemisferio



$$F_{rad} = 2m\Omega v_e \cos\alpha$$

$$F_{tan} = -2m\Omega v_e \operatorname{sen}\alpha$$

↓ sur en el norte
norte en el sur

¿Cómo son las magnitudes relativas de $\vec{F}_{Cor}$ y $\vec{F}_{cen}$?

Supongamos una velocidad ≈ 10 m/s y la misma masa (1 kg por ejemplo)

$$F_{Cent} \approx m \Omega^2 R \approx 0.03 \text{ N}$$

1 kg

Frec. de rotación $7.27e^{-5}\ s^{-1}$

Radio de la Tierra $6.37 \cdot 10^6$ m

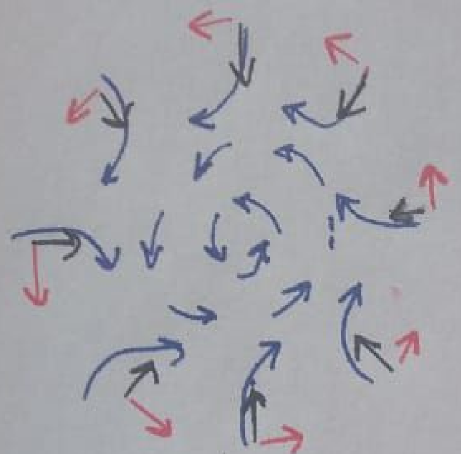
$$F_{Cor} \approx 2 m \Omega V = 0.0015 \text{ N}$$

1 kg

Frec. de rotación

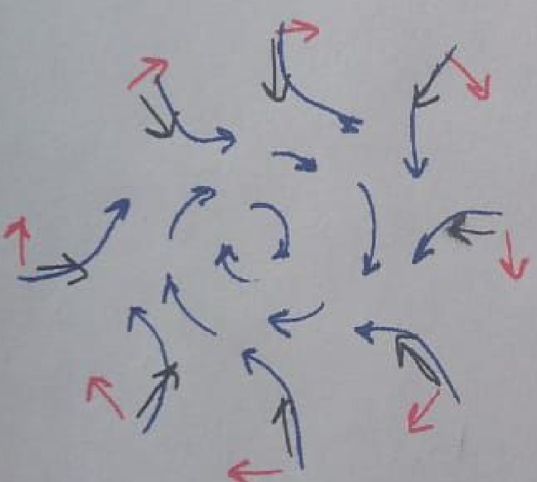
10 m/s

Zona de baja presión (hemisferio norte)



Sentido anti-horario

Zona de baja presión (hemisferio sur)



Sentido horario

Cerca del ecuador $\vec{F}_{cor} \approx 0$ por lo que no puede haber tornados / ciclones.

(¡No los hay!)