Trabajo y energía (Clase 1)

Hasta ahora vimos que el momento lineal total ($\vec{P}$) y el momento angular total ($\vec{L}$) de un sistema de partículas se conservan siempre que $\vec{F}^{ext}=0$ y $\vec{\tau}^{ext}=0$

En general, vimos que vale $\boxed{\dot{\vec{P}}=\vec{F}^{ext}}$ y $\boxed{\dot{\vec{L}}=\vec{\tau}^{ext}}$

La conservación de $\vec{P}$ es una consecuencia de la tercera ley de [redacted] Newton

La conservación de $\vec{L}$ es una consecuencia de la tercera ley de Newton sumado a pedir que las fuerzas de interacción estén en la línea recta que une a cada par de partículas

Es un hecho experimental de la física que $\vec{L}$ se conserva siempre en un sistema aislado, incluso si las fuerzas internas no cumplen esta condición

Notemos que NUNCA usamos la forma de la 2^{da} Ley para derivar la conservación de $\vec{P}$ y $\vec{L}$

Ahora vamos a ver qué podemos deducir si analizamos $\vec{F}=m\cdot\ddot{\vec{r}}$

Organización de la clase.

1) Motivación del concepto de trabajo y energía cinética

2) Definición de trabajo en una dimensión

3) Ejemplos

4) Definición en el caso general (3D) y ejemplos.

Motivación

¿Cómo funciona la mecánica Newtoniana?

$\vec{F}(\vec{r})$ (gravedad, electromagnetismo, fuerza nuclear, etc) $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}}$ $\Rightarrow$ $\vec{r}(t)$ (resolución de las ecuaciones diferenciales)

Mecánica!

Problema de otros físicos (principalmente experimentales)

INGENUIDAD TOTAL

Problema de los matemáticos (resolver ecuaciones diferenciales es matemática)

Es ingenuo pensar a la mecánica de esta manera, porque ...

1) Las fuerzas se descubren justamente aplicando $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ y encontrando $\vec{F}$ para que $\vec{r}$ sea lo que vemos en los experimentos

2) Resolver $\vec{r}(t)$ es parte de la física del problema y en el proceso de hacerlo podemos encontrar y definir nuevas magnitudes de ENORME relevancia en física, como TRABAJO y ENERGÍA

¿Cuál es el problema para encontrar $\vec{r}(t)$?

$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$ → las fuerzas suelen estar casi siempre dadas como función de la posición.

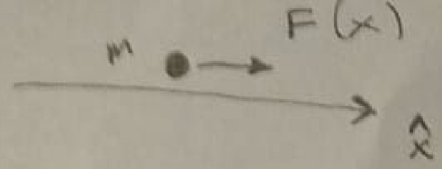
... pero al mismo tiempo, $\vec{r}$ cambia bajo la acción de las fuerzas!

$F(\vec{r}) = m \cdot \ddot{\vec{r}}$

"huevo" "gallina"

¿Quién viene antes?

2) Trabajo y energía en una dimensión



→ Una masa m moviéndose en $\hat{x}$ bajo $F(x)$

$$m\ddot{x} = m\frac{d\dot{x}}{dt} = F(x).$$

Integrando en ambos lados desde un x_0 a x,

$$m\int_{x_0}^{x_f} \frac{d\dot{x}}{dt}\,dx = \int_{x_0}^{x_f} F(x)\,dx$$

Pero, $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, entonces

$$m\int_{x_0}^{x_f} \dot{x}\,d\dot{x} = \frac{m\dot{x}^2}{2}\Big|_{x_0}^{x_f} = \underbrace{\frac{mV_f^2}{2} - \frac{mV_i^2}{2}}_{\text{Cambio en la velocidad entre punto } x_0 \text{ y } x_f} = \underbrace{\int_{x_0}^{x_f} F(x)\,dx}_{\text{Integral de la fuerza durante el desplazamiento de la partícula}}$$

También E_k, T, etc

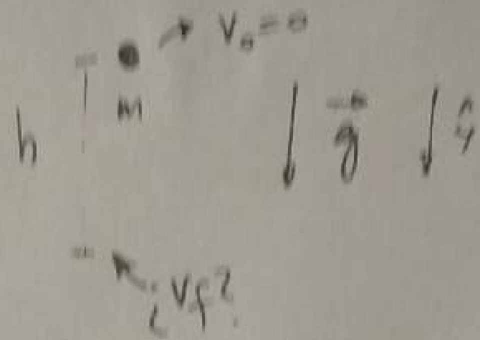
Definimos $K = \frac{mv^2}{2}$ = energía cinética

Definimos $\int_{x_0}^{x_f} F(x)\,dx = W$ = trabajo hecho por F entre x_0, x_f

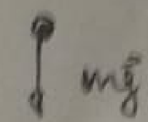
Entonces, llegamos a que $\boxed{\Delta K = W}$ [Joules N·m]

Teorema energía-trabajo en una dimensión.

$\boxed{\text{Ejemplo 1}}$



D.C.L



El trabajo hecho por el peso mg entre 0 , h es

$$W = \int_0^h mg\, dy = mgh. \quad \text{Entonces } K_f - K_i = \frac{mv_f^2}{2} - \underbrace{\frac{mv_i^2}{2}}_{0} = mgh$$

$$\text{luego, } v_f = \sqrt{2gh}$$

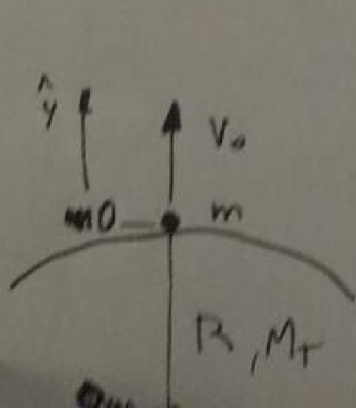
<u>Obs.</u> 1) En principio consigo el módulo de v_f nada más

2) Si bien pude calcular fácil v_f, no aprendí absolutamente nada sobre el tiempo que le llevó al movimiento

(Cuando reemplacé $\frac{d\dot{x}}{dt}dx = \dot{x}d\dot{x}$ en la derivación del teorema energía momento, perdí la dependencia con el tiempo).

$\boxed{\text{Ejemplo 2}}$ Velocidad de escape

¿Qué tan rápido tengo que tirar a m para arriba para que abandone el campo gravitatorio?



D.C.L $\quad F_g(y) = -\frac{G m M_T}{(y+R)^2}$

Para una altura y, W de F_g es,

$$W = \int_0^y -\frac{G m m_T}{(y+R)^2}\,dy = -G m m_T \int_0^y \frac{1}{(y+R)^2}\,dy$$

= [redacted] $= G m m_T \left(\frac{1}{y+R}\right)\Bigg|_0^y =$

$$G m m_T \left(\frac{1}{y+R} - \frac{1}{R}\right)$$

Entonces, [redacted] $G \cancel{m} \cdot m_T \left(\frac{1}{y+R} - \frac{1}{R}\right) = \frac{\cancel{m}}{2}\left(v_f^2 - v_0^2\right)$

De donde despejo $v_f(y)$,

$$v_f(y) = \sqrt{2 G m_T \left(\frac{1}{y+R} - \frac{1}{R}\right) + v_0^2}$$

¿Qué significa exactamente que m escape del campo gravitatorio terrestre?

Significa que y se hace más y más y más (y más) grande y sigue llegando la masa a ese punto con $v_f > 0$. El escape ocurre cuando m puede llegar a $y = +\infty$!

En ese caso,

$$V_f(+\infty) = \sqrt{\frac{-2Gm_T}{R} + V_0^2}$$

Pero yo quiero la velocidad de escape V_0 mínima para que eso ocurra. Por lo tanto, no quiero que sobre nada, quiero llegar "con lo justo" a $y=+\infty$, o sea, con $V_f(+\infty)=0$. Eso me define la velocidad de escape.

$$0 = \sqrt{\frac{-2Gm_T}{R} + V_{esc}^2} \Rightarrow V_{esc} = \sqrt{\frac{2Gm_T}{R}}$$

$$\approx 11.000 \text{ m/s}$$

V_{esc},

1) no depende de m
2) es menor a mayor R y mayor a mayor m_T
3) es para el caso de un objeto no propelido (no un cohete)

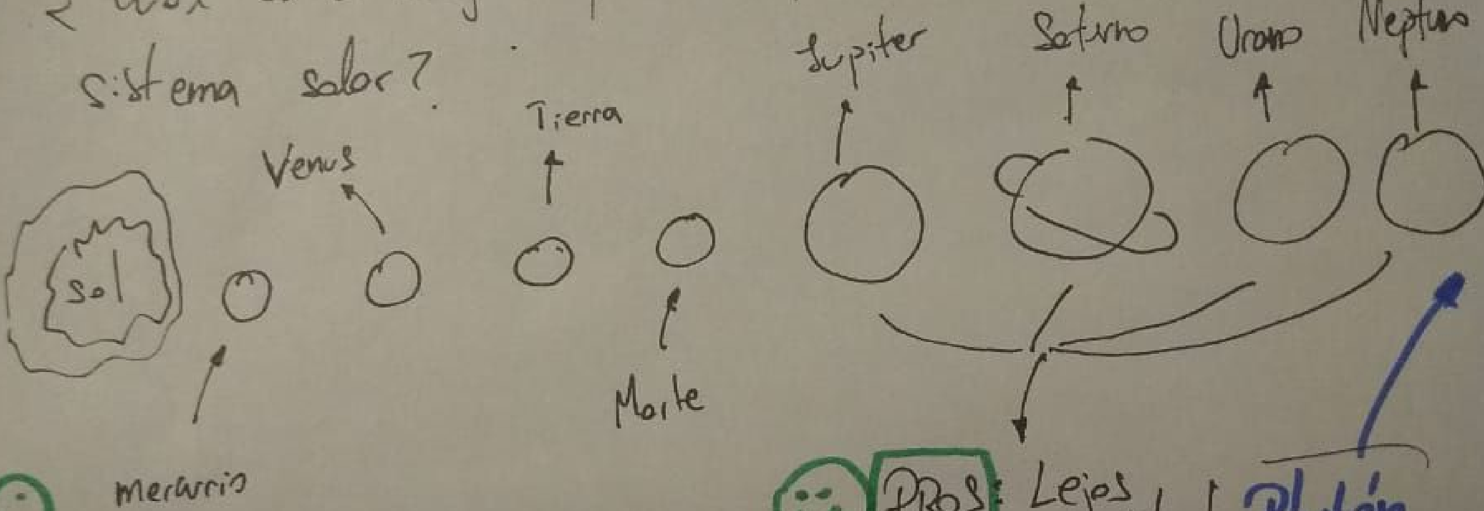
Un cohete puede escapar del campo a cualquier velocidad al ser propelido continuamente

$V_{esc} > 300.000$ km/s

Agujero negro

Obs. Escapar de la Tierra, no garantiza escapar del sistema solar! $v_{esc} \approx 17.000$ m/s para escapar al sistema solar desde la Tierra.

¿Cuál es el mejor planeta para escapar del sistema solar?



PROS: No es muy masivo

CONTRA: Muy cerca del Sol!

PROS: Lejos del Sol!

CONTRA: Muy masivos ellos mismos

Plutón no es más un planeta

Ranking:

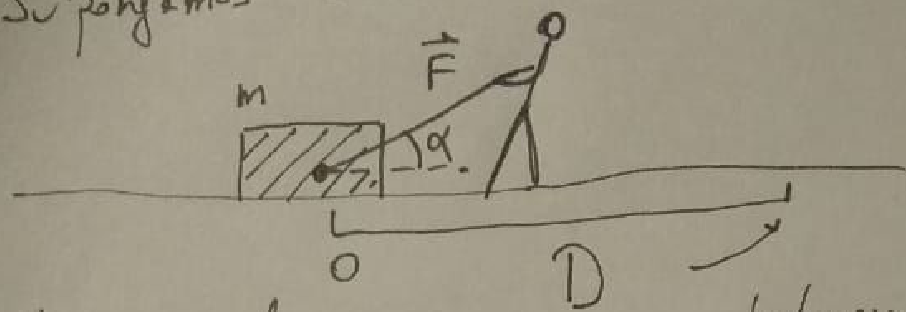
1) Marte (11.2 km/s)
2) Tierra (17 km/s)
3) Venus (17.8 km/s)

El peor: Júpiter

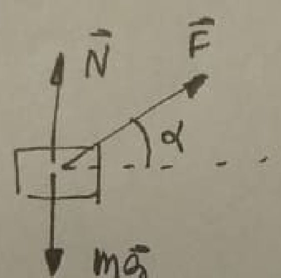
(Plutón sería el nº1, pero como todos sabemos, ya no es más un planeta!)

4) Definición del caso general

Supongamos una situación de este estilo



Movemos la masa m una distancia D bajo la acción de $\vec{F}$, en un D. C. L.

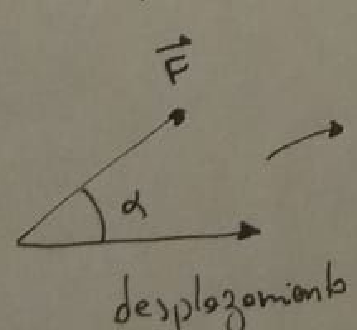


¿Cuanto vale v_f si $v_0 = 0$?

$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y}$$

F_y no contribuye al cambio de velocidad en la trayectoria (es $\perp$ a la trayectoria)

En cambio, F_x sí es la fuerza que acelera al bloque.



$$W = \int_0^D F_x \, dx = \int_0^D F \cos\alpha \, dx =$$

$$= \int_0^D \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

fuerza

prod. escalar

$$\Delta K = \int_0^D \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

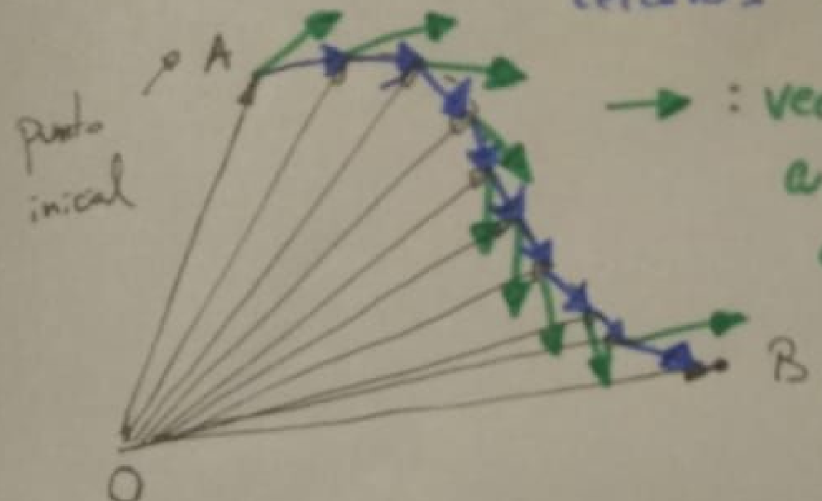
$$d\vec{r} = (dx, 0) = dx \underbrace{(1, 0)}_{\text{Vector unitario en la dirección del desplazamiento}}$$

Vamos al caso más general posible:

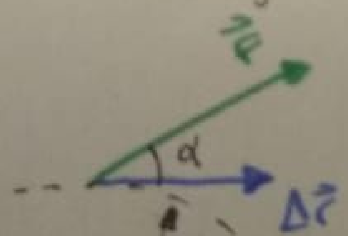
Un movimiento 3D en una curva cualquiera.

→ : vectores $\Delta\vec{r}$ entre dos tiempos cercanos sucesivos

→ : vectores de $\vec{F}(\vec{r})$; cuánto es la fuerza en cada punto de la trayectoria



Para cada Δt, estoy como en el caso anterior: únicamente la componente de $\vec{F}$ paralela a $\Delta\vec{r}$ hace trabajo.



La comp. de la fuerza que hace trabajo es $F\cos\alpha$, y $W = F\cos\alpha\,\Delta r$
$= \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$

Supongamos que Δt es tan chico que $\vec{F} \approx$ constante sobre el desplazamiento Δr.

multiplico por Δr de ambos lados

$$\vec{F} = m\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \Rightarrow \vec{F}\cdot\Delta r = m\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt}\cdot\Delta r$$

[redacted]

Ahora, como Δt es muy corto, $\Delta r = \vec{v}\Delta t = \dot{\vec{r}}\Delta t$

$$\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = m\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt}\dot{\vec{r}}\Delta t$$

Ahora consideremos la regla del producto, [redacted]

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t)\cdot\vec{a}(t)\right] = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a}\cdot d\vec{a}$$

Entonces, si hago,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\dot{\vec{r}}(t)\cdot\dot{\vec{r}}(t)\right] = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt}\cdot\dot{\vec{r}}$$

Pero $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$, o sea $\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \dot{r}^2 = v^2$

luego, $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt}\Delta t$

Esto fue para un único desplazamiento Δr.
Supongamos que tengo la serie de desplazamientos

$$\Delta r_1, \Delta r_2, \ldots, \Delta r_{n-1}, \Delta r_n$$

Cada uno es muy corto dado que ocurre en un intervalo Δt muy pequeño. Entonces, para cada uno de ellos, el trabajo hecho por $\vec{F}$ se escribe como calculamos recién,

velocidad en el intervalo i

$$W_i = \vec{F}_i\cdot\Delta\vec{r}_i = \frac{m}{2}\frac{dv_i^2}{dt}\Delta t_i$$

trabajo en el intervalo i

fuerza en el intervalo i (≈ cte)

desplazamiento i-ésimo

intervalo de tiempo (puedo suponer que son muy pequeños)

Entonces, el trabajo total es,

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{2} \frac{d v_i^2}{dt} \Delta t_i}$$

Si tomamos el caso en que $\lim \Delta t_i \to 0$, tenemos una integral

pos. final — t. final

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{m}{2} \frac{d v^2}{dt} dt$$

pos. inicial — t. inicial

Esta integral es hacer integral de una derivada

$$\frac{m}{2} \int_{t_A}^{t_B} \frac{d v^2}{dt} dt = \left. \frac{m v^2}{2} \right|_{t_A}^{t_B} = \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2}$$

Luego, $\underbrace{\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$ $= \Delta K$ con $\Delta K = K_B - K_A$

$$= \underbrace{\frac{m}{2} v_B^2 - \frac{m}{2} v_A^2}_{\text{E. cinética.}}$$

Este objeto para ustedes es <u>nuevo</u> (no lo vieron en ninguna matemática hasta ahora). Se llama "integral de línea". <u>No</u> lo vamos a calcular para casos generales, sino algunos casos particulares

De nuevo, me dice algo sobre el vector velocidad <u>solo</u> en término de su módulo y <u>solo</u> en función de la posición (no el tiempo)

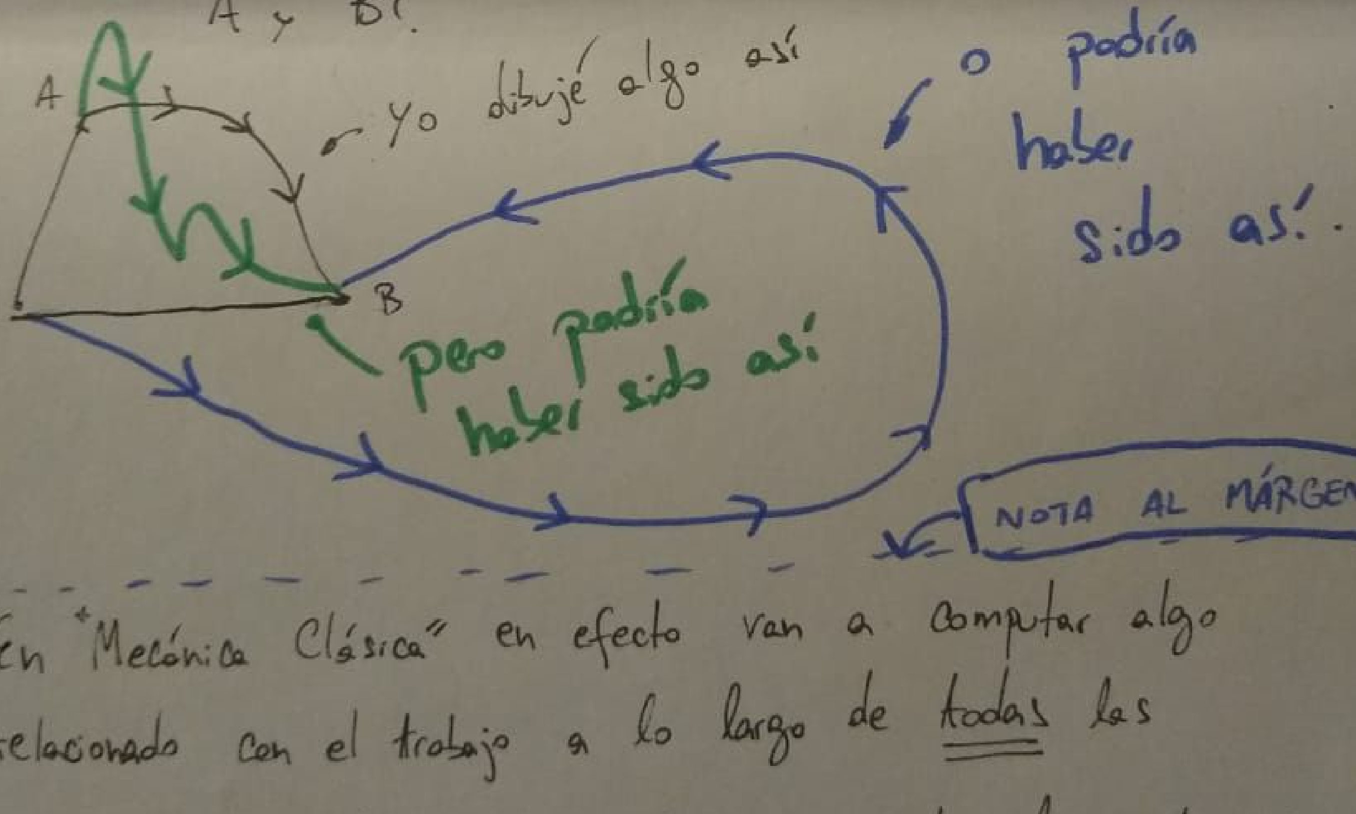
El elefante en la habitación:

Evaluamos el trabajo de $\vec{F}$ en una determinada trayectoria para encontrar ΔK.

Pero, ¿el problema no era justamente que no sabiamos cual era la trayectoria?

¿La trayectoria no era, precisamente, lo que buscábamos encontrar?

¿Cómo [redacted] puedo calcular $W=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$ si no conozco cuál es la trayectoria entre A y B?

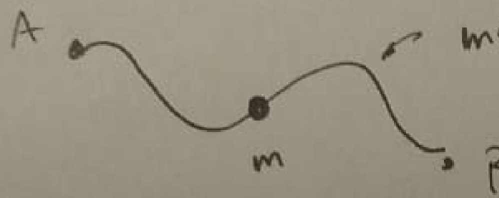


NOTA AL MÁRGEN

En "Mecánica Clásica" en efecto van a computar algo relacionado con el trabajo a lo largo de <u>todas</u> las trayectorias posibles entre A y B, y encontrar las condiciones que cumple la trayectoria "real" y que no cumplen las demás. Las herramientas matemáticas para hacer eso se llaman "cálculo de variaciones".

En general, esta objeción es verdad, pero hay dos casos particulares donde <u>no</u> es un problema, y son extremadamente importantes para lo que vemos en esta materia.

$\boxed{\text{Caso } 1}$ Sé cuál es la trayectoria porque hay un vínculo que fuerza a la partícula a recorrer esta trayectoria en particular



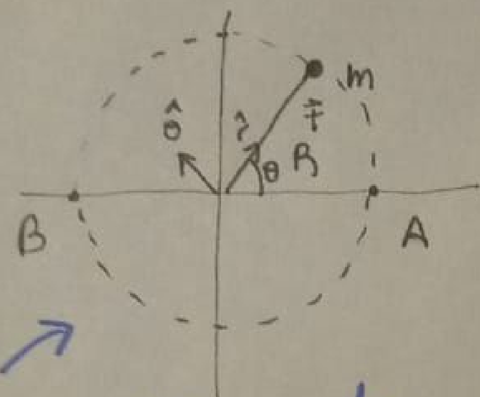
masa m confinada a un alambre que une A y B

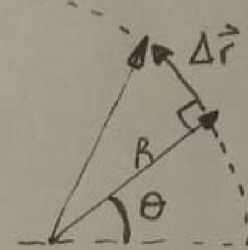
$\boxed{\text{Caso } 2}$ Hay muchas fuerzas $\vec{F}$ para las cuales $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$ no depende de la curva que une a los puntos A, B, únicamente depende de A y B (punto de partida y punto de llegada)

Vamos a ver primero un ejemplo del <u>Caso 1</u> y luego un ejemplo combinado de Caso 1 + Caso 2

Ejemplo 1 masa moviéndose en mov. circ. uniforme

¿Cómo calculo $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$?





$\Delta\vec{r}$ es tangente al circunferencia → si es muy chico, $d\vec{r}$

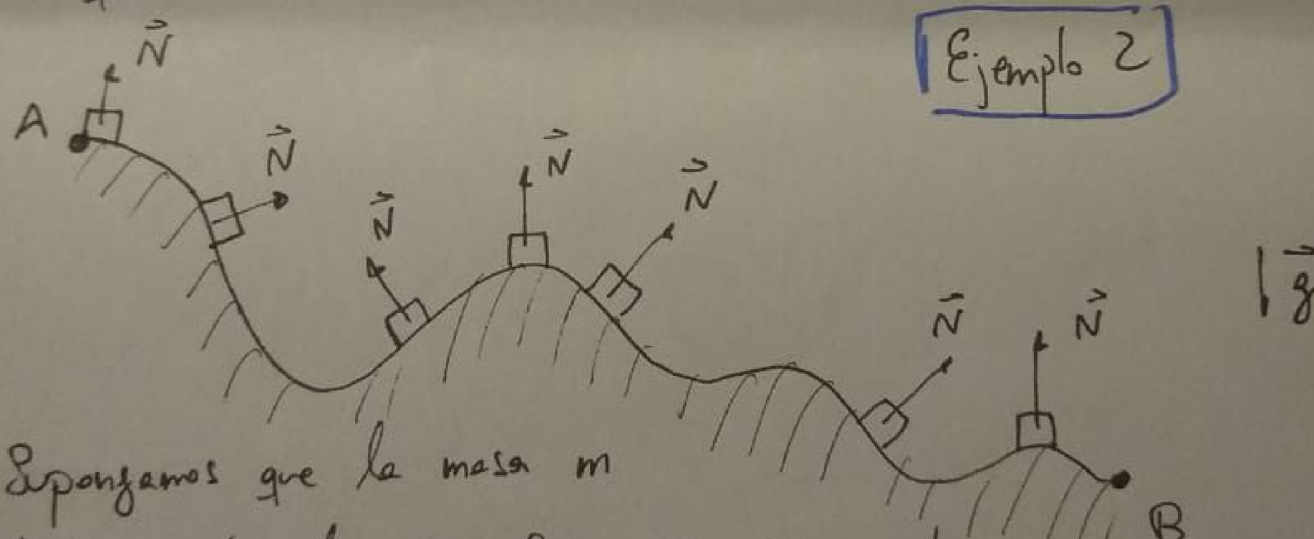
$d\vec{r} \parallel \hat{\theta}$ $\qquad \vec{F} = \vec{T} \parallel \hat{r}$

$\Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow W = 0$

Las fuerzas centrales pueden hacer **W** si la trayectoria no es circular (porque entonces no $\vec{F} \parallel \Delta\vec{r}$

En general las fuerzas de vínculo que son $\perp$ a la trayectoria NO realizan trabajo

Ejemplo 2



Supongamos que la masa m desliza sobre la superficie sin rozamiento, bajo la acción de dos fuerzas: $-mg\hat{z}$ (peso) y $\vec{N}$

En todo momento, $\vec{N}$ es normal a la superficie (por eso se llama "normal"!). Pero el desplazamiento ocurre paralelo a la superficie, y por lo tanto, también perpendicular a la normal. El valor exacto $\vec{N}(t)$ puede ser muy difícil de calcular, pero no lo necesitamos para calcular ΔK porque $\vec{N}$ no hace trabajo!

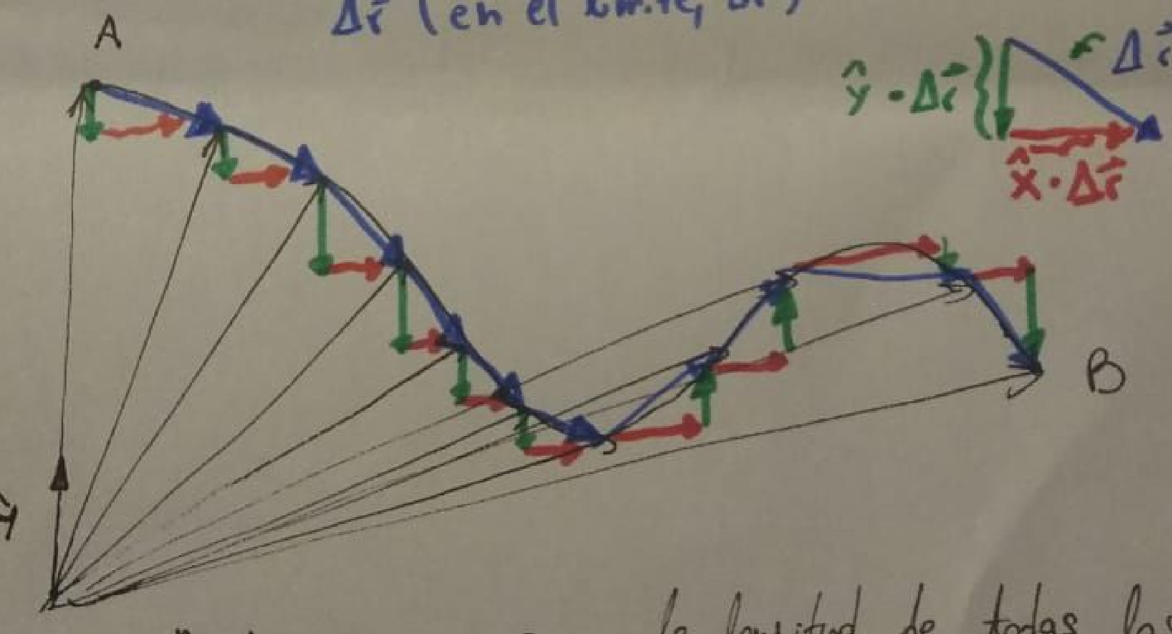
Es decir, si $\vec{F}^{ext} = -mg\hat{y} + \vec{N}$, entonces

$$\int_A^B \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (-mg\hat{y} + \vec{N}) \cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_A^B -mg\hat{y} \cdot d\vec{r}}_{\text{W de la fuerza peso}} + \underbrace{\int_A^B \vec{N} \cdot d\vec{r}}_{=0 \ (\vec{N} \perp d\vec{r})}$$

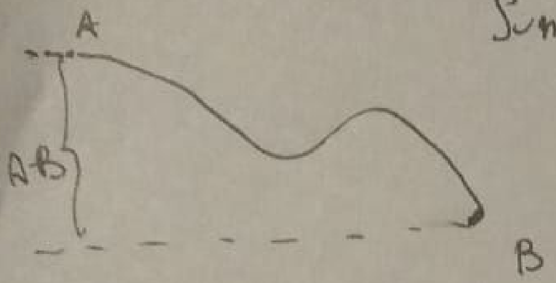
Entonces

$$\Delta K = \int_A^B \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -mg\hat{y} \cdot d\vec{r} = -mg \underbrace{\int_A^B \hat{y} \cdot d\vec{r}}_{¿¿Y \text{ esto}??}$$

$\rightarrow$: desplazamientos $\Delta\vec{r}$ (en el límite, $d\vec{r}$)



Hacer $\sum_{i=1}^{n} \hat{y} \cdot \Delta\vec{r}_i$ es sumar la longitud de todas las flechitas verdes, con su sentido (las flechas hacia abajo son negativas, y las flechas hacia arriba son positivas). A medida que hacemos $\Delta\vec{r}_i$ más chico, sigue pasando lo mismo. En el límite, $\int_A^B \hat{y} \cdot d\vec{r} = \sum$ longitud ($\uparrow$) - longitud ($\downarrow$)



Suma de las flechitas $= -(A - B)$
$= B - A$

Entonces, $\Delta K = -mg(B-A)$

$K_f - K_i = -mgB - (-mgA)$ [redacted] ⊛

Si partimos del reposo, $\boxed{K_f = -mg(B-A)}$

Con ⊛

Escribimos el trabajo como algo evaluado en el extremo final (B) menos algo evaluado en el extremo [redacted] inicial (A). No importó la trayectoria porque

1) $\vec{N}$ no aportó trabajo
2) El trabajo de $-mg\hat{y}$ tampoco depende de la trayectoria, únicamente de los puntos inicial y final

En la próxima clase vamos a ver que muchísimas fuerzas realizan un trabajo que no depende de la trayectoria ("fuerzas conservativas").

Volvamos a notar que el teorema trabajo-energía nos da respuestas parciales en situaciones muy complicadas. Podemos calcular la velocidad final, pero [redacted] no [redacted] podemos calcular $\vec{N}(t)$ o el tiempo en que se recorre la trayectoria. Para eso, no hay otra que integrar la ec. de movimiento $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$.