Trabajo y energía (clase 2)

Vimos que $\frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2} = K_f - K_i = W = \underbrace{\int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$

(Teorema energía trabajo)

Integral de línea: va sumando las contribuciones de $\vec{F}(\vec{r})$ a lo largo de la trayectoria entre $\vec{x}_i$, $\vec{x}_f$.

Esto vale para $\vec{F}$ = resultante de todas las fuerzas sobre la partícula

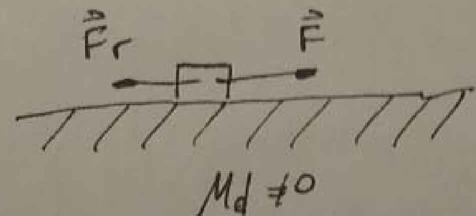
Si tengo $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ actuando sobre m, entonces,

$$\Delta K = \int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} [\vec{F}_1(\vec{r}) + \vec{F}_2(\vec{r})] \cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \vec{F}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}_{W_1 = \text{trabajo hecho por } \vec{F}_1} + \underbrace{\int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \vec{F}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}_{W_2 = \text{trabajo hecho por } \vec{F}_2}$$

... y lo mismo con N fuerzas

Puede ocurrir que el trabajo de una fuerza sea $\neq 0$ y $\Delta K = 0$

Por ejemplo,



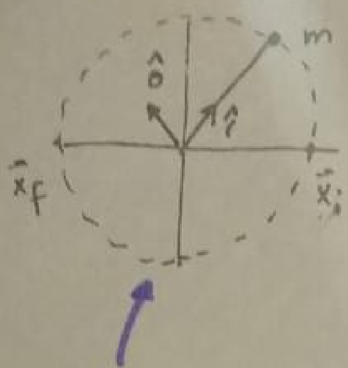
Si $\vec{F} = -\vec{F}_r$, entonces hace trabajo aunque $\Delta K = 0$.

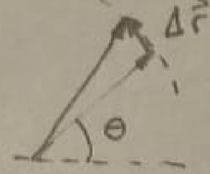
(El trabajo hecho por $\vec{F}$ se compensa con el trabajo hecho por $-\vec{F}_r$)

¿De qué nos sirve saber que $\Delta K = \int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ si no sabemos cuál es la curva, o bien no sabemos si es la curva en la que la partícula se moverá bajo la fuerza $\vec{F}$?

1. Si hay un vínculo que limita a m moverse sobre la curva
2. Si la integral solo depende de los extremos, pero no de la curva

Veamos un ejemplo de 1 : Masa en mov. circ. uniforme





para Δt más y más chico, $\Delta\vec{r}$ se aproxima a $d\vec{r}$, tangente a la circunferencia.

Luego, $d\vec{r} \parallel \hat{\theta}$, y $\vec{T}$ = tensión $= -T\hat{r}$

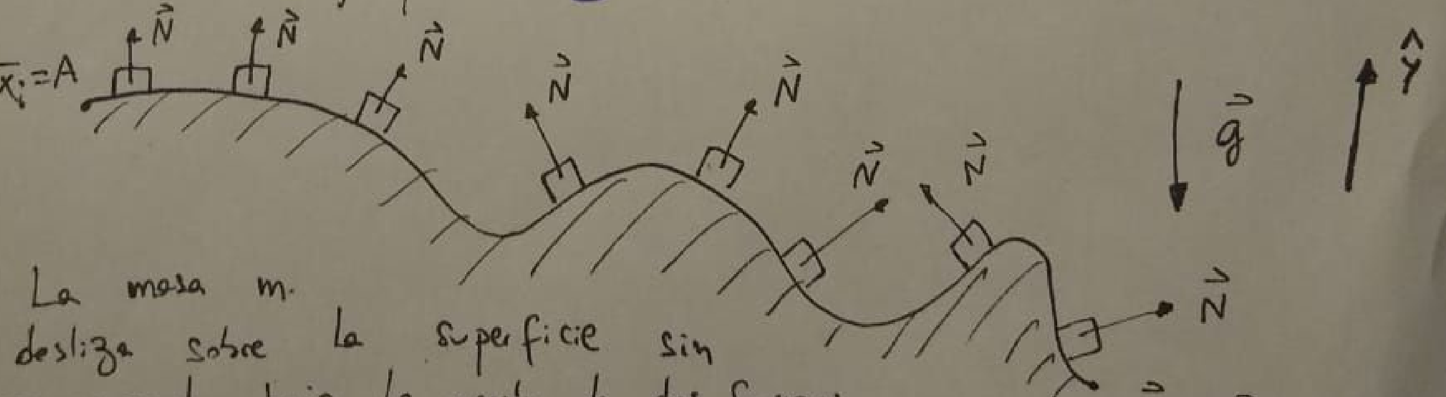
Luego, $d\vec{r} \perp \vec{T} \Rightarrow \vec{T}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \boxed{\int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \vec{T}\cdot d\vec{r} = 0}$

Op! Otras fuerzas centrales <u>sí</u> pueden hacer W si la trayectoria no es circular.

> En general, las fuerzas de vínculo que son $\perp$ a la trayectoria no realizan trabajo

(Físicamente, puedo pensar una $\vec{F}$ con dos componentes: una que es $\parallel$ a la trayectoria, y una que es $\perp$ a la trayectoria. La $\parallel$ puede cambiar el módulo de $\vec{v}$ - hacer W - mientras que la [redacted] $\perp$ puede cambiar la dirección de $\vec{v}$)

Veamos un ejemplo de 1 + 2



La masa m. desliza sobre la superficie sin rozamiento bajo la acción de dos fuerzas.

$-mg\hat{y}$: peso de la masa

$\vec{N}$: normal de la superficie.

El desplazamiento ocurre $\parallel$ a la superficie y $\perp$ a la $\vec{N}$.

Si bien $\vec{N}(t)$ depende de la superficie y puede ser difícil de calcular, <u>no lo necesitamos</u> para encontrar $K_f - K_i$ porque $\vec{N}$ no hace W !

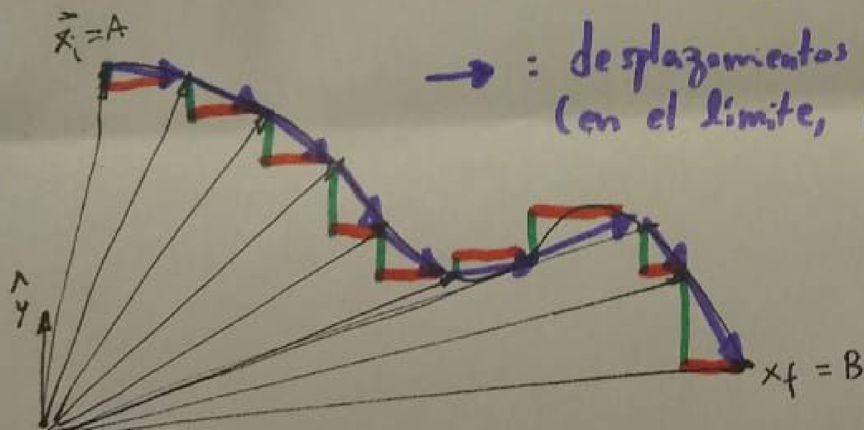
$\vec{F}^{ext} = -mg\hat{y} + \vec{N}$, entonces,

$$\int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \vec{F}_{ext}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} [-mg\hat{y} + \vec{N}(\vec{r})]\cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} -mg\hat{y}\cdot d\vec{r}}_{\text{W del peso}} + \underbrace{\int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \vec{N}(\vec{r})\cdot d\vec{r}}_{=0\ (\vec{N}\perp d\vec{r})}$$

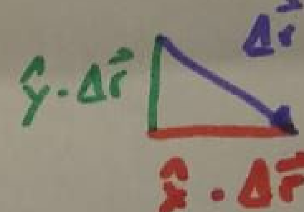
Luego, $K_f - K_i = -mg \underbrace{\int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \hat{y}\cdot d\vec{r}}$ ¿¿Y esto??

Notemos que para cualquier vector, $\hat{y}\cdot\vec{a}$ es la longitud de la componente de $\vec{a}$ en y (con su signo), pues,

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} \Rightarrow \hat{y}\cdot\vec{a} = a_x\underbrace{(\hat{y}\cdot\hat{x})}_{=0} + a_y\underbrace{(\hat{y}\cdot\hat{y})}_{=1} = a_y$$



→ : desplazamientos $\Delta\vec{r}$ (en el límite, $d\vec{r}$)

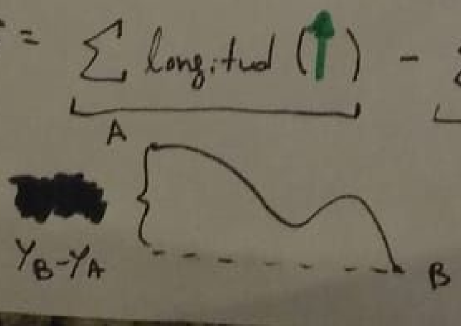


Hacer $\sum_i^n \hat{y}\cdot\Delta\vec{r}_i$ es sumar la longitud (con su signo) de todas las [redacted] segmentitos verdes (positivos hacia arriba, negativos hacia abajo).

A medida que $\Delta\vec{r}_i \to 0$, sigue pasando lo [redacted] mismo, es decir

$$\int_A^B \hat{y}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\sum \text{longitud}(\uparrow) - \sum \text{longitud}(\downarrow)}$$

- [redacted]



Entonces, $K_f - K_i = -mg(y_B - y_A) = -mgy_B + mgy_A$

$\boxed{\text{Únicamente importa el punto final } (y_B) \text{ y el punto inicial } (y_A)}$

De hecho, únicamente importan en este caso sus coordenadas en $\hat{y}$ (el versor en el que actúa la fuerza)

Definimos $U(y) = mgy$ ("energía potencial gravitatoria")

Entonces, $K_f - K_i = -mgy_B + mgy_A = -\underbrace{U(y_B)}_{U_f} + \underbrace{U(y_A)}_{U_i}$

$$K_f - K_i = -U_f + U_i$$

$$\underbrace{K_f + U_f}_{E_f} = \underbrace{K_i + U_i}_{E_i} \Rightarrow E_f = E_i \Rightarrow$$ Energía mecánica se conserva

con $E = K + U$ (energía mecánica)

En resúmen, para $\vec{F} = -mg\hat{y}$,

1. W solo depende de los extremos de la trayectoria
2. Por lo tanto puedo introducir una función $U(\vec{r})$ tal que

$$K_f - K_i = W = \int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\underbrace{U(\vec{x}_f)}_{U_f} + \underbrace{U(\vec{x}_i)}_{U_i} \Rightarrow K_i + U_i = K_f + U_f$$

3. Con esto defino $E = K + U$, la energía mecánica, y resulta que la E se conserva!

Esto vale para la fuerza peso, [redacted] pero también para otras fuerzas.

$\boxed{\text{Estas son las fuerzas que llamamos CONSERVATIVAS (porque conservan la energía mecánica)}}$

¿Cómo podemos saber si una fuerza es conservativa?

Para el caso de $-mg\hat{y}$ hicimos explícitamente la integral de línea y vimos que no dependía de la trayectoria, únicamente de los extremos.

Pero calcular la integral de línea puede ser mucho más complicado para otras fuerzas.

¿Hay una alternativa?
Hay una alternativa.

Esto vale si F es conservativa

En una dimensión, $U(x+\Delta x) - U(x) = -\int_x^{x+\Delta x} F(x)\,dx$

Si $\Delta x \approx 0$, $F \approx$ cte en el intervalo de integración y sale fuera de la integral,

$$U(x+\Delta x) - U(x) = -F(x)\int_x^{x+\Delta x} dx = -F(x)[\cancel{x}+\Delta x-\cancel{x}] = -F(x)\,\Delta x$$

Luego, $F(x) = -\left(\dfrac{U(x+\Delta x)-U(x)}{\Delta x}\right)$, y en el límite $\Delta x \to 0$,

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Si una fuerza es conservativa, es − la derivada del potencial

Al revés, si sabemos que $F = -\dfrac{dU}{dx}$, entonces,

$$\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} -\frac{dU}{dx}\,dx = U(x_f) - U(x_i)$$

(Probamos $\Rightarrow$
y probamos
$\Leftarrow$ entonces probamos
$\Leftrightarrow$)

Llegamos a la conclusión de que en una dimensión,

F. Conservativa $\Leftrightarrow$ W solo depende de los extremos de la trayectoria $\Leftrightarrow$ Existe una función U tal que $F = -\dfrac{dU}{dx}$

Observación: Lo físico (lo que uno mide) es la fuerza.

Por lo tanto, si U y U' resultan en la misma fuerza $\vec{F}$,

$F = -\frac{dU}{dt}$ y $F = -\frac{dU'}{dt}$, ambos son potenciales válidos.

Eso significa que U y U' pueden diferir en $C = cte$,
o que si U es un potencial para la fuerza F, $U' = U + C$ también.

Como $K_f - K_i = \underbrace{U_i - U_f}$ → da lo mismo si sumo $C = cte$ a U
porque ΔK es una diferencia de potencial.

En general, uno nunca trabaja con el potencial, sino con diferencias de potencial, que son las que tienen significado físico.

Otra observación,

Si todas las fuerzas que actúan sobre m son conservativas, $E = cte$.

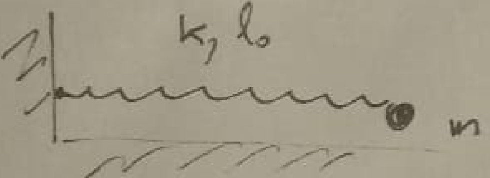
Esto es un hecho matemático que se desprende de la 2da ley.
Pero es un hecho físico, que uno puede definir la energía de un sistema de forma tal que para todas las interacciones conocidas por la física, la energía siempre se conserva. ← ¡SIEMPRE ES SIEMPRE!

No se conocen excepciones. Si describimos un proceso físico y su energía total (no la mecánica únicamente, sino la total) no se conserva, entonces hay algo que estamos haciendo mal o que no estamos entendiendo

En este caso ($F = -mg\hat{y}$), $U = mgy$, de forma tal que $-mg = -\frac{dU}{dy}$.

Ejemplo resorte.

otro ejemplo de F conservativa,



$$F_e = -k(x - l_0).$$

Defino $U(x) = \frac{k}{2}(x - l_0)^2$.

Entonces F_e es conservativa pues,

$$F_e = -\frac{dU}{dx}.$$

$\Rightarrow$ En un mov. oscilatorio,

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{k}{2}(x - l_0)^2 = cte\ !$$

Ejemplo atracción gravitatoria

otro ejemplo, $F_g = -\frac{G m m_T}{(y+R)^2}$ (la fuerza gravitatoria terrestre)

Si defino $U(y) = -\frac{G m m_T}{y+R}$ entonces $F_g = -\frac{dU}{dy} \Rightarrow$ Conservativa.

En un tiro vertical desde $y = 0$ con velocidad v_0,

$$\left.\begin{aligned} E_i &= \frac{mv_0^2}{2} + U(0) = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{G m m_T}{R} \\ E_f &= \frac{mv^2}{2} + U(y) = \frac{mv^2}{2} - \frac{G m m_T}{y+R} \end{aligned}\right\}$$

F_g conservativa, $E_i = E_f$

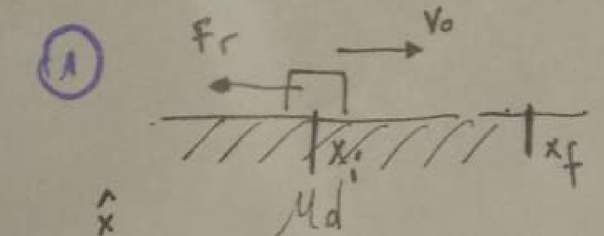
$$\frac{\cancel{m}v_0^2}{2} - \frac{G\cancel{m}m_T}{R} = \frac{\cancel{m}v^2}{2} - \frac{G\cancel{m}m_T}{y+R} \Rightarrow v^2 = 2Gm_T\left(\frac{1}{y+R} - \frac{1}{R}\right) + v_0^2$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2Gm_T}{R}} \longleftarrow v = \sqrt{2Gm_T\left(\frac{1}{y+R} - \frac{1}{R}\right) + v_0^2}$$

Como habíamos encontrado antes

Ejemplo de F no conservativa,

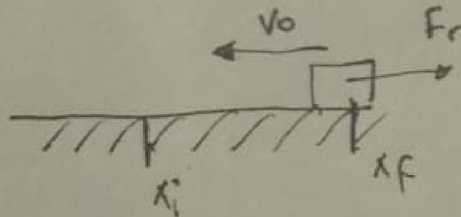
(1)



$$W_1 = -F_r(x_f - x_i)$$

F_r apunta en $-\hat{x}$

(2)



$$\underbrace{W_2 = F_r(x_i - x_f) = -F_r(x_f - x_i)}_{\text{Los dos trabajo son iguales (y negativos)}}$$

F_r apunta en $\hat{x}$

Claramente, f_r no puede ser conservativa.

Si fuese, habría $U(x)$ tal que,

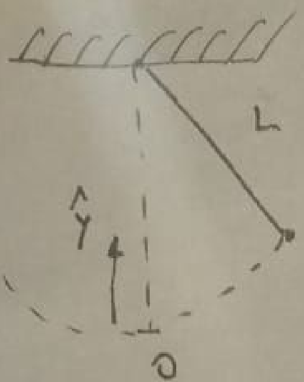
$$W_1 = U(x_i) - U(x_f) \qquad W_2 = U(x_f) - U(x_i)$$

$$W_1 = -W_2 \rightarrow$$ pero eso no pasa, porque F_r siempre se opone al desplazamiento

(Si F_r fuese conservativa, en (1) se opondría (por ej.) al desplazamiento, y en (2) F_r facilitaría el desplazamiento, pero siempre se opone, siempre actúa para reducir K ... por eso se denomina a F_r como una fuerza disipativa)

¿Cómo se usa en la práctica la energía para resolver problemas que de ~~ot~~ otra forma serían complicados?

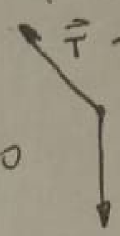
$\Downarrow$ ver un ejemplo



"El viejo péndulo"

Empieza con v_0 en $y=0$
¿ $v(y)$?

P.C.L $W=0$



$\vec{T} \to$ ($\perp$ al desplazamiento)

$m\vec{g} \to$ Fuerza conservativa

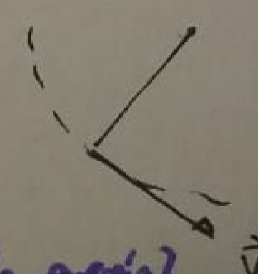
$$\frac{\cancel{m} v_0^2}{2} = \frac{\cancel{m} v^2}{2} + \cancel{m} g y \Rightarrow v(y) = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

Aunque era $\boxed{\text{difícil}}$ obtener $y(t)$ para el péndulo, usando energía podemos calcular fácil $v(y)$

Obs ① ¡No sabemos cuánto tarda en llegar a ese valor!

Para el "cuánto" no queda otra que resolver las ecuaciones de movimiento. ☹

② La energía cinética da información sobre el módulo de la velocidad. En este caso particular podemos deducir $\vec{v}$ porque sabemos que $\vec{v}$ es // a la circunferencia (tangente), pero en un caso general podríamos no saberlo.



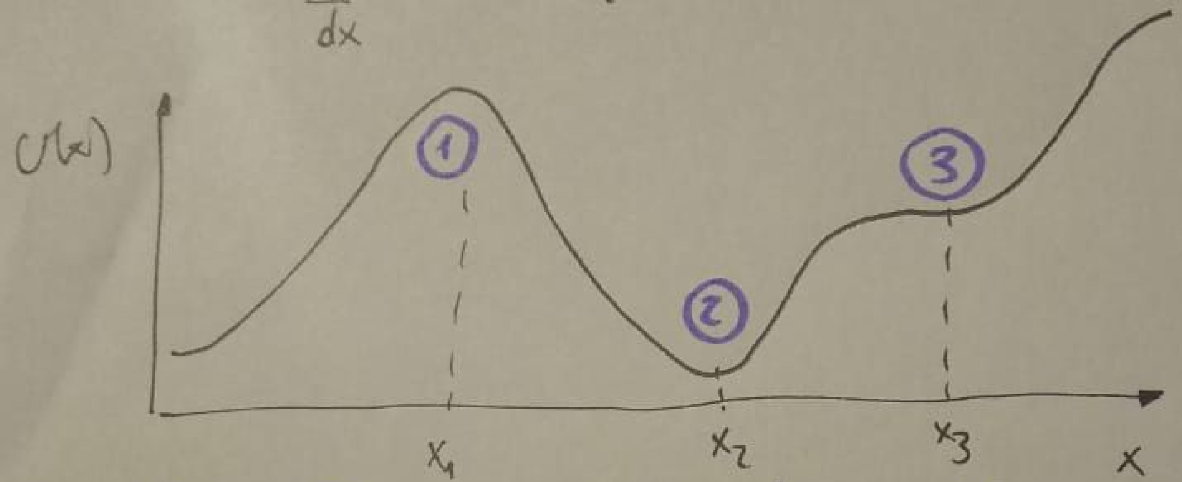
⇩ ¿Qué onda con la energía?

La conservación de la energía mecánica es muy útil para relacionar que pasa entre distintas coordenadas espaciales, pero NO entre distintos tiempos.

Integramos las ec. de movimiento "a medias".

Para el tiempo nos falta la otra mitad.

Supongamos que F actuando sobre m es conservativa, $F(x) = -\frac{dU}{dx}$. Dibujemos $U(x)$



1, 2 y 3 son puntos de equilibrio,

$F(x_1) = -\frac{dU(x_1)}{dx} = 0$ (idem para x_2, x_3)

En x_1, x_2, x_3 puedo decidir si el equilibrio es (in)estable calculando el signo de F cerca de ese punto.

1) Si $\frac{dU(x_{eq})}{dx} > 0 / < 0$ si me muevo a la izq. o der. entonces $F < 0 / > 0$ si me muevo a izq. / der.

$\Rightarrow$ F me vuelve a empujar a x_{eq} $\Rightarrow x_{eq}$ ESTABLE 2

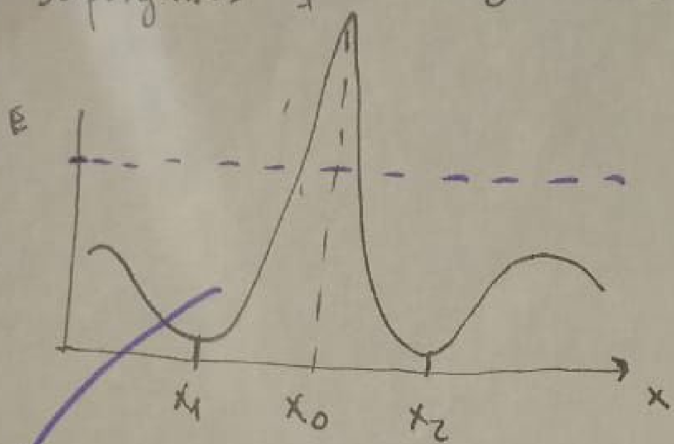
2) Si $\frac{dU}{dx}(x_{eq}) < 0 / > 0$ si me muevo a izq. / der.

$\Rightarrow F < 0 / > 0 \Rightarrow x_{eq}$ es INESTABLE 1

3) Si $\frac{dU(x_{eq})}{dx} < 0$ o > 0 siempre entonces,

$\Rightarrow F < 0$ ó > 0 siempre $\Rightarrow x_{eq}$ SEMIESTABLE 3

Supongamos que conozco E = energía mecánica total



¿Es posible para la partícula desplazarse desde x_1 a x_2?

No! En x_0 tendríamos,

"Barrera de potencial"

$$E(x_0) = K(x_0) + U(x_0) = E$$

$$K(x_0) = E - U(x_0) < 0 \rightarrow \text{Imposible porque } K(x_0) = \frac{m v_0^2}{2}$$

Comentario muy útil:

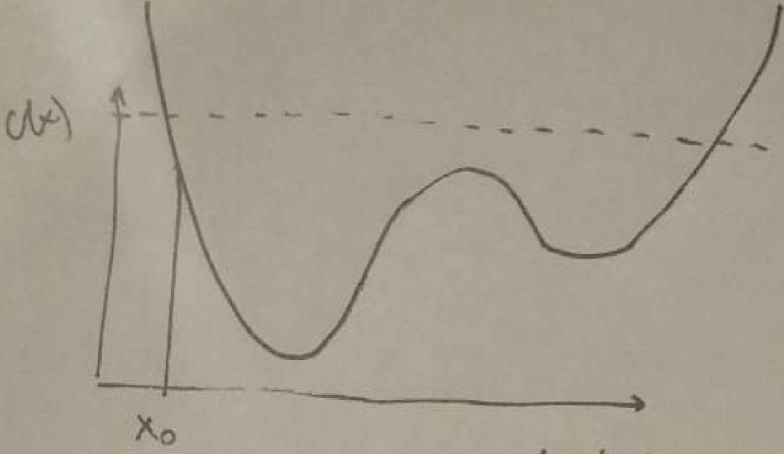
Los diagramas de potencial son herramientas muy intuitivas. Nos permiten entender un problema físico como el problema de una pelotita moviéndose bajo g sobre la curva de $U(x)$.

Los pozos de $U(x)$ son eq. estables para la partícula (¡y también para la pelotita)

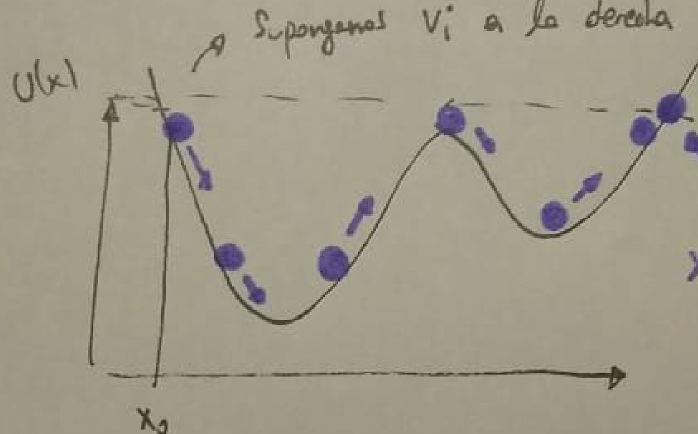
Los picos de $U(x)$ son eq. inestables para la partícula (¡y también para la pelotita!)

La recta E = cte marca los límites del movimiento de la partícula (¡y también de la pelotita!)

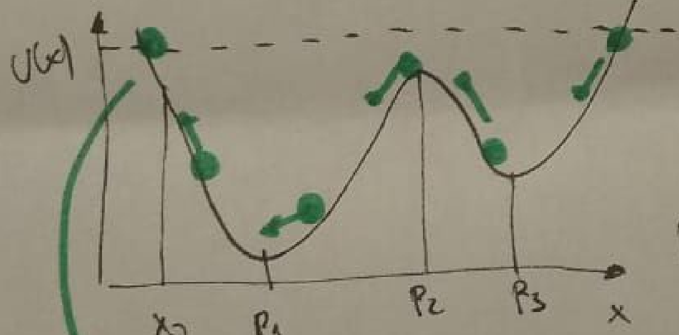
La evolución futura del sistema viene dada por lo que una pelotita haría si la suelto en la curva de $U(x)$. **Ante la duda... ¿qué haría la pelotita?**



Si empieza la partícula su movimiento en x_0 con E, ¿Cómo va a ser su movimiento en el futuro?



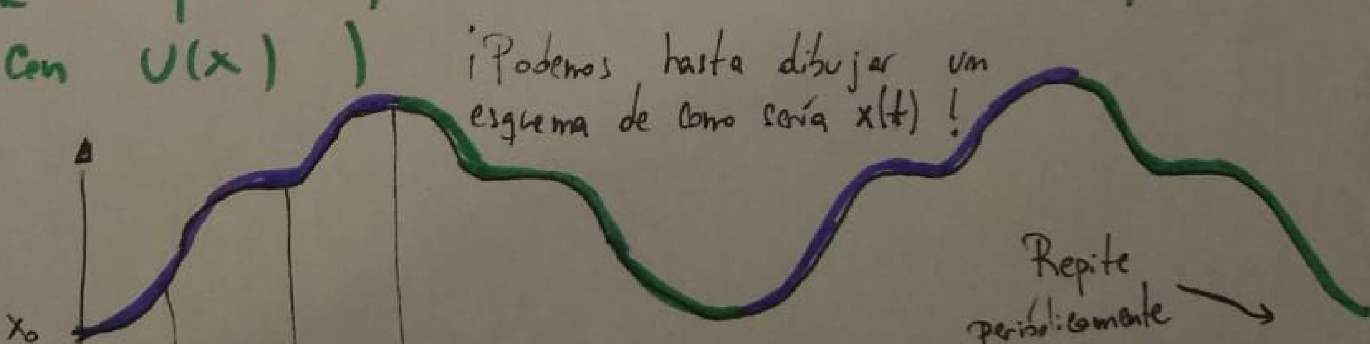
llega a este punto con $v=0$ y toda la energía E transformada en U.



P_1, P_2, P_3 = puntos de inflexión

Acá se pasa del punto inicial x_0 donde había empezado con $v \neq 0$ y llega hasta el punto donde toda la E es potencial (intersección de la línea punteada con $U(x)$)

¡Podemos hasta dibujar un esquema de como sería $x(t)$!



Para cerrar el tema, algunas preguntas conceptuales. | EMOJI QUE PIENSA AQUÍ

¿Cuál es la relación entre la conservación de $\vec{P}$, $\vec{L}$ y W sobre una partícula y sobre un sistema de partículas? | 13/13

PARA UNA PARTÍCULA:

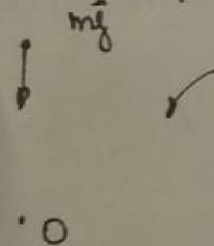
① Si $\vec{P} = cte \Rightarrow \vec{F}^{ext} = 0$.

Si $\vec{F}^{ext} = 0 \Rightarrow W = 0$

② Pero en cambio, si $W = 0$ puede ocurrir que $\vec{P}$ cambie por fuerzas que no hacen trabajo (ej. mov. circular uniforme)

③ Si $\vec{L} = cte \Rightarrow \vec{\tau}^{ext} = 0$

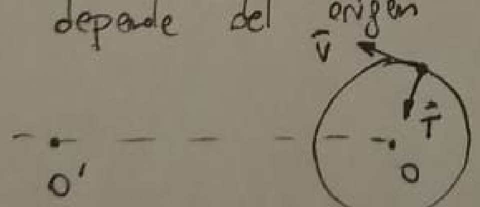
¿Significa que $W = 0$? No! Por ejemplo,



La fuerza peso no realiza torque desde O, $\vec{L}$ se conserva, pero $W \neq 0$.

④ Al revés, si $W = 0$, ¿puede ser que $\vec{L} \neq cte$?

Sí, porque depende del origen

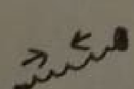


Desde O, $\vec{T}$ no hace torque. $\vec{L} = cte$.

Desde O', $\vec{T}$ hace torque. $\vec{L} \neq cte$

¡Pero el trabajo de $\vec{T}$ no depende del origen!

⑤ En el caso de un sistema de partículas, $\vec{P} = cte$, ¿significa que no hay W sobre el sistema?



} No hay $\vec{F}^{ext}$. El resorte está inicialmente comprimido. Al estirarse hace W sobre las masas. ¡Las fuerzas internas al sistema pueden hacer W!