Guía 1: Cinemática

Problema 10

Nos proponen estudiar dos tipos de movimientos: un auto azul realiza una trayectoria circular de radio R desde el punto O al P y un vehículo rojo hace una trayectoria recta entre los mismos extremos. Además notemos y tengamos presente que los movimientos comienzan en tiempos iniciales distintos.

Para ser ordenados vamos a estudiar el movimiento de cada auto por separado.

a)

Este inciso pregunta sobre el tiempo que le lleva al auto azul ir del punto O al P.

Antes que nada vamos a fijar los sistemas de coordenadas. Por un lado está el sistema cartesiano con versores $\hat{x}$ e $\hat{y}$, pero como el movimiento es circular vamos a usar un sistema de coordenadas polares para describir cómodamente la trayectoria del auto azul sobre la circunferencia. En la figura 1 se muestran ambos sistemas con sus versores. Presten atención a la convención de las coordenadas polares. Dado un sistema cartesiano xy el ángulo θ será cero sobre el eje x positivo y crecerá en sentido hacia el eje y positivo. Como en la figura 1 el eje x fue definido en el sentido contrario al usual, el ángulo θ será el que se muestra ahí mismo. Acá no hay nada raro es sólo una cuestión de definición y consistencia para que podamos usar las fórmulas que ya conocemos sobre las coordenadas polares.

Si esto les genera problemas piensen que pueden o bien redefinir sus ejes desde el comienzo o bien pensar el problema análogo pero espejado que comienza en P y termina en O.

Para calcular el tiempo de viaje entre O y P vamos a encontrar la posición en función del tiempo y luego evaluaremos la posición final para así poder despejar el tiempo en el que completó el trayecto. Como mencionamos usaremos coordenadas polares para el auto azul. Su posición será

$$\vec{r}_a = r_a\,\hat{r}_a = R\,\hat{r}_a, \tag{1}$$

con $R = 90\,\text{m}$ constante de modo que $\dot{r}_a = \ddot{r}_a = 0$. En la figura 1 puede verse rápidamente que la posición inicial O corresponde a $\theta_a = 0$ y que la posición final P a $\theta_a = \pi$. Por otro lado la velocidad y aceleración serán

$$\begin{aligned} \vec{v}_a &= \dot{r}_a\,\hat{r}_a + r_a\dot{\theta}_a\hat{\theta}_a = R\dot{\theta}_a\,\hat{\theta}, & (2)\\ \vec{a}_a &= \left(\ddot{r}_a - r_a\dot{\theta}_a^2\right)\hat{r}_a + \left(r_a\ddot{\theta}_a + 2\,\dot{r}_a\dot{\theta}_a\right)\hat{\theta}_a = -R\dot{\theta}_a^2\,\hat{r}_a + R\ddot{\theta}_a\,\hat{\theta}_a. & (3) \end{aligned}$$

El enunciado nos da el dato de la aceleración angular $\ddot{\theta}_a = \Gamma_a = k\,t$ (con $k = \pi/6\ \text{s}^{-3}$, una constante con unidades). Como ya hemos discutido en el Problema 8 podemos integrar la aceleración angular y obtener la velocidad angular

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = k\,t, \tag{4}$$

entonces

$$d\dot{\theta} = k\,t\,dt. \tag{5}$$

Al integrar explícitamente hallamos

$$\int_{\dot{\theta}_a(t_{a0})}^{\dot{\theta}_a(t)} d\dot{\theta}_a = \int_{t_{a0}}^{t} k\,\tilde{t}\,d\tilde{t} \tag{6}$$

$$\dot{\theta}_a(t) = \frac{k\,t^2}{2} \tag{7}$$

donde usamos que $t_{a0} = 0\,\mathrm{s}$ y que la velocidad angular inicial $\dot{\theta}_a(t_{a0}) = 0\,\mathrm{rad/s}$ ya que parte del reposo. Integramos una vez más para hallar la posición angular y así

$$\frac{d\theta_a}{dt} = \frac{k\,t^2}{2} \tag{8}$$

$$\int_{\theta_a(0)}^{\theta_a(t)} d\theta_a = \int_0^t \frac{k\,\tilde{t}^2\,d\tilde{t}}{2} \tag{9}$$

$$\theta_a(t) = \frac{k\,t^3}{6}. \tag{10}$$

Hemos impuesto nuevamente que $t_{a0} = 0\,\mathrm{s}$ y que la posición angular $\theta_a(0) = 0\,\mathrm{rad}$. Chequeemos las unidades, θ_a es un ángulo no debería tener unidades físicas (se describe en radianes), si recordamos k tenía unidades de s^{-3} con lo cual la combinación $k\,t^3$ no tiene unidades físicas y estamos ok. Con la expresión (10) ya podemos hallar el tiempo en el que el auto azul llega al punto P ($\theta_a = \pi$). En efecto

$$\pi = \theta_a(t_P) = \frac{k\,t_P^3}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad t_P = \left(\frac{6\,\pi}{k}\right)^{1/3}. \tag{11}$$

Si reemplazamos k llegamos a

$$t_P = \sqrt[3]{36}\,\mathrm{s} = 3{,}3\,\mathrm{s}. \tag{12}$$

b)

Ahora bien nos piden que encontremos cuál debe ser la aceleración del móvil rojo para que alcance al auto azul justo en el punto P, en otras palabras nos piden que resolvamos un problema de encuentro. Concretamente debemos hallar la aceleración del móvil rojo tal que su posición en $t = t_P$ sea el punto P. Contamos con una restricción importante y es que el móvil rojo comienza su movimiento 3 s después de que arranca el auto azul. En términos de los tiempos inciales esto quiere decir que si el tiempo inicial del auto azul es $t_{a0} = 0$ s entonces el del rojo será $t_{r0} = 3$ s. Naturalmente para que exista la posibilidad de encuentro debe cumplirse que $t_{r0} < t_P$.

Para este caso vamos a usar coordenadas cartesianas ya que el movimiento es en línea recta como se ve en la figura 2. La posición será

$$\vec{r}_r = x_r\hat{x} + y_r\hat{y} = x_r\hat{x}, \tag{13}$$

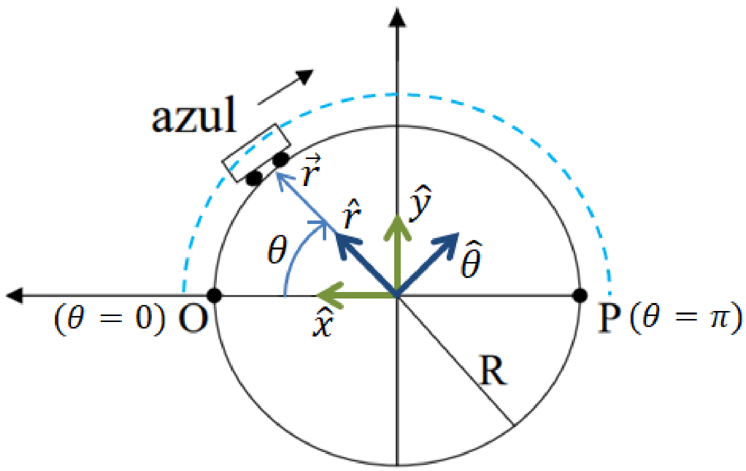

Figura 1: Esquema de movimiento circular del auto azul en el sistema de coordenadas polares.

pues sólo se mueve en la coordenada x. El punto O (posición incial) corresponde a $x_r = R$ y el punto P a $x_r = -R$. Asimismo la velocidad y aceleración serán

$$\vec{v}_r = \dot{x}_r \hat{x} \tag{14}$$

$$\vec{a}_r = \ddot{x}_r \hat{x}. \tag{15}$$

Como nos imponen una aceleración constante de la pinta $\vec{a}_r = -a_0 \hat{x}$, concluimos que $\ddot{x}_r = -a_0$ y de acá podemos empezar a integrar hasta encontrar $x_r(t)$.

Nuevamente usamos la notación de diferenciales para integrar

$$\ddot{x}_r = \frac{d\dot{x}_r}{dt} = -a_0 \tag{16}$$

$$\int_{\dot{x}_r(t_{r0})}^{\dot{x}_r(t)} d\dot{x}_r = -a_0 \int_{t_{r0}}^{t} d\tilde{t} \tag{17}$$

$$\dot{x}_r(t) = -a_0 \, (t - t_{r0}), \tag{18}$$

recordemos que el móvil rojo parte del reposo pero su tiempo inicial no es cero, sino $t_{r0} = 3$ s. Integramos una vez más con los mismos cuidados y obtenemos

$$x_r(t) - x_r(t_{r0}) = -a_0 \int_{t_{r0}}^{t} (\tilde{t} - t_{r0}) d\tilde{t} = -a_0 \int_{0}^{t-t_{r0}} t' dt', \tag{19}$$

en la última igualdad utilizamos el cambio de variables $t' = \tilde{t} - t_{r0}$, t' es simplemente un nombre, el primado no indica nada en particular. Finalmente

$$x_r(t) = R - \frac{a_0}{2} \, (t - t_{r0})^2 \tag{20}$$

donde usamos $x_r(t_{r0}) = R$. Si queremos que el auto rojo se encuentre con el azul en el punto P entonces debe suceder que $x_r(t = t_P) = -R$ y en consecuencia

$$-R = R - \frac{a_0}{2} (t_P - t_{r0})^2 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \frac{4R}{(t_P - t_{r0})^2}. \tag{21}$$

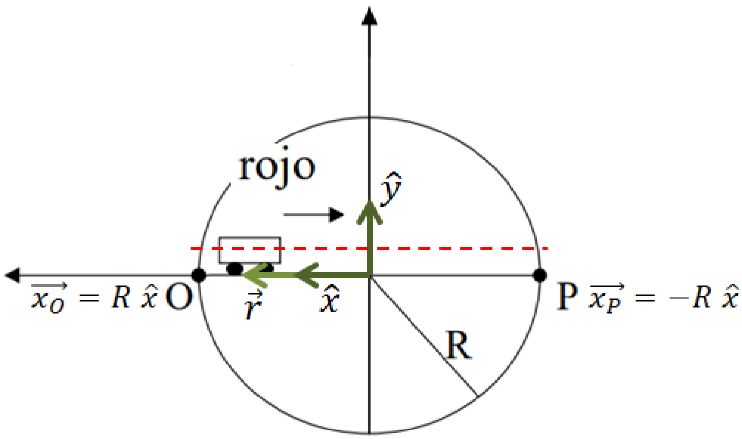

Figura 2: Esquema de movimiento lineal del auto rojo en el sistema de coordenadas cartesiano.

Esta es la expresión que nos dice cuánto debe valer a_0 en función de los datos del problema para que se produzca el encuentro. Notemos que $a_0 > 0$, pues el denominador es claramente no negativo y $R > 0$, con lo cual $-a_0 < 0$ y por ello $\vec{a}_r = -a_0\hat{x}$ apunta en sentido hacia los x negativos. Este resultado es esperable ya que el móvil parte del reposo y debe acelerar en ese sentido para tener posibilidad de enonctrarse con el auto azul. Si ponemos los valores nunméricos obtenemos $a_0 = 4000\ \mathrm{m/s^2}$ y de paso chequeamos las unidades.

Un último comentario, el denominador de la expresión (21) puede llamarles la atención, pensemos qué está pasando. El auto rojo debe recorrer una distancia $2R$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_P - t_{r0}$ con t_P el tiempo de encuentro y t_{r0} el tiempo en el que comienza a acelerar partiendo del reposo. Sabemos que $t_{r0} < t_P$ pero si t_{r0} es cada vez más próximo a t_P el auto rojo tiene cada vez menos tiempo para recorrer la misma distancia con lo cual se necesita una aceleración cada vez mayor. En el límite en el que $t_{r0} \to t_P$ la aceleración, obviamente, diverge indicando que el auto no puede estar en dos lugares distintos al mismo tiempo. Al menos no un auto clásico.