Repaso sobre coordenadas polares

En un sistema de coordenadas cartesianas los versores $\hat{x}$ e $\hat{y}$ son los vectores unitarios con dirección en x e y y sentido hacia los valores positivos respectivamente. Estos versores están fijos y son independientes del punto del espacio que una quiera describir. Es posible definir el vector posición $\vec{r}$ del punto P de la siguiente forma

$$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}, \tag{1}$$

como se muestra en la figura 1. Sin embargo podemos describir el mismo punto P pero en coordenadas polares r y θ, como también notamos en la figura 1. En el esquema vemos que $r = |\vec{r}|$ representa el tamaño del vector posición de P y θ el ángulo comprendido entre $\vec{r}$ y el eje $x > 0$, midiendo ángulos positivos desde el eje $x > 0$ hacia el eje $y > 0$. La relación entre ambos sistemas es

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \tag{2}$$

con $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. La relación inversa es

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(y/x\right) \end{cases}. \tag{3}$$

A su vez se definen los versores polares como los vectores unitarios $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$. El primero, $\hat{r}$, apunta en la dirección y sentido de $\vec{r}$ y el segundo, $\hat{\theta}$, es perpendicular a $\hat{r}$ y apunta en el sentido creciente de la coordenada θ. En el caso de coordenadas polares el vector posición se escribe como

$$\vec{r} = r\,\hat{r}. \tag{4}$$

Si tenemos dos puntos distintos Q y Q' como se muestra en la figura 2, debemos notar que los versores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$, correspondientes a Q, no son los mismos que $\hat{r}'$ y $\hat{\theta}'$, correspondientes a Q'. Esto nos permite entender que, a diferencia de $\hat{x}$ y $\hat{y}$, los versores polares **no** son fijos y dependen del punto del plano a describir. De todas formas siempre podemos expresar los versores polares en términos de los cartesianos según

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y} \tag{5}$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}\,, \tag{6}$$

y viceversa

$$\hat{x} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta} \tag{7}$$
$$\hat{y} = \sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}\,. \tag{8}$$

Si bien todos los movimientos pueden ser descriptos en cualquier sistema de coordenadas resulta cómodo elegir uno u otro dependiendo sus características. Cuando tratemos movimientos de partículas sobre arcos de circunferencia las coordenadas polares serán particularmente útiles.

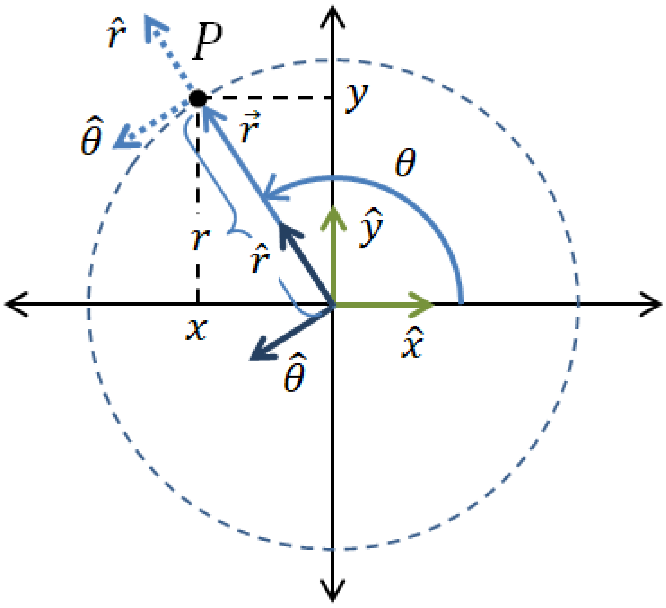

Figura 1: Sistemas de coordenadas cartesiano y polar para un mismo punto P.

Ahora pensemos en describir la trayectoria de una partícula puntual en el plano. Para ello definimos el vector posición de esa partícula como $\vec{r}$. Conforme avance el tiempo la partícula cambiará su posición en el plano, $\vec{r}(t)$, y en consecuencia los versores polares que la describen tiempo a tiempo también cambiarán. Así, estos versores adquieren una dependencia temporal. Por el contrario los versores cartesianos siempre permanecen constantes.

En términos concretos podemos escribir la posición tanto en cartesianas como en polares usando las relaciones (1)-(2) de modo que

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} = r(t)\cos\big(\theta(t)\big)\,\hat{x} + r(t)\cos\big(\theta(t)\big)\,\hat{y} = \\ &= r(t)\Big[\cos\big(\theta(t)\big)\,\hat{x} + \cos\big(\theta(t)\big)\,\hat{y}\Big] = r(t)\,\hat{r}(t), \end{aligned} \tag{9}$$

donde explicitamos la dependencia con el tiempo y en la última igualdad usamos la ecuación (5). De esta forma vemos claramente que los versores polares dependen del tiempo, lo cual será vital para calcular derivadas correctamente. Relajando la notación, ya sin explicitar la dependencia temporal, calculamos las derivadas temporales de cada versor polar. Para derivar $\hat{r}$ partimos de la expresión (5) y obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \frac{d\big(\cos(\theta)\,\hat{x}\big)}{dt} + \frac{d\big(\sin(\theta)\,\hat{y}\big)}{dt} = \frac{d\big(\cos(\theta)\big)}{dt}\hat{x} + \frac{d\big(\sin(\theta)\big)}{dt}\hat{y} = \\ &= -\dot{\theta}\sin(\theta)\,\hat{x} + \dot{\theta}\,\cos(\theta)\hat{y} = \dot{\theta}\Big(-\sin(\theta)\,\hat{x} + \cos(\theta)\,\hat{y}\Big) = \dot{\theta}\,\hat{\theta}, \end{aligned} \tag{10}$$

en la primera línea usamos que los versores cartesianos $\hat{x}$ y $\hat{y}$ son constantes, en la segunda línea utilizamos la regla de la cadena

$$\frac{d\big(\sin(\theta)\big)}{dt} = \frac{d\big(\sin(\theta)\big)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \cos(\theta)\,\dot{\theta}$$

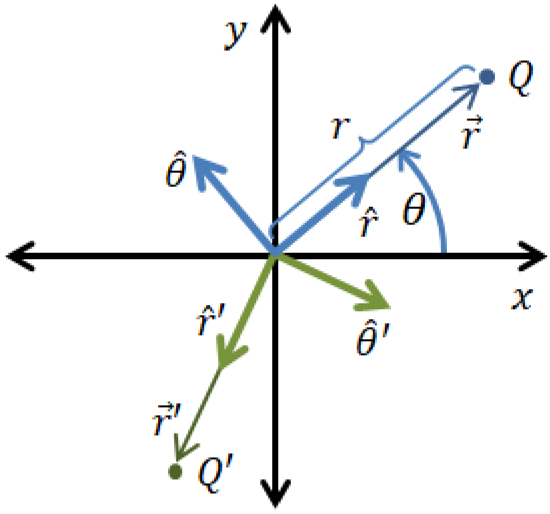

Figura 2: Sistema de coordenadas polares para dos puntos del plano diferentes. Los versores polares que decriben cada punto son distintos.

$$\frac{d\big(\cos(\theta)\big)}{dt} = \frac{d\big(\cos(\theta)\big)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\sin(\theta)\,\dot{\theta},$$

y finalmente la relación (6).

Para $\hat{\theta}$ procedemos de la misma forma y obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= -\frac{d\big(\sin(\theta)\,\hat{x}\big)}{dt} + \frac{d\big(\cos(\theta)\,\hat{y}\big)}{dt} = -\frac{d\big(\sin(\theta)\big)}{dt}\hat{x} + \frac{d\big(\cos(\theta)\big)}{dt}\hat{y} = \\ &= -\dot{\theta}\cos(\theta)\,\hat{x} - \dot{\theta}\,\sin(\theta)\hat{y} = -\dot{\theta}\Big(\cos(\theta)\,\hat{x} + \sin(\theta)\,\hat{y}\Big) = -\dot{\theta}\,\hat{r}. \end{aligned} \tag{11}$$

Resumiendo

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\,\hat{\theta} \qquad \text{y} \qquad \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\,\hat{r}. \tag{12}$$

Para finalizar vamos a ver cómo son las cantidades cinemáticas posición, velocidad y aceleración. En coordenadas cartesianas tenemos

$$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} \tag{13}$$
$$\vec{v} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} \tag{14}$$
$$\vec{a} = \ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y}. \tag{15}$$

Por otro lado en coordenadas polares las expresiones son un poquito más complicadas. Recordemos que la posición en polares siempre se escribe como

$$\vec{r} = r\hat{r}. \tag{16}$$

Una vez definida la posición calculamos la velocidad y la aceleración por definición. Comencemos con la velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\hat{r}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}, \tag{17}$$

acá simplemente usamos la regla de la derivada del producto y las relaciones (12). Con las mismas propiedades podemos calcular la aceleración y así

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\,(\dot{r}\,\hat{r})}{dt} + \frac{d\big(r\,\dot{\theta}\hat{\theta}\big)}{dt} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\dot{\hat{r}} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\,\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + r\,\dot{\theta}\,\dot{\hat{\theta}} = \\
&= \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\,\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + r\,\dot{\theta}\big(-\dot{\theta}\,\hat{r}\big) = \\
&= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\theta}\,. \qquad (18)
\end{aligned}$$

En resumen (y para anotar) la **posición**, **velocidad** y **aceleración** de la partícula en **coordenadas polares** son

$$\vec{r} = r\,\hat{r} \qquad (19)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} \qquad (20)$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\theta}\,. \qquad (21)$$

Asimismo recordamos que se definen la **velocidad angular** y **acelaración angular** como $\omega = \dot{\theta}$ y $\gamma = \ddot{\theta}$ respectivamente.