Física 1, primer cuatrimestre de 2020.

Problema 1.12

Ignacio Perito (iperito@df.uba.ar)

El modelo de catapulta que propone el problema consiste de una partícula engarzada a un riel circular, de radio R y un mecanismo que imprime sobre la misma una aceleración angular dependiente de la posición según

$$\ddot{\varphi} = -\frac{k(n+1)}{\pi^{n+1}}\varphi^n\,, \tag{1}$$

donde φ es el ángulo definido en la figura 1. La partícula parte del reposo en el punto más bajo de la circunferencia ($\varphi = \pi$) y se desprende del riel en el punto más alto del mismo ($\varphi = 0$).

En la figura están dibujados los ejes polares que vamos a utilizar para describir el movimiento mientras la partícula se encuentra engarzada al riel. El origen está en el centro de la circunferencia y, como es usual, tomamos el versor tangencial $\hat{e}_\varphi$ en la dirección de ángulos crecientes. Esto es sólo una elección y no es la única correcta: hay quienes pueden haber preferido trabajar con el ángulo complementario, medido desde el punto 1, es decir $\theta \equiv \pi - \varphi$. En dicho caso, habrá que tener el cuidado de reescribir (1) de manera apropiada, sin pasar por alto que $\ddot{\varphi} = -\ddot{\theta}$. Quienes hayan trabajado con el ángulo complementario, tendrán:

$$\ddot{\theta} = \frac{k(n+1)}{\pi^{n+1}}(\pi - \theta)^n\,. \tag{2}$$

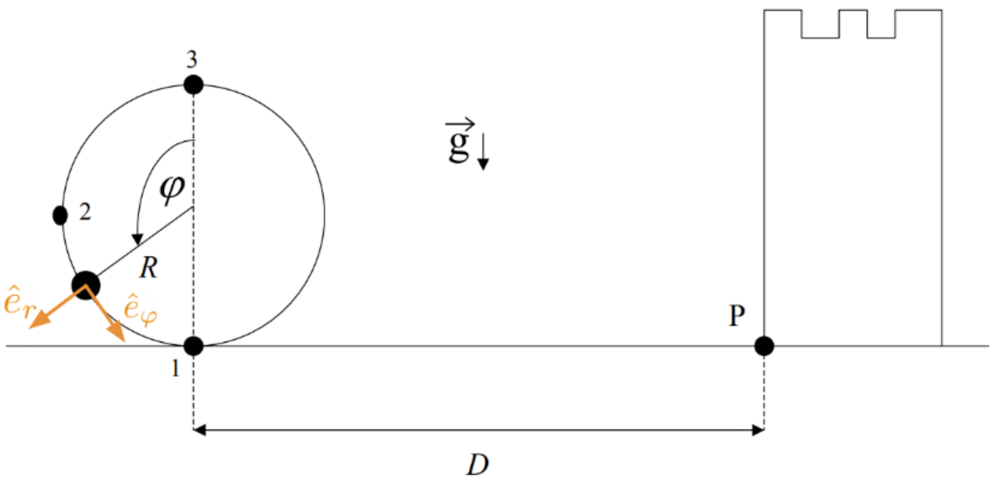

Figura 1: Diagrama del problema. Notar con cuidado la elección de los versores polares.

1. Inciso (a)

En este inciso la partícula se mantiene fija al riel circular, así que la velocidad tangencial (la única velocidad que tiene en este régimen) en el sistema de coordenadas elegido es:

$$\vec{v} = R\dot{\varphi}\hat{e}_{\varphi} \,, \tag{3}$$

por tratarse de un movimiento circular. Nos piden la velocidad como función del ángulo φ, así que nuestro objetivo es obtener $\dot{\varphi}(\varphi)$. Para ello, reescribimos (1) usando nuestra ya vieja y querida jugarreta:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{k(n+1)}{\pi^{n+1}}\varphi^n \,, \tag{4}$$

de donde se desprende:

$$\int_0^{\dot{\varphi}} d\tilde{\dot{\varphi}}\tilde{\dot{\varphi}} = -\frac{k(n+1)}{\pi^{n+1}}\int_{\pi}^{\varphi} d\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}^n \,, \tag{5}$$

donde hemos hecho uso de las condiciones iniciales en los límites inferiores de las integrales: cuando $\varphi = \pi$, la partícula se encuentra en reposo y por ende $\dot{\varphi} = 0$. Integrando y evaluando la expresión anterior, obtenemos:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = -\frac{k(n+1)}{\pi^{n+1}}\left[\frac{\varphi^{n+1}}{n+1} - \frac{\pi^{n+1}}{n+1}\right] \Rightarrow \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = k\left[1 - \left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^{n+1}\right] \,. \tag{6}$$

El enunciado indica que trabajemos en el caso particular en el que $n = 4$, así que lo anterior se reduce a:

$$\dot{\varphi}^2 = 2k\left[1 - \left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^5\right] \,. \tag{7}$$

A modo de chequeo, podemos notar que cuando $\varphi = \pi$, la velocidad angular se anula, y crece a medida que el ángulo toma valores cada vez más chicos. Por otro lado, notar que la constante k es positiva y tiene unidades de velocidad angular al cuadrado (nos va a ser útil para chequear unidades a medida que avancemos).

La expresión (7) nos da el cuadrado de la velocidad angular como función del ángulo, por lo que al despejar la velocidad angular debemos tener cuidado en asignar el signo que tiene sentido físico. En este caso, la solución que nos interesa es aquella con $\dot{\varphi} < 0$, puesto que el ángulo decrece a medida que la partícula sube por la catapulta. Teniendo en cuenta esto y (3), concluimos que:

$$\vec{v}(\varphi) = -\sqrt{2k\left[1 - \left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^5\right]}R\hat{e}_{\varphi} \,, \tag{8}$$

que es la expresión pedida para la velocidad tangencial como función del ángulo. Notar que el signo es el esperado (la velocidad apunta *al revés* que el versor $\hat{e}_{\varphi}$ y las unidades son, como era de esperar, de longitud sobre tiempo. Nos pedían también la velocidad en el punto 2 de la catapulta, lo cual se obtiene simplemente evaluando en $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2k\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}R\hat{e}_\varphi = -\sqrt{\frac{31k}{16}}R\hat{e}_\varphi \,. \tag{9}$$

No lo piden, pero ya que nos será útil a continuación, calculemos también la velocidad con la que la partícula llega al punto más alto de su trayectoria (es decir, el punto 3):

$$\vec{v}_3 = \vec{v}\,(\varphi = 0) = -\sqrt{2k}R\hat{e}_\varphi \,. \tag{10}$$

2. Inciso (b)

Una vez que la partícula deja el riel (esto sucede en el punto más alto del mismo) continúa su trayectoria sometida únicamente al efecto del campo gravitatorio terrestre. Tenemos entonces, a partir de allí, un tiro oblicuo cuyas condiciones iniciales están dadas por la situación final del inciso anterior. Para resolver este inciso, desde luego, somos libres de elegir un nuevo sistema de coordenadas (lo más cómodo, siendo un tiro oblicuo, es utilizar cartesianas) independiente del anterior. El único cuidado que hay que tener es el de empalmar bien el instante final de la descripción en polares con el instante inicial de la nueva descripción que, como dijimos, será en cartesianas. Tomemos un sistema cartesiano con origen en el punto 1, con el eje y apuntando hacia arriba y el eje x apuntando hacia la torre. Notar que en el punto 3 del riel, el versor tangencial de polares del inciso anterior es igual y opuesto a nuestro versor cartesiano asociado a la dirección x, es decir, tenemos: $\hat{e}_\varphi\,(\varphi = 0) = -\hat{e}_x$. Teniendo en cuenta esto, el tiro oblicuo que describe la trayectoria de la partícula cuando se suelta del riel tiene las condiciones iniciales:

$$x(0) = 0 \;,\; y(0) = 2R \;,\; \dot{x}(0) = \sqrt{2k}R \;,\; \dot{y}(0) = 0 \,, \tag{11}$$

y las ecuaciones diferenciales que rigen la evolución de las dos variables son:

$$\ddot{x} = 0 \quad , \quad \ddot{y} = -g \;, \tag{12}$$

Integrando estas ecuaciones y ajustando las condiciones iniciales, tenemos:

$$x(t) = \sqrt{2k}Rt \quad , \quad y(t) = 2R - \frac{gt^2}{2} \,. \tag{13}$$

Si queremos que la partícula impacte con el punto P de la torre (ver figura 1), lo que queremos es la coordenada y se anule cuando la coordenada x valga D. Si llamamos t_{imp} al instante de impacto, tenemos:

$$x(t_{imp}) = \sqrt{2k}Rt_{imp} = D \Leftrightarrow t_{imp} = \frac{D}{\sqrt{2k}R} \,, \tag{14}$$

por lo que:

$$y(t_{imp}) = 0 \Leftrightarrow 2R - \frac{gD^2}{4kR^2} = 0\,, \tag{15}$$

de donde podemos despejar la distancia D en términos de g, R y k según:

$$D = \sqrt{\frac{8kR^3}{g}}\,. \tag{16}$$

Como es de esperar, la distancia D es una función creciente del radio de la catapulta (cuanto más grande sea la catapulta, más lejos llega el proyectil antes de tocar el piso) y una función decreciente de la intensidad del campo gravitatorio g. Por otro lado, es fácil ver que el miembro derecho de la expresión anterior, como debe ser, tiene unidades de longitud.