Física 1, primer cuatrimestre de 2020.

Problemas 1.1 y 1.3

Ignacio Perito (iperito@df.uba.ar)

En la clase de hoy, además de darle una breve mirada a la guía de repaso, resolvimos dos ejercicios de la guía 1 (cinemática). A pedido del público[1], acá van pasados en limpio.

1. Problema 1

Nos dicen que tenemos una partícula sometida a un movimiento rectilíneo y que la posición de la misma depende del tiempo según la ley:

$$x(t) = -kt^3 + bt^2 \,, \tag{1}$$

donde k y b son constantes positivas (¿cuáles deben ser las unidades de cada una de estas constantes?). El primer inciso nos pide hallar la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo. Dado que la velocidad es la primera derivada de la posición con respecto al tiempo, tenemos:

$$v(t) \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{x}(t) = -3kt^2 + 2bt \,, \tag{2}$$

mientras que la aceleración (derivada segunda de la posición con respecto al tiempo -o derivada primera de la velocidad-) resulta:

$$a(t) \equiv \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{x}(t) = -6kt + 2b \,. \tag{3}$$

Vemos que $v(t)$ resulta una función cuadrática de concavidad negativa con raíces en $t = 0$ y $t = \frac{2b}{3k}$, por lo que alcanza su máximo valor en $t = \frac{b}{3k}$ (justo en el medio de ambas raíces). Por otro lado, la aceleración es una función lineal de pendiente negativa que cruza al eje horizontal en $t = \frac{b}{3k}$, lo cual es razonable, puesto que la aceleración debe anularse cuando la velocidad alcanza un extremo. La figura 1 muestra ambos gráficos en un mismo sistema de ejes.

El segundo inciso nos pide los instantes en los cuales la velocidad se anula (que ya los mencionamos antes), y las correspondientes posiciones. Para ello, simplemente hay que reemplazar ambos valores en la ecuación (1), lo cual queda para ustedes.

[1] No sé por qué, dado que el pizarrón se veía bárbaro.

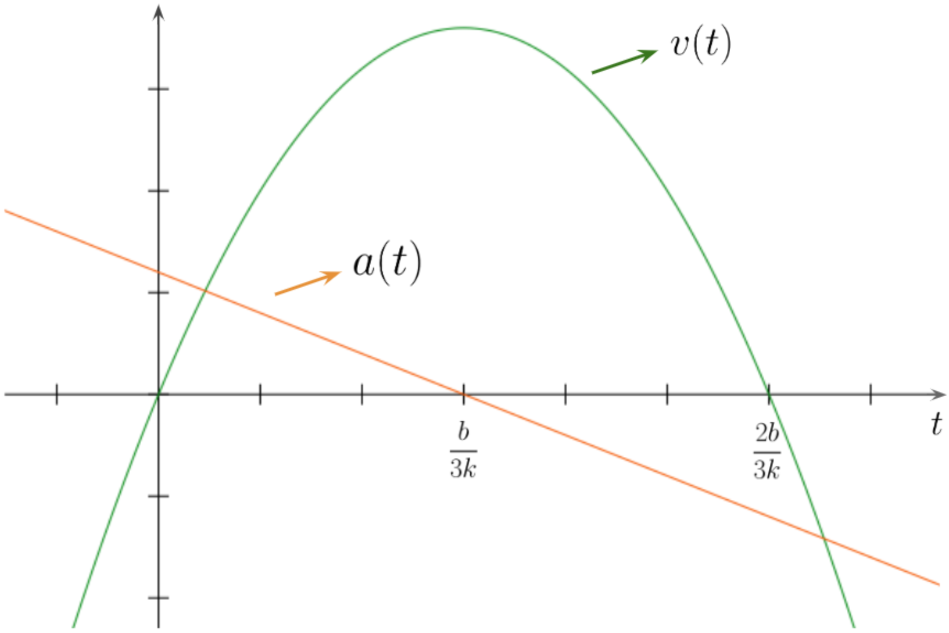

Figura 1: Gráfico de la velocidad (verde) y la aceleración (naranja) como funciones del tiempo.

Finalmente, nos piden describir cualitativamente el movimiento, indicando para cuáles intervalos resulta acelerado y para cuáles resulta desacelerado. Esto es sencillo si miramos con un poco de cariño la figura 1: para $t \in (-\infty, 0)$, la partícula tiene velocidad negativa (se mueve hacia los valores negativos de x) y aceleración positiva, por lo que está *desacelerando*, hasta detenerse en el instante $t = 0$. Para $t \in (0, \frac{b}{3k})$, la partícula tiene velocidad positiva y aceleración aún positiva, por lo que se mueve de manera acelerada hasta alcanzar su máxima velocidad[2] en $t = \frac{b}{3k}$. A partir de dicho instante, y hasta $t = \frac{2b}{3k}$, la velocidad comienza a disminuir puesto que la aceleración pasa a ser negativa, por lo que en este tramo el movimiento resulta nuevamente desacelerado, hasta que la partícula se detiene en $t = \frac{2b}{3k}$ y vuelve a moverse hacia los valores negativos de x de manera acelerada (pues la aceleración resulta también negativa a partir de allí) para todo $t > \frac{2b}{3k}$.

2. Problema 3

En este problema, a diferencia del anterior, $x(t)$ no es el punto de partida sino el objetivo. En los tres casos, nos dan la aceleración del móvil en función de distintas variables, y tenemos que arreglárnosla para llegar desde allí hasta la ecuación horaria (posición en función del tiempo). Llegar de la aceleración a la posición requiere dos integrales (como veremos, no siempre son del

[2]Por máxima velocidad nos referimos al valor numérico más grande. Desde luego, la rapidez (módulo de la velocidad) no está acotada y alcanza valores tan grandes como se quiera a medida que $t \to \pm\infty$.

todo directas), por lo que deberemos determinar dos constantes de integración, y por ello son necesarias dos condiciones iniciales. En este caso, sabemos que a $x(t=0)=0$ y $v(t=0)=v_0$.

2.1. Inciso (a)

Tenemos que:

$$a = kt^2, \tag{4}$$

donde k es una constante positiva. En este caso, el problema se resuelve de manera bastante directa, pues tenemos:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = kt^2 \Rightarrow v(t) = \frac{kt^3}{3} + cte\,, \tag{5}$$

donde la constante de integración la obtenemos imponiendo $v = v_0$ cuando $t = 0$ lo cual arroja:

$$v(t) = k\int t^2 dt = \frac{kt^3}{3} + v_0\,. \tag{6}$$

Para obtener $x(t)$, integramos nuevamente. Ya que estamos, lo hacemos con la estrategia alternativa de tomar integrales definidas e imponiendo las condiciones iniciales en los bordes inferiores de las integrales:

$$\int_{x_0=0}^{x} d\hat{x} = \int_{t_0=0}^{t}\left(\frac{k\hat{t}^3}{3} + v_0\right)d\hat{t} \Rightarrow x(t) = \frac{kt^4}{12} + v_0 t\,. \tag{7}$$

También nos piden $x(v)$. De la ecuación (6) podemos despejar el tiempo como función de la velocidad según:

$$t = \sqrt[3]{\frac{3(v-v_0)}{k}}\,, \tag{8}$$

reemplazando esto en la expresión para $x(t)$, obtenemos la expresión deseada (queda de tarea el reemplazo).

2.2. Inciso (b)

En este caso no tenemos una fórmula explícita para la aceleración como función del tiempo, así que la cosa es un poco más sutil que en el inciso anterior. Tenemos:

$$a = -kv^2\,, \tag{9}$$

donde k es nuevamente una constante positiva. Resulta conveniente reescribir esta expresión como:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2\,, \tag{10}$$

que, como charlamos hoy, es un típico caso de las ecuaciones diferenciales que aprendemos a resolver en análisis del CBC. Para resolver, separamos las variables e integramos[3]:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{d\hat{v}}{\hat{v}^2} = -k \int_0^t \hat{t} d\hat{t} \Rightarrow -\frac{1}{\hat{v}}\bigg|_{v_0}^{v} = -kt \Rightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = kt \,. \tag{11}$$

Despejando v de la última expresión, llegamos a:

$$v(t) = \frac{v_0}{v_0 kt + 1} \,. \tag{12}$$

Ahora que tenemos $v(t)$, podemos obtener $x(t)$ por integración directa:

$$x(t) = \int_0^t \frac{v_0}{v_0 k\hat{t} + 1} d\hat{t} = \frac{1}{k} \ln\left(v_0 kt + 1\right) \,. \tag{13}$$

Finalmente, para obtener $x(v)$, procedemos igual que en el inciso anterior.

2.3. Inciso (c)

Este es el que les quedaba a ustedes, pero repasemos el truco necesario para simplificar la ecuación diferencial en este caso. Tenemos:

$$a = kvx \,, \tag{14}$$

con k una constante positiva. El problema aquí es que, al menos a primera vista, no podemos reducirlo a una ecuación donde sólo aparezcan dos variables para separar e integrar como hicimos recién. Por ejemplo, unx podría escribir:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = kvx \,, \tag{15}$$

lo cual involucra la velocidad, el tiempo, y la posición. El truco es aprovechar la regla de la cadena. Nada nos impide pensar a la velocidad como función de la posición en lugar del tiempo, es decir: si pensamos $v(t) = v(x(t))$, la derivada en el miembro izquierdo de la última expresión resulta:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} v \,, \tag{16}$$

donde, en el primer paso, derivamos utilizando la regla de la cadena[4] y, en el segundo, reemplazamos $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$. En resumen, tenemos que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} v$, y si reemplazamos en la ecuación (15) llegamos a:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} v = kvx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = kx \,, \tag{17}$$

que resulta una ecuación separable como la del inciso anterior. A partir de acá, siguen ustedes.

[3] Queda de tarea repasar por qué este truquito notacional es equivalente a lo que hacíamos en el CBC.

[4] Notar que, a modo de regla memotécnica, podemos pensar que "multiplicamos y dividimos por el diferencial de x" y, ya que estamos, hacemos berrinchar a algunx matemáticx.