# Nota sobre derivadas, integrales y diferenciales

Esta nota solamente pretender generar un vínculo entre sus conocimientos y experiencias previas en el manejo de derivadas e integrales y lo que empezamos a usar en esta materia desde la primera clase.

La notación $f'(x)$ la conocemos todes y representa la derivada de $f$ respecto de $x$. En esta materia definimos dos nuevas notaciones que representan la derivada de una función, por ejemplo la posición $x(t)$, respecto del tiempo:

$$\dot{x}(t) \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

La primera no causa muchos problemas pero entendemos que la segunda puede generar dudas. Trabajémosla un poco.

En principio, la notación

$$\frac{dx}{dt} \tag{2}$$

no es estrictamente un cociente. Es una combinación de símbolos que tal vez son más claros si los escribimos de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt}\big(\, x \,\big), \tag{3}$$

implicando que el símbolo $d/dt$ es análogo al primado o al punto. De hecho de esta forma es fácil definir la notación de la derivada segunda respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}\Big(\, x \,\Big)\Big) = \frac{d^2}{dt^2}\Big(\, x \,\Big) = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{4}$$

En la siguiente tabla unificamos las notaciones

| CBC | F1 | |
|---|---|---|
| $x'(t)$ | $\dot{x}(t)$ | $\frac{dx}{dt}$ |
| $x''(t)$ | $\ddot{x}(t)$ | $\frac{d^2x}{dt^2}$ |

Ahora miremos un momento de dónde viene esta notación y cómo trabajar con ella. Para ser prácticos asumamos que tenemos un movimiento unidimiensional que se encuentra completamnete en la dirección $x$ y entonces la posición, velocidad y aceleración son

$$\vec{x}(t) = x(t)\,\hat{x} \tag{5}$$
$$\vec{v}(t) = v(t)\,\hat{x} \tag{6}$$
$$\vec{a}(t) = a(t)\,\hat{x}. \tag{7}$$

Usemos sólo $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$. Sabemos que dada la posición en función del tiempo $x(t)$, la velocidad cumple $v(t) = \dot{x}(t)$ y la aceleración $a(t) = \ddot{x}(t)$.

En estas circunstancias se puede definir la velocidad media del movimiento entre dos tiempos $t_0$ y $t$ tal que

$$v_m = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \tag{8}$$

claramente $v_m$ no nos da información sobre el movimiento para los tiempos intermedios entre $t$ y $t_0$, sólo nos da una expresión promedio. Pues bien, si queremos saber qué velocidad tiene el móvil tiempo a tiempo definimos la velocidad instantánea (que para nosotros es simplemente la velocidad) tomando intervalos de tiempo $\Delta t$ *muy pequeños*, es decir con $t \to t_0$, de forma tal que

$$v(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}. \tag{9}$$

El denominador tiende a cero y por continuidad del movimiento el numerador también. Es por ello que podemos hacer el siguiente pase mágico y definir

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \tag{10}$$

de acá se ve que el símobolo $dx/dt$ no es simplemente un cociente porque en el medio hay un límite. Sin embargo podemos entender que $dx$ y $dt$ representan los llamados diferenciales, que son las diferencias $\Delta x$ y $\Delta t$ pero cuando ambas cantidades son infinitesimalmente pequeñas (tienden a cero).

Finalmente vamos a ver cómo estos conceptos y en particular esta notación de diferenciales puede ayudarnos a resolver problemas típicos de integración. Analicemos el siguiente ejercicio: a partir de la velocidad $v(t) = k\,t$, con $k = 1\,\mathrm{m/s^2}$, y la condición inicial $x(0) = 0$ hallar la posición, $x(t)$, para todos los tiempos posteriores a $t = 0$.

Sabemos que $\dot{x}(t) = v(t)$ entonces tenemos la intuición correcta de que debemos integrar para conocer $x(t)$. Tenemos dos opciones equivalentes que ya comentamos en clase, por un lado podemos usar explícitamente el teorema fundamental del cálculo (o su primer corolario) tal y como lo han visto. Como $x(t)$ es una primitiva de $v(t)$ entonces

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(\tilde{t})\, d\tilde{t}, \tag{11}$$

con $\tilde{t}$ una variable muda de integración, la variable $t$ queda en el límite de integración superior. Haciendo las cuentas

$$x(t) - x(0) \quad = \quad k \int_0^t \tilde{t}\, d\tilde{t} = k \left.\frac{\tilde{t}^2}{2}\right|_0^t = \frac{k\,t^2}{2} \tag{12}$$

$$\Longrightarrow$$

$$x(t) \quad = \quad x(0) + \frac{k\,t^2}{2} = \frac{k\,t^2}{2}, \tag{13}$$

dond usamos que la condición inicial $x(0) = 0$. Recordemos que siempre que integremos vamos a necesitar condiciones iniciales para definir las constantes integración.

La otra opción es usar la notación

$$v(t) = \frac{dx}{dt}. \tag{14}$$

Si lo pensamos en términos de los diferenciales que describimos en (10) podemos argumentar que como el intervalo de tiempo $dt$ es *muy pequeño* el cambio en la posición $dx$ en ese intervalo también será pequeño y está dado por el producto entre su derivada ($v(t)$) y el diferencial $dt$ de modo que

$$dx = v(t)\, dt, \tag{15}$$

~~como si pasáramos multiplicando el $dt$~~. Si esto les genera dudas piensen en el siguiente cambio de variables tal y como lo hacían en Análisis: tenemos dos variables $x$ y $t$ y queremos saber cómo se vinculan sus diferenciales, ¿qué hacíamos?

$$dx = \dot{x}(t)\, dt \tag{16}$$

y como $\dot{x}(t) = v(t)$, entonces

$$dx = v(t)\, dt. \tag{17}$$

La expresión (15) es exacta en el límite en el que $dt \to 0$ (para $dt$ *pequeños* será una buena aproximación).

En cualquier caso interpretamos la relación (15) como una igualdad entre los diferenciales $dx$ y $dt$ la cual debemos integrar entre dos tiempos arbitrarios

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t v(\tilde{t})\, d\tilde{t} = \int_0^t k\, \tilde{t}\, d\tilde{t}, \tag{18}$$

recuperando una versión equivalente a la obtenida a través del teorema fundamental del cálculo. En el lado derecho de la ecuación (18) la variable de integración es el tiempo y se integra entre 0 y un $t$ genérico. En el lado izquierdo la variable de integración es la posición $x$ y por eso los límites son la posición evaluada en los respectivos tiempos $x(0)$ y $x(t)$. El resultado es exactamente el mismo que antes

$$x(t) - x(0) = \frac{k\, t^2}{2}. \tag{19}$$

## Algunos comentarios finales

Este tipo de manejos de los diferenciales en un principio puede generar dudas pero no es incorrecto. Es decir, no vamos a llegar a resultados que estén mal (siempre y cuando nos mantengamos dentro de hipótesis razonables[1]). Lo que sucede es que esta notación no nos permitiría formalizar en profundidad y exhaustivamente todos los casos posibles

[1] Este adjetivo nos permite zafar de casi cualquier inconveniente, no obstante en este contexto me refiero a que las funciones que vamos a derivar/integrar estén bien definidas y que básicamente tengan derivada segunda continua (al menos definida por tramos), pero no se compliquen.

como debe hacer correctamente la matemática (¿recuerdan la definición del límite $\epsilon - \delta$ de Análisis? Bueno, esas movidas.), y de allí surge la presunta tensión. Para nuestros propósitos será suficiente y no vamos a tener problemas.

Por último, si bien en sus comienzos el cálculo[2] surgió emparentado a conceptos más físicos como la descripción geométrica del movimiento no tan formalizados, han pasado ya 350 años de historia y ciencia en los cuales hemos aprendimos cómo formalizarlo rigurosamente, qué cosas está bien hacer, qué cosas no y dónde pueden ocurrir argumentaciones inválidas (al menos para los casos en los que trabajaremos en este curso). Contamos con esa ventaja, usémosla.

[2]Si no conocen la historia del cálculo búsquenla porque es muy interesante. La historia cuenta que fue desarrollado independientemente por Leibniz y Newton a finales del siglo XVII al mismo tiempo que se sentaban las bases de la mecánica clásica que terminaría de revolucionar el pensamiento científico y la visión del mundo hasta nuestros días. Un detalle, la notación de diferenciales (muy similar a la actual) fue introducida por Leibniz en aquel tiempo.