Guía 1: Cinemática

Problema 8

Este problema trata sobre la **trayectoria circular** acelerada de un cuerpo. Como hemos discutido, es muy útil y cómodo describir este tipo de movimientos con las **coordenadas polares**.

Tenemos un cuerpo que se mueve con una trayectoria circular de radio fijo $R = 1{,}3$ m cuya aceleración angular γ es una función conocida del tiempo tal que $\gamma(t) = 120\,\mathrm{s}^{-4}\,t^2 - 48\,\mathrm{s}^{-3}\,t + 16\,\mathrm{s}^{-2}$. Asumiendo que el cuerpo parte del reposo, los primeros incisos nos piden hallar a) la posición angular $\theta(t)$ y b) la velocidad angular $\omega(t)$.

Habiendo hecho el repaso de coordenadas polares recordamos que la aceleración angular es

$$\gamma = \ddot{\theta} \tag{1}$$

y la velocidad angular es

$$\omega = \dot{\theta}. \tag{2}$$

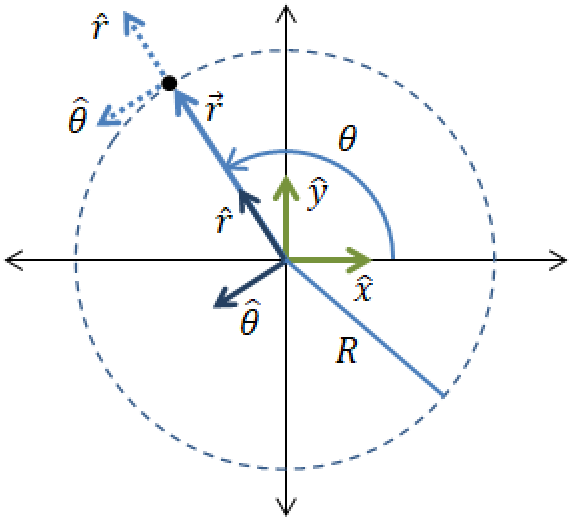

Figura 1: Esquema del movimiento circular. El punto representa aproximadamente la posición del cuerpo a los 2 s. Notamos que para esa posición $\hat{\theta}$ tiene componentes x e y negativas.

a) y b)

Necesitamos la posición del cuerpo como función del tiempo. En términos de las coordenadas polares queremos conocer $r(t)$ y $\theta(t)$. La posición del cuerpo es

$$\vec{r} = r\,\hat{r}, \tag{3}$$

y como se observa en la figura 1 se mueve en una trayectoria circular de radio constante e igual a $R = 1{,}3$ m, entonces $r = R = 1{,}3$ m. ¿Esto quiere decir que la posición (3) es constante? No, porque tenemos el versor $\hat{r}$ que, como ya discutimos en el repaso de coordenadas polares, cambia en el tiempo a través de $\theta(t)$.

Vamos por partes. El radio ya está resuelto porque es constante pero, ¿cómo calculamos $\dot{\theta}$ y θ?. Los datos que tenemos son las condiciones iniciales y la aceleración angular en función del tiempo. Con esto nos basta para entender que podemos conocer la posición angular y velocidad angular integrando la aceleración angular. Así como cuando teníamos la posición de un cuerpo hallábamos su velocidad o aceleración derivando, ahora tendremos que usar el camino inverso integrando.

Sabemos conceptualmente que al integrar la aceleración angular ($\ddot{\theta}$) vamos a obtener la velocidad angular ($\dot{\theta}$) y que si luego integramos una vez más conseguiremos la posición angular (θ). Veamos un truco práctico para hacer este procedimiento que va a ser particularmente útil en esta materia y en general en toda la carrera. La aceleración angular puede escribirse como

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \tag{4}$$

y entonces, usando (1) y la función explícita $\gamma(t)$, obtenemos

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 120\,\mathrm{s}^{-4}\,t^2 - 48\,\mathrm{s}^{-3}\,t + 16\,\mathrm{s}^{-2}, \tag{5}$$

lo cual implica que

$$d\dot{\theta} = \left[120\,\mathrm{s}^{-4}\,t^2 - 48\,\mathrm{s}^{-3}\,t + 16\,\mathrm{s}^{-2}\right] dt. \tag{6}$$

Integrando entre el tiempo inicial t_0 y un t genérico nos queda

$$\int_{\dot{\theta}(t_0)}^{\dot{\theta}(t)} d\dot{\theta} = \int_{t_0}^{t} \left[120\,\mathrm{s}^{-4}\,\tilde{t}^2 - 48\,\mathrm{s}^{-3}\,\tilde{t} + 16\,\mathrm{s}^{-2}\right] d\tilde{t}. \tag{7}$$

En el lado derecho la variable de integración es el tiempo y la notamos con $\tilde{t}$ para no mezclar con el límite de integración t. En el lado izquierdo la variable de integración es $\dot{\theta}$ y los límites de integración son entonces la variable evaluada en el tiempo inicial y final, $\dot{\theta}(t_0)$ y $\theta(t)$ respectivamente. Al hacer la integral explícitamente y reemplazar $t_0 = 0$ en cada miembro llegamos a

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}(0) &= 120\,\mathrm{s}^{-4} \left(\frac{t'^3}{3}\right)\Bigg|_0^t - 48\,\mathrm{s}^{-3} \left(\frac{t'^2}{2}\right)\Bigg|_0^t + 16\,\mathrm{s}^{-2}\,(t')\big|_0^t \qquad (8)\\
\dot{\theta}(t) &= 40\,\mathrm{s}^{-4}\,t^3 - 24\,\mathrm{s}^{-3}\,t^2 + 16\,\mathrm{s}^{-2}\,t = \omega(t), \qquad (9)
\end{aligned}$$

donde en la segunda línea usamos el dato $\dot{\theta}(0) = 0\,\mathrm{rad/s}$. Ya tenemos la velocidad angular (9). Recordemos chequear unidades: $[\omega]$ tiene que ser igual a 1/s, en realidad debería ser igual a rad/s pero los radianes no tienen unidades físicas, son sólo números que describen ángulos en el sistema radianes (análogo al sistema decimal o binario para los números). Cada término de (9) tiene un factor con una potencia de la unidad s^{-1} y luego otro factor con la variable temporal con otro exponente de modo tal que efectivamente $[\omega] = 1/\mathrm{s}$. Procediendo de forma análoga vamos a calcular la posición angular a partir de (9). El truco de antes ahora es

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 40\,\mathrm{s}^{-4}\,t^3 - 24\,\mathrm{s}^{-3}\,t^2 + 16\,\mathrm{s}^{-2}\,t, \tag{10}$$

entonces

$$\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} d\theta = \int_0^t \left[40\,\mathrm{s}^{-4}\,\tilde{t}^3 - 24\,\mathrm{s}^{-3}\,\tilde{t}^2 + 16\,\mathrm{s}^{-2}\,\tilde{t}\right] d\tilde{t}, \tag{11}$$

y así

$$\begin{aligned} \theta(t) - \theta(0) &= 40\,\mathrm{s}^{-4}\left(\frac{t'^4}{4}\right)\Bigg|_0^t - 24\,\mathrm{s}^{-3}\left(\frac{t'^3}{3}\right)\Bigg|_0^t + 16\,\mathrm{s}^{-2}\left(\frac{t'^2}{2}\right)\Bigg|_0^t & (12) \\ \theta(t) &= 10\,\mathrm{s}^{-4}\,t^4 - 8\,\mathrm{s}^{-3}\,t^3 + 8\,\mathrm{s}^{-2}\,t^2. & (13) \end{aligned}$$

Nuvamente usamos que $\theta(0) = 0$. ¿Unidades?, ¿están ok, no?. Con las expresiones (13) y (9) resolvimos los incisos a) y b) respectivamente. Seguimos.

c)

Nos piden el vector aceleración. Lo primero a notar es que nos están pidiendo la aceleración del cuerpo que obviamente es un vector y **no** es la aceleración angular γ. Dicho esto no tenemos más que recordar que estamos trabajando en coordenadas polares y que ya dedujimos cuál es el vector aceleración para un cuerpo en general en la nota de repaso sobre polares. En efecto,

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}, \tag{14}$$

el carácter vectorial de esta cantidad se encuentra en los versores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$. En nuestro caso r representa el radio del movimiento que es constante ($r = R = 1{,}3\,\mathrm{m}$) y por ello $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Por otra parte ya conocemos $\dot{\theta}$ (ecuación (9)) y $\ddot{\theta}$ es dato del problema (ecuación (5)). Por lo tanto

$$\begin{aligned} \vec{a} &= -R\,\dot{\theta}^2\,\hat{r} + R\,\ddot{\theta}\,\hat{\theta} & (15) \\ &= -1{,}3\,\mathrm{m}\left(40\,\mathrm{s}^{-4}\,t^3 - 24\,\mathrm{s}^{-3}\,t^2 + 16\,\mathrm{s}^{-2}\,t\right)^2\hat{r} + \\ &\quad +1{,}3\,\mathrm{m}\left(120\,\mathrm{s}^{-4}\,t^2 - 48\,\mathrm{s}^{-3}\,t + 16\,\mathrm{s}^{-2}\right)\hat{\theta}. & (16) \end{aligned}$$

¿Unidades ok?. Bien. ¿Tengo un vector a ambos lados de la igualdad?. Bien. Notemos que la dirección y sentido de la aceleración dependerán de los versores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ y que como ya vimos no están fijos y dependen del tiempo conforme transcurre el movimiento.

d)

En este inciso tenemos que hallar la velocidad. Mismas consideraciones del punto anterior. Cuando nos piden la velocidad, no es la velocidad angular sino

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}, \tag{17}$$

y en nuestro caso

$$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\hat{\theta} = 1{,}3\,\mathrm{m}\big(40\,\mathrm{s}^{-4}\,t^3 - 24\,\mathrm{s}^{-3}\,t^2 + 16\,\mathrm{s}^{-2}\,t\big)\,\hat{\theta}. \tag{18}$$

¿Unid...?, ¿vect...?. Creo que se entendió. Particularmente nos piden evaluar la velocidad en $t = 2$ s, osea $\vec{v}(t = 2\,\mathrm{s})$. Reemplazamos en (18) y llegamos a

$$\begin{aligned} \vec{v}(2\,\mathrm{s}) &= 1{,}3\,\mathrm{m}\big(40\,\mathrm{s}^{-4}\,(2\mathrm{s})^3 - 24\,\mathrm{s}^{-3}\,(2\mathrm{s})^2 + 16\,\mathrm{s}^{-2}\,(2\mathrm{s})\big)\,\hat{\theta} = & (19)\\ &= 332{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\hat{\theta}, & (20) \end{aligned}$$

pero OJO en esta expresión falta algo. Recordemos que los versores polares cambian a medida que cambia la posición y por ende dependen del tiempo, entonces donde dice $\hat{\theta}$ debería decir $\hat{\theta}(t = 2\,\mathrm{s})$. A partir de (20) sabemos que la velocidad siempre apunta en la dirección y sentido de $\hat{\theta}$, es decir es tangente a la circunferencia que describe el movimiento de radio constante. Sin embargo, como no calculamos cuál es la posición en ese instante es difícil decir (o dibujar) concretamente qué dirección y sentido tiene la velocidad en ese instante. Una opción sería reescribir el versor $\hat{\theta}$ en términos de los versores cartesianos según

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y} \tag{21}$$

(ver repaso de polares) y así

$$\hat{\theta}(t = 2\,\mathrm{s}) = -\sin\big(\theta(t = 2\,\mathrm{s})\big)\,\hat{x} + \cos\big(\theta(t = 2\,\mathrm{s})\big)\,\hat{y}, \tag{22}$$

como conocemos $\theta(t)$ (ecuación (13)) sabemos que

$$\theta(2\,\mathrm{s}) = 10\,\mathrm{s}^{-4}\,(2\,\mathrm{s})^4 - 8\,\mathrm{s}^{-3}\,(2\,\mathrm{s})^3 + 8\,\mathrm{s}^{-2}\,(2\,\mathrm{s})^2 = 128\,\mathrm{rad} \simeq 40{,}744\,\pi\,\mathrm{rad}, \tag{23}$$

como ya comentamos rad significa radianes. Reemplazando en (22) y luego en (20) obtenemos

$$\vec{v}(2\,\mathrm{s}) = 332{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\hat{\theta}(2\,\mathrm{s}) = -239{,}96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\hat{x} - 230{,}60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\hat{y}. \tag{24}$$

El movimiento es circular y por ende la velocidad siempre será tangente a la circunferencia. En la figura 1 está esquematizada la posición a los 2 s con $\theta \simeq 40{,}744\,\pi$ rad. Lo más importante es que como se encuentra en el segundo cuadrante $\hat{\theta}(2\,\mathrm{s})$ tiene componentes x e y negativas, lo mismo para la velocidad $\vec{v}(2\,\mathrm{s})$ ya que apunta en la misma dirección y sentido que $\hat{\theta}$ para todo tiempo.