Física 1 - Turno A - 1erC 2020 - DF-FCEyN, UBA

Luciano Andrés Masullo

lmasullo@df.uba.ar

Problema 1.5: el helicóptero y el proyectil

Este es un problema de trayectorias bidimensionales de dos móviles. Es un clásico problema de cinemática y se resuelve desacoplando las ecuaciones de movimiento de cada uno de los móviles en cada una de las dimensiones (en este caso $\hat{x}$ e $\hat{y}$).

a) Encuentre la trayectoria del proyectil (o sea y en función de x). Grafique y vs x para el proyectil y para el helicóptero.

Escribamos todo lo que sabemos de cada uno de los móviles (helicóptero y proyectil) y encontremos las ecuaciones de movimiento. Empecemos con el helicóptero que es el más sencillo. En la dirección x ya tenemos su ecuación de movimiento (no se mueve):

$$\boxed{x_h(t) = L = cte} \tag{1}$$

En la dirección y no tenemos su ecuación de movimiento pero conocemos la aceleración en función del tiempo y está dada por

$$a_{y_h}(t) = -kt \;\; (k > 0) \tag{2}$$

Luego podemos usar la relación entre aceleración, velocidad y posición para encontrar las ecuaciónes $v_{y_h}(t)$ y $y_h(t)$. Recordemos que empieza a moverse a $t = 0$ y que su velocidad inicial es $v_{y_h}(0) = 0$. Luego:

$$v_{y_h}(t) = \int_0^t a_{y_h}(t')dt' = -\frac{k}{2}t^2 + v_{y_h}(0) = -\frac{k}{2}t^2 \tag{3}$$

Veamos ahora la posición:

$$y_h(t) = \int_0^t v_{y_h}(t')dt' = -\frac{k}{2}\frac{t^3}{3} + y_h(0) \tag{4}$$

y luego

$$\boxed{y_h(t) = -\frac{k}{6}t^3 + H} \tag{5}$$

Donde usé que $y_h(0) = H$. Ya tenemos las ecuaciones de movimiento del helicóptero. Veamos el proyectil.

En la dirección x no hay (des)aceleración con lo cual es como si fuera básicamente un **MRU en esta dirección** (¡Eso no significa que el movimiento total sea en línea recta!).

La velocidad inicial en esta dirección se puede ver por trigonometría que es:

$$v_{x_p}(t) = v_0 \cos\alpha \tag{6}$$

Luego, para la posición tendremos

$$\boxed{x_p(t) = v_0 \cos\alpha(t - t_0)} \tag{7}$$

donde usamos que $x_0 = 0$. Nótese que acá dejamos explícitamente el tiempo inicial en la ecuación porque no está dicho que el proyectil se dispare a $t = 0$, es más, t_0 va a ser un parámetro a encontrar en el punto c) del problema

Veamos ahora la dirección y. En esta dirección el problema es un MRUA con a = -g, veamos:

$$a_{p_y}(t) = -g = cte \tag{8}$$

Luego,

$$\begin{aligned} v_{y_p}(t) &= \int_{t_0}^{t} a_{y_p}(t')dt' = -g(t-t_0) + v_{y_p}(0) \\ &= -g(t-t_0) + v_0 \sin\alpha \end{aligned} \tag{9}$$

Y para la posición calculamos:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_{t_0}^{t} v_{y_p}(t')dt' \\ &= -\frac{g}{2}(t-t_0)^2 + v_0 \sin\alpha(t-t_0) + y_p(t_0) \end{aligned} \tag{10}$$

Y como $y_p(t_0) = 0$, tenemos

$$\boxed{y_p(t) = -\frac{g}{2}(t-t_0)^2 + v_0 \sin\alpha(t-t_0)} \tag{11}$$

Ya tenemos todas las ecuaciones de movimiento de los dos móviles. Busquemos sus trayectorias. La del helicóptero es muy fácil, como en x no se mueve, y sólo se mueve en y, su trayectoria será una línea recta, en este caso hacia abajo. Para el proyectil necesitamos obtener $y(x)$ [1]. Veamos las ecuaciones (7) y (11), uno podría por ejemplo despejar t en función de x en (7) y reemplazarlo en (11), sin embargo es más práctico despejar $(t-t_0)$ en función de x. Veamos, de (7):

$$(t-t_0) = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \tag{12}$$

Y luego reemplazando en (11), obtengo:

$$y(x) = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right) \tag{13}$$

que se puede simplificar y escribir:

$$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha\ x} \tag{14}$$

El gráfico de esta trayectoria es una parábola (de ahí el *tiro parabólico*). ¿Cómo hacen para graficarla? ¿Dónde se encuentra el vértice? ¿Dónde corta el eje x?

En la Figura 1 se pueden ver distintas trayectorias para distintas velocidades inciales y parámetros α, L, H, k, g fijos.

b) ¿Para qué valores de v_0 la trayectoria del proyectil y la del helicóptero se intersectan?

Bueno primero, pensemos un poco intuitivamente los casos límite, para v_0 muy chico (¿Con respecto a qué?) el proyectil va a caer a tierra antes de llegar incluso adonde aterrizaría el helicóptero. Para v_0 muy grandes[2], ¿Qué sucede? ¿Estamos seguros que la trayectoria del proyectil tampoco intersecta la del helicóptero? ¿O de qué depende?

[1] A partir de acá voy a relajar la notación y usar x e y sin subíndice p

[2] probar que es razonable tomar $v_0 >> \sqrt{\frac{gL}{2\sin\alpha}}$

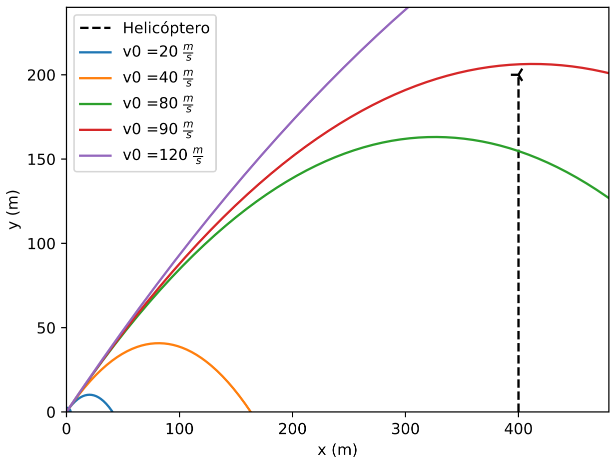

Figura 1: Distintas trayectorias para distintas velocidades inciales. Solamente para algunos valores de v_0 las trayectorias se interesectan. Valores del resto de los parámetros: $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}, k = 2\frac{m}{s^3}, H = 200m, L = 400m, \alpha = \pi/4$

Veamos las ecuaciones. Planteemos desigualdades usando casos límite, primero

$$y(L) \leq H \tag{15}$$

El caso límite es la situación en la que el proyectil pasa justo en donde empezó el helicóptero ($x = L, y = H$). Luego, usando (14)

$$-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}L^2 + \tan\alpha L \leq H \tag{16}$$

Y ahora despejemos v_0

$$-\frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \leq H - \tan\alpha L \tag{17}$$

Multiplicamos a ambos lados por (-1)

$$\frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \geq \tan\alpha L - H \tag{18}$$

Ahora, cuidado, la expresión de la izquierda es positiva siempre y la expresión de la derecha puede ser negativa para $H > \tan\alpha L$. Luego si $H > \tan\alpha L$ esta desigualdad se cumple para **cualquier** v_0. ¿Cuál es la interpretación física de esto? Si el ángulo es suficientemente chico con respecto a L y H, luego por más grande que sea la velocidad v_0, la trayectoria del proyectil siempre va a cortar la del helicóptero, para v_0 muy grandes el tiro oblicuo se transforma en un tiro recto con ángulo α, pero no va a subir más que $\tan\alpha L$ para $x = L$.

Hecha esta importante salvedad, encontremos la desigualdad para v_0 para el resto de los casos $H < \tan(\alpha)L$:

$$2v_0^2\cos^2\alpha \leq \frac{gL^2}{\tan\alpha L - H} \tag{19}$$

y luego

$$|v_0| \leq \sqrt{\left(\frac{gL^2}{2\cos^2\alpha\,(\tan\alpha L - H)}\right)} \tag{20}$$

Queda módulo de v_0, ¿Qué significa esto? ¿Tiene sentido físico la solución con $v_0 < 0$? No, sería una trayectoria en la que el proyectil va a hacia el cañón y cortó la trayectoria del helicóptero, o algo así, tiene sentido matemático pero no físcio en este problema. La descartamos, luego

$$\boxed{v_0 \leq \sqrt{\left(\frac{gL^2}{2\cos^2\alpha\,(\tan\alpha L - H)}\right)}} \tag{21}$$

Ahora nos falta evaluar la situación en la que el proyectil toca tierra justo en dónde aterriza el helicóptero ($x = L, y = 0$):

$$y(L) \geq 0 \tag{22}$$

Luego, usando (14), obtenemos

$$-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}L^2 + \tan\alpha L \geq 0 \tag{23}$$

Luego

$$-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}L^2 \geq -\tan\alpha L \tag{24}$$

Luego (¡Ojo el cambio de sentido de la desigualdad al multiplicar por (-1)!)

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}L^2 \leq \tan\alpha L \tag{25}$$

y de ahí

$$v_0^2 \geq \frac{gL^{\cancel{2}}}{2\tan\alpha\cancel{L}\cos^2\alpha} \tag{26}$$

y luego (descartamos $v_0 < 0$ con el mismo criterio)

$$\boxed{v_0 \geq \sqrt{\frac{gL}{2\tan\alpha\cos^2\alpha}}} \tag{27}$$

y con eso terminamos el inciso b).

c) Si v_0 es alguno de los valores hallados en b) diga en qué instante debe efectuarse el disparo para que el proyectil haga impacto sobre el helicópetero

Esta es una clásica pregunta de **punto de encuentro**. La condición de encuentro es que para un dado $t = t_e$ se cumpla:

$$x_h(t_e) = x_p(t_e)$$
$$y_h(t_e) = y_p(t_e)$$

Luego, reemplazando en las ecuaciones (1), (5), (7), (11) tenemos:

$$L = v_0\cos\alpha(t_e - t_0) \tag{28}$$

y

$$-\frac{k}{6}t_e^3 + H = -\frac{g}{2}(t_e - t_0)^2 + v_0\sin\alpha(t_e - t_0) \tag{29}$$

Ahora sólo queda despejar t_e y t_0, la cuenta es un poco larga pero hay que entender que conceptualmente el problema ya está resuelto. De 28, obtenemos

$$(t_e - t_0) = \frac{L}{v_0\cos\alpha} \tag{30}$$

De acá, escribimos:

$$t_0 = t_e - \frac{L}{v_0\cos\alpha} \tag{31}$$

Recuerden que al fin y al cabo estamos buscando t_0, el tiempo en el que hay que disparar el proyectil para pegarle al helicóptero.

Reemplazando (30) en (29), se obtiene

$$t_e^3 = -\frac{6}{k}\left[-\frac{g}{2}\left(\frac{L}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + L\tan\alpha - H\right] \tag{32}$$

y de ahí

$$t_e = \left(\frac{6}{k}\left[-\frac{g}{2}\left(\frac{L}{v_0\cos\alpha}\right)^2 - L\tan\alpha + H\right]\right)^{1/3} \tag{33}$$

Con lo que finalmente ya tenemos t_e y con eso encontramos t_0 que es el instante en el que debe efectuarse el disparo para que impacte en el helicóptero como función de todos los parámetros del problema.

$$\boxed{t_0 = t_e - \frac{L}{v_0\cos\alpha}} \tag{34}$$

<u>Consejo importante:</u> ¿Cómo hago para saber si no hice algún error de matemática en alguna parte? Una herramienta muy poderosa es evaluar que **las unidades** de las ecuaciones sean consistentes. Miremos por ejemplo la ecuación (34), $[L^2] = m^2$, $[v_0^2] = m^2/s^2$, luego el paréntesis ese tiene unidades de s^2 va multiplicado por g que tiene unidades de $[g] = m/s^2$, luego ese término tiene unidades de m. Veamos el segundo

término, $\tan(\alpha)$ es adimensional, $[L] = m$, y el tercero, $[H] = m$. Bueno, ¡Bien! Estamos sumando metros con metros, buen indicio. Luego todo ese término se multiplica por $1/k$ y $[k] = m/s^3$ luego $[1/k] = s^3/m$. Con lo cual todo lo que está abajo de la raíz tiene unidades de s^3, lo cual tiene mucho sentido porque al tomar la raíz nos queda unidades de s, y $[t_0] = s$. No tengo pruebas, pero tampoco dudas de que con este chequeo se detectan el 90 % de los errores de cálculo, ¡Úsenlo!