Física 1, primer cuatrimestre de 2020.

Problema 1.11 (el del faro)

Ignacio Perito (iperito@df.uba.ar)

El martes pasado hubo un pedido bastante generalizado para que resolvamos el problema del faro de la guía de cinemática, así que acá va. Es un lindo problema y está bueno que le hayan dedicado una buena cantidad de intentos antes de mirar la resolución. Así que a quienes aún no se hayan sentado a pelearse con este ejercicio, les sugiero fuertemente que lo intenten solxs antes de leer el resto de estas notas.

1. Problema del faro

La situación es sencilla, tenemos un faro que gira con velocidad angular constante ω y queremos estudiar la cinemática del punto luminoso que se proyecta sobre una pantalla plana (e infinita) ubicada a una distancia d del faro[1]. La figura 1 muestra el esquema del problema, que es una copia del que tenemos en el enunciado con algún que otro agregado que nos va a ser útil en el desarrollo.

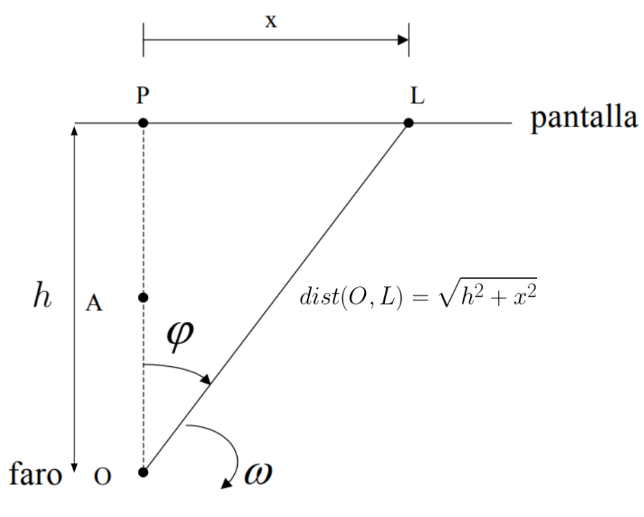

Figura 1: Esquema del problema

[1]Cuando hablamos de la distancia entre la pantalla al faro, obviamente nos referimos a la distancia mínima. En este caso es la distancia entre el punto P y el faro, que es un dato y vale h -el enunciado dice d, pero usemos h para que evitar confusiones entre esta variable y los diferenciales, que van a abundar-.

1.1. Inciso (a)

Nos piden averiguar la velocidad lineal del punto luminoso, es decir, $\dot{x}(t)$ como función de datos y la variable x. Es decir, nos están pidiendo llegar a la ecuación diferencial que rige la evolución de la variable $x(t)$. Es sencillo convencerse de que, a pesar de que ω es constante, la velocidad lineal del punto luminoso no lo será. De hecho, cuando el faro se haya movido desde $\varphi = 0$ hasta $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (lo cual sucede en una cantidad finita de tiempo), el punto luminoso habrá recorrido toda la semirrecta $[0, +\infty)$, por lo que la velocidad no sólo no podrá ser constante sino que también deberá, necesariamente, diverger. Dicho esto, para hallar la expresión buscada, notemos primero que la variable x se relaciona con φ según:

$$\tan\varphi = \frac{x}{h}\,, \tag{1}$$

lo cual es útil, pues nos permite hallar fácilmente la derivada temporal de x derivando ambos miembros y recordando que φ es también una función del tiempo:

$$\frac{\dot{x}}{h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\varphi) = \frac{\mathrm{d}(\tan\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\dot{\varphi} = \frac{\omega}{\cos^2\varphi}\,, \tag{2}$$

donde, en la segunda igualdad, hemos utilizado la regla de la cadena y, en la última, el hecho de que $\dot{\varphi} = \omega$. Tenemos entonces que:

$$\dot{x} = \frac{\omega h}{\cos^2\varphi}\,, \tag{3}$$

y, como nos piden que lo expresemos como función de x, nos ayudamos de nuevo con un poco de trigonometría para expresar el coseno de φ en términos de datos y x, lo cual es sencillo:

$$\cos\varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}\,. \tag{4}$$

De las últimas dos ecuaciones, podemos obtener:

$$\dot{x} = \frac{\omega(h^2 + x^2)}{h}\,, \tag{5}$$

que es la expresión pedida. Notar que, como intuímos al principio, la velocidad lineal del punto luminoso es una función creciente de x y diverge a medida que $x \to +\infty$. No nos lo piden, pero esta ecuación diferencial se puede resolver fácilmente separando las variables como hicimos en la primera clase:

$$h\int_0^x \frac{d\tilde{x}}{h^2 + \tilde{x}^2} = \omega\int_0^t d\tilde{t} \Rightarrow \arctan\left(\frac{x}{h}\right) = \omega t \Rightarrow x(t) = h\arctan(\omega t)\,, \tag{6}$$

lo cual, notando que $\omega t = \varphi$, no es otra cosa que una reescritura de la ecuación (1). Una forma alternativa de resolver este inciso, que queda de tarea, es calcular la velocidad **tangencial** del punto L como el producto entre ω y la distancia de dicho punto a al faro, teniendo el cuidado de que a esa velocidad tangencial luego hay que tomarle la componente paralela a la pantalla (dicho de otra forma, $\omega\sqrt{h^2+x^2}$ **no es** la velocidad lineal del punto sobre la pantalla).

1.2. Inciso (b)

Ahora nos preguntan sobre la velocidad angular que percibe unx muchachx situado un poco más cerca de la pantalla, a una distancia D que también es dato. Más concretamente, si θ es el ángulo indicado en la figura 2, nos están pidiendo hallar $\dot{\theta}$.

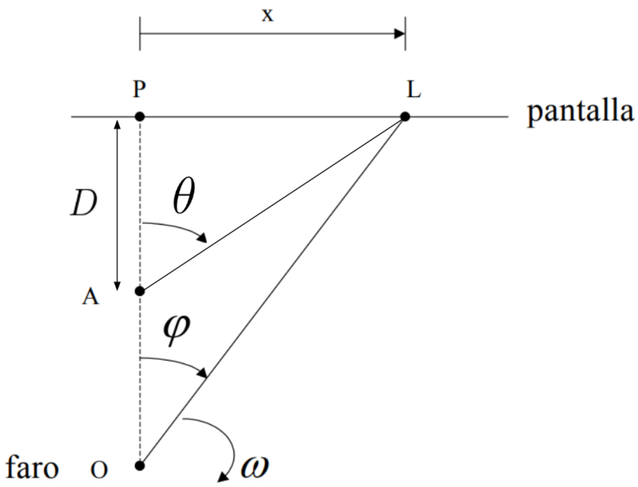

Figura 2: Esquema para el inciso (b)

El enunciado del problema nos ofrece la sumamente útil sugerencia de resolver este cálculo utilizando trigonometría[2], así que hagámosle caso. Procediendo igual que antes, tenemos ahora:

$$\tan\theta = \frac{x}{D}\,, \tag{7}$$

por lo que, derivando ambos miembros (con los mismos cuidados de antes), llegamos a:

$$\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{\dot{x}}{D} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}\cos^2\theta}{D}\,, \tag{8}$$

y, como nos interesa tener $\dot{\theta}$ en función de datos y de x, podemos recordar la relación (5) para escribir $\dot{x}$ en función de datos y de x; mientras que, por otro lado, podemos hacer lo propio para θ con un poco de trigonometría:

$$\cos\theta = \frac{D}{\sqrt{D^2+x^2}}\,. \tag{9}$$

[2]Qué ayudón, si no nos decían nada ibamos a intentar averiguar un ángulo con argumentos de tarot y astrología...

Juntando todo esto y simplificando un poco llegamos a:

$$\dot{\theta} = \frac{\omega D(h^2 + x^2)}{h(D^2 + x^2)} \,. \tag{10}$$

El ejercicio no lo pide, pero es interesante estudiar un par de límites de la última expresión. Para $x = 0$, se tiene:

$$D\dot{\theta} = h\omega \,, \tag{11}$$

lo cual no es otra cosa que la velocidad lineal del punto luminoso en el instante en el cual $x = 0$, calculada desde el punto de vista del punto A (miembro izquierdo) y desde el faro (miembro derecho). Además, como $\frac{h}{D} > 1$, la expresión anterior también nos dice algo que es de esperar: cuando el punto luminoso pasa por $x = 0$, la velocidad angular percibida por el observador más cercano a la pantalla es **mayor** que la velocidad angular del faro. Ahora bien, si miramos el otro límite de la expresión (10), es decir, cuando $x \to \infty$ (correspondiente a la situación en la que el ángulo φ que forma el faro con el segmento $\overline{OP}$ se acerca a $\frac{\pi}{2}$), lo que tenemos es:

$$\lim_{x \to \infty} \dot{\theta} = \frac{D}{h}\omega \,, \tag{12}$$

por lo que, en este límite, la velocidad angular percibida por el observador en A es **¡menor!** que la velocidad angular del faro. Por continuidad, entonces, existe algún valor de $x \in [0, +\infty]$ para el cual la relación $\dot{\theta} > \omega$ (que nos pareció tan razonable cuando vimos el caso $x = 0$) se invierte y pasa a ser $\dot{\theta} < \omega$. Queda de tarea para ustedes entender por qué esto que, en principio, parece cosa e'mandinga, es en realidad bastante razonable.

1.3. Inciso (c)

Finalmente, nos preguntan cómo debe girar el faro para que la velocidad lineal del punto luminoso en la pantalla sea constante. Esto es bastante sencillo si nos apoyamos en lo que hicimos anteriormente. La expresión (2) nos dice que:

$$\dot{x} = \frac{h\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi} \,, \tag{13}$$

y, en este caso, no vamos a tomar $\dot{\varphi} = \omega = cte$, puesto que estamos buscando cómo debe ser $\dot{\varphi}$ para que el punto luminoso se mueva a velocidad constante. Tenemos entonces $\dot{x} = cte$ y la expresión anterior nos dice que:

$$\dot{\varphi} \propto \cos^2\varphi \,. \tag{14}$$

es decir, la velocidad angular del faro debe ser proporcional al cuadrado del coseno del ángulo φ para que la velocidad lineal del punto luminoso se mantenga constante. Esta expresión también se puede integrar sencillamente para ver cómo resulta $\varphi(t)$ en este caso (el ejercicio tampoco pide esto). Les queda de tarea.