* *nigro@df.uba.ar*

ROZAMIENTO

MAURO NIGRO *

Problema 3.1

Tenemos un bloque de masa m_1 apoyado sobre un bloque de masa m_2 que a su vez se apoya en el suelo. Existe rozamiento entre ambos bloques. Los coeficientes de rozamiento son μ_e y μ_d. No existe rozamiento entre el bloque m_2 y el piso.

Ubiquemos el origen de coordenadas en el punto medio del bloque 2. Se aplica un fuerza externa $\bar{F} = F\hat{x}$ sobre el cuerpo 1. La idea es calcular para qué valoers de F, los bloques no deslizan entre si, y averiguar cuál es el valor de la fuerza máxima, $F_{\max}$, tal que una vez superada, el deslizamiento es inevitable. Para ello vamos a plantear las leyes de Newton para cada bloque. Notemos que en este problema la fuerza de rozamiento, sea estática o dinámica es una fuerza de interacción entre ambos bloques. Por lo tanto si F_R es la fuerza de rozamiento que siente el bloque 1 debido a 2, esto es, $F_R = F_{12}$ entonces el bloque 2 siente una fuerza de rozamiento $F_{21} = -F_{12} = F_R$. Notemos que el signo - viene de la tercera ley de Newton. No se está afirmando nada en cuánto al signo de la fuerza de rozamiento. El mismo está contenido en F_R. De hecho su signo es suceptible al sistema de coordenadas. La segunda ley se escribe entonces

$$m_1\ddot{x}_1 = F + F_R \tag{1}$$

$$0 = m_1\ddot{y}_1 = -m_1 g + N_{12} \tag{2}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -F_R \tag{3}$$

$$0 = m_2\ddot{y}_1 = -m_2 g + N_{21} + N_{2P}. \tag{4}$$

Si pensamos que ambos bloques no son puntuales entonces (x_1, y_1) y (x_2, y_2) representan las coordenadas de cualquier punto de cada bloque, respectivamente. Esto se debe a que todos los puntos de cada bloque tendrán siempre la misma velocidad. Más adelante en el curso veremos que esto no siempre es así cuando tratamos con cuerpos extensos. Pero dada la situación particular de este problema, se cumple. Por lo tanto tenemos que si no hay deslizamiento entonces $x_2 - x_1$ es una constante. Entonces $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 \equiv \ddot{x}$. Teniendo en cuenta esto podemos sumar las ecuaciones (1) y (3) para obtener

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = F, \tag{5}$$

entonces la aceleración de ambos bloques es

$$\ddot{x} = \frac{F}{m_1 + m_2}. \tag{6}$$

Reemplazando este resultado en (3) (o en (1)) podemos despejar F_R:

$$F_R = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}F. \tag{7}$$

Esta es la fuerza de rozamiento que siente el bloque 1 debido al bloque 2. El signo - indica que es opuesta a F. Notemos que si $m_2 >> m_1$ entonces $F_R \approx -F$. Ello equivale a considerar al bloque 2 como si fuera el suelo. Consecuentemente la ecuación (6) nos dice que la aceleración es cero.

Para que los cuerpos no deslicen entre sí debe cumplirse

$$|F_R| \leq \mu_e |N_{12}|. \tag{8}$$

Aquí es importante remarcar que la normal que aparece en el miembro derecho de la desigualdad (8) es la que siente 1 debido a 2. La normal relevante es siempre la que se encuentra aplicada sobre la superficie dónde hay rozamiento. No tendría ningún sentido considerar la normal que siente el bloque 2 debido al piso P. Usando (7) y (2) entonces la ecuación (8) se transforma en una condición para F, que es lo que estamos buscando:

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2}|F| \leq \mu_e m_1 g, \tag{9}$$

y por lo tanto

$$|F| \leq \mu_e m_1 g\left(\frac{m_1}{m2} + 1\right). \tag{10}$$

Esta desigualdad se puede escibir también como

$$-\mu_e m_1 g\left(\frac{m_1}{m2} + 1\right) \leq F \leq \mu_e m_1 g\left(\frac{m_1}{m2} + 1\right). \tag{11}$$

Entonces F puede tener un valor mínimo, negativo, y un valor máximo, positivo. Eso se debe a que el experimento puede hacerse empujando para un lado o para el otro. El valor máximo que puede tomar F para que los bloques no deslicen entre sí, en valor absoluto, es entonces

$$F_{\max} = \mu_e m_1 g\left(\frac{m_1}{m2} + 1\right). \tag{12}$$

Repitamos el análisis pero suponiendo ahora que la fuerza $\bar{F} = F\hat{x}$ se aplica sobre el bloque 2. Llamemos $\tilde{F}_R$ a la fuerza de rozamiento que siente el bloque 2 debido a su interacción con el bloque 1, esto es, $\bar{F}_{21} = \bar{\tilde{F}}_R = \tilde{F}_R\hat{x}$. Entonces el bloque 1 siente $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} - \tilde{F}_R\hat{x}$. Nuevamente no estamos haciendo ninguna suposición sobre el signo de las cosas. La segunda ley de Newton se escribe

$$m_1\ddot{x}_1 = -\tilde{F}_R \tag{13}$$
$$0 = m_1\ddot{y}_1 = -m_1 g + N_{12} \tag{14}$$
$$m_2\ddot{x}_2 = F + \tilde{F}_R \tag{15}$$
$$0 = m_2\ddot{y}_1 = -m_2 g + N_{21} + N_{2P}. \tag{16}$$

Nuevamente si los cuerpos no deslizan entre si entonces $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}$. Sumando (13) y (15) obtenemos el mismo resultado que antes:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m_1 + m_2}. \tag{17}$$

Para calcular $\tilde{F}_R$ podemos reemplazar (17) en (13):

$$\tilde{F}_R = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} F. \tag{18}$$

Si aumentamos el valor de F, aumenta en valor absoluto $\tilde{F}_R$. Esto hará que eventualmente los cuerpos deslicen entre si. Para que ello no ocurra entonces debe cumplirse $|\tilde{F}_R| \leq \mu_e|N_{21}|$, es decir

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}|F| \leq \mu_e m_1 g. \tag{19}$$

Despejando F tenemos

$$|F| \leq \mu_e(m_1 + m_2)g, \tag{20}$$

que también puede escribirse como

$$-\mu_e(m_1 + m_2)g \leq F \leq \mu_e(m_1 + m_2)g. \tag{21}$$

Por lo tanto la fuerza máxima que uno puede aplicar sin que los bloques deslicen entre si es

$$F_{\max} = \mu_e(m_1 + m_2)g. \tag{22}$$

Supongamos ahora que aplicamos una fuerza igual al doble de F_{max} (seguimos pensando que la fuerza externa se aplica sobre el bloque 2). Tenemos que $F = 2\mu_e(m_1 + m_2)g$. Ahora los bloques van a deslizar entre si y por lo tanto $\ddot{x}_1 \neq \ddot{x}_2$. Por otro lado la fuerza de rozamiento será dinámica. La experiencia nos dice que debe oponerse a la fuerza externa F. Nosotros hemos tomado $F > 0$, pues más arriba dijimos que $F = 2\mu_e(m_1 + m_2)g$ que es un valor positivo. Entonces el bloque 2 siente una fuerza de rozamiento negativa. Debido a la tercera ley, el bloque 1 sentirá una fuerza de rozamiento dinámico positiva, un resultado bastante interesante, pues tiene el mismo signo que la velocidad del bloque 1. La segunda ley de Newton es entonces

$$m_1\ddot{x}_1 = \mu_d m_1 g \tag{23}$$

$$0 = m_1\ddot{y}_1 = -m_1 g + N_{12} \tag{24}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = 2\mu_e(m_1+m_2)g - \mu_d m_1 g \tag{25}$$

$$0 = m_2\ddot{y}_1 = -m_2 g + N_{21} + N_{2P}. \tag{26}$$

La aceleración de cada bloque es

$$\ddot{x}_1 = \mu_d g \tag{27}$$

$$\ddot{x}_2 = 2\mu_e g\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right) - \mu_d\frac{m_1}{m_2}g = \frac{m_1}{m_2}(2\mu_e-\mu_d)g + 2\mu_e g. \tag{28}$$

Como $\mu_e > \mu_d > 0$, siempre, entonces $\ddot{x}_1 > 0$ y $\ddot{x}_2 > 0$. Pero por otro lado $(2\mu_e-\mu_d) > (\mu_e-\mu_d) > 0$ y también $2\mu_e g > 2\mu_d g = 2\ddot{x}_1$. En consecuencia $\ddot{x}_2 > \ddot{x}_1$. Ambos bloques se mueven hacia la derecha, pero el bloque 2 se mueve más rápido. Notemos que la única fuerza que hace mover al bloque 1 es un rozamiento dinámico. Si inicialmente el bloque 1 estaba en el centro de la parte de arriba del bloque 2, entonces en algún momento caerá. Supongamos que el bloque 2 tiene un tamaño L y el bloque 1 un tamaño $l << L$. Podemos entonces considerar al bloque 1 como puntual. Si integramos las ecuaciones (27-28) suponiendo que inicialmente las velocidades de ambos bloques es cero y ubicando el origen de coordenadas en el centro de la base del bloque 2, entonces

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\mu_d g\, t^2 \tag{29}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{m_1}{m_2}(2\mu_e-\mu_d) + 2\mu_e\right] g\, t^2. \tag{30}$$

Tengamos en cuenta que x_1 y x_2 son coordenadas medidas desde un sistema de referencia fijo al piso, por lo tanto la condición para que el bloque 1 se caiga es $x_2(t) - x_1(t) = \frac{L}{2}$ (recordemos que el bloque 1 partió del centro del bloque 2 y que $\ddot{x}_2 > \ddot{x}_1$). Entonces en virtud de (29-30) tenemos que

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{2}t^2\left[\frac{m_1}{m_2}(2\mu_e-\mu_d) + 2\mu_e - \mu_d\right] g \tag{31}$$

Despejando t obtebemos el instante en el que el bloque 1 cae:

$$t = \sqrt{\frac{L}{\left[\frac{m_1}{m_2}(2\mu_e-\mu_d) + 2\mu_e - \mu_d\right] g}} = \sqrt{\frac{L}{g\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)(2\mu_e-\mu_d)}}. \tag{32}$$

Problema 3.5

Sin consideramos un eje $\hat{x}$ que sigue la soga de izquierda a derecha entonces la segunda ley de Newton para ambas masas se escribe

$$m_1\ddot{x}_1 = T_1 + m_1 g\sin\alpha + F_{R1} \tag{33}$$

$$0 = m_1\ddot{y}_1 = N_1 - m_1 g\cos\alpha \tag{34}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = T_2 - m_2 g\sin\beta + F_{R2} \tag{35}$$

$$0 = m_2\ddot{y}_2 = N_2 - m_2 g\cos\beta. \tag{36}$$

Aquí F_{R1} y F_{R2} son las fuerzas de rozamiento que sienten los bloques 1 y 2, respectivamente. En prinicipio no tienen por qué ser iguales, independientemente de que los coeficientes de rozamiento sean los mismos para ambos bloques. Por otro lado como la soga y la polea son ideales entonces $T_1 = -T_2 = -T$.

Nos interesa averiguar alguna relación entre m_1, m_2, α y β de manera que el sistema esté en reposo. Para eso imponemos que $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$. Las ecuaciones (33) y (35) toman la forma

$$0 = -T + m_1 g \sin\alpha + F_{R1} \tag{37}$$

$$0 = T - m_2 g \sin\beta + F_{R2}, \tag{38}$$

respectivamente. Notemos que no podemos despejar ni F_{R1} ni F_{R2} en función de datos. Estos nos dice que, una vez fijado m_1, m_2, α y β, hay una infinidad de valores que pueden tomar las fuerzas de rozamiento de manera que esto se quede quieto. Sumando las ecuaciones (37) y (38) entonces

$$0 = m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta + F_{R1} + F_{R2}. \tag{39}$$

Entonces

$$F_{R1} + F_{R2} = g(m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha). \tag{40}$$

Pero por otro lado la experiencia nos dice que los bloques estarán en reposo si se cumple simultáneamente

$$|F_{R1}| \leq \mu_e |N_1| = \mu_e m_1 g \cos\alpha \tag{41}$$

$$|F_{R2}| \leq \mu_e |N_2| = \mu_e m_2 g \cos\beta. \tag{42}$$

Lo ideal sería poder combinar el resultado (40) con (41-42). Para ello apelamos a la desigualdad triangular:

$$|F_{R1} + F_{R2}| \leq |F_{R1}| + |F_{R2}|. \tag{43}$$

Teniendo en cuenta (41-42) entonces

$$|F_{R1} + F_{R2}| \leq |F_{R1}| + |F_{R2}| \leq \mu_e m_1 g \cos\alpha + \mu_e m_2 g \cos\beta = \mu_e g(m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta). \tag{44}$$

Reemplazando el resultado (40) entonces

$$|m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha| \leq \mu_e(m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta). \tag{45}$$

Que podemos escribir como

$$-\mu_e(m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta) \leq m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha \leq \mu_e(m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta). \tag{46}$$

Notemos que si $m_1 = m_2$ y $\alpha = \beta$ entonces la desigualdad (46) se verifica, incluso haciendo $\mu_e = 0$.

Supongamos que $m_1 = 1$Kg, $m_2 = 2$Kg, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$ y $\mu_e = 0.3$. Queremos averiguar si el sistema se pondrá en movimiento o si permanecerá en reposo. Para ello debemos reemplazar estos valores en la doble desigualdad (46) y ver si se cumple. Si lo hace entonces el sistema permanece en reposo. De lo contrario, se mueve. Conviene dividir la condición (46) por m_1, de manera que

$$-\mu_e\left(\cos\alpha + \frac{m_2}{m_1}\cos\beta\right) \leq \frac{m_2}{m_1}\sin\beta - \sin\alpha \leq \mu_e\left(\cos\alpha + \frac{m_2}{m_1}\cos\beta\right). \tag{47}$$

Recordando que

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \tag{48}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{49}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{50}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}. \tag{51}$$

entonces

$$\frac{m_2}{m_1}\sin\beta - \sin\alpha = 2\sin 30° - \sin 60° = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.13 \tag{52}$$

$$\mu_e\left(\cos\alpha + \frac{m_2}{m_1}\cos\beta\right) = \frac{3}{10}(\cos 60° + 2\cos 30°) = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) \approx 0.67. \tag{53}$$

Reemplazando en la desigualdad (47) tenemos

$$-0.67 \leq 0.13 \leq 0.67. \tag{54}$$

Claramente se cumple. El sistema permanece en reposo.

Por esta razón para poner en movimiento al sistema debemos imprimirle una velocidad inicial. Supogamos que tomamos $v_0 > 0$. Como la soga es inestensible, entonces $x_1 - x_2$ es constante y por lo tanto $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 \equiv \ddot{x}$. Como el sistema se mueve hacia los x crecientes, entonces cada masa experimenta una fuerza de rozamiento que apunta para los x decrecientes. Entonces la segunda ley de Newton ahora es

$$m_1\ddot{x} = -T + m_1 g \sin\alpha - \mu_d m_1 g \cos\alpha \tag{55}$$

$$m_2\ddot{x} = T - m_2 g \sin\beta - \mu_d m_2 g \cos\beta. \tag{56}$$

Sumando (55) y (56) entonces podemos despejar la aceleración del sistema:

$$\ddot{x} = g\frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 + m_2} - \mu_d g \frac{m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta}{m_1 + m_2}. \tag{57}$$

Usando los valores de masas y ángulos anteriores y considerando $\mu_d = \frac{1}{4}$ entonces

$$\ddot{x} = \frac{g}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{8}\right) < 0. \tag{58}$$

Por lo tanto el sistema empieza a frenarse. Cuando la velocidad es exactamente cero, por el análisis realizado anteriormente, el sistema queda en reposo indefinidamente.