Física 1, primer cuatrimestre de 2020: Problema 11.7

Ignacio Perito (iperito@df.uba.ar)

Va el problema 7 de la guía de gravitación. Es un claro problema de dos cuerpos, así que pueden aprovecharlo para aplicar la teoría que repasamos en las notas anteriores. Como la situación es bien simétrica y simpática (masas iguales, velocidades iniciales iguales en módulo y opuestas en dirección), es sencillo resolverlo sin recurrir al formalismo de masa reducida, así que vamos por camino más tradicional. Les queda a ustedes como ejercicio resolverlo usando el otro formalismo.

1. Problema 11.7

Nos dicen que el sistema se encuentra sobre una mesa pero, dado que no hay rozamiento, podríamos suponer que no hay mesa y todo sucede en el espacio y en ausencia de fuerzas externas y es lo mismo[1].

1.1. Incisos (a) y (b)

Si nuestro sistema son las dos partículas, la suma de las fuerzas externas es nula y por ende el momento lineal del sistema se conserva. Si lo calculamos en el instante inicial (en un sistema de referencia fijo a la mesa), es sencillo ver que, además de conservarse, es igual a cero. Tenemos entonces que el centro de masa del sistema se mantiene quieto para todo instante de tiempo. Si está quieto, en particular, es un sistema inercial; así que parece una decisión razonable tomarlo como origen de coordenadas para el resto del problema. Como las únicas fuerzas sobre el sistema son internas y actúan en la dirección que une a ambas partículas, la suma de torques externos es nula y por ende también se conserva el impulso angular. Esto es facil de ver desde el centro de masa porque los torques se anulan por separado, pero también es cierto desde cualquier otro origen inercial. Si O es un sistema inercial cualquiera, la suma de torques sobre el sistema resulta:

$$\sum \vec{\tau}^{(O)} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_{21} \,, \tag{1}$$

[1] Si el sistema está en una mesa sobre la Tierra, los pesos de cada partícula se cancelan con las normales y los torques de dichas fuerzas se anulan también de a pares.

donde $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que la partícula 2 ejerce sobre la partícula 1 y lo mismo para $\vec{F}_{12}$. Ahora, como la interacción gravitatoria respeta la versión fuerte de la tercera ley de Newton (es decir, las dos fuerzas no son sólo iguales y opuestas sino que **además** actúan en la dirección que une a ambas partículas), tenemos:

$$\sum \vec{\tau}^{(O)} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F}_{12} = \vec{0}\,, \tag{2}$$

donde en la última igualdad usamos que el vector $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ es paralelo a $\vec{F}_{12}$, por lo que dijimos antes. El problema no esperaba que entremos en estos detalles, pero es importante mencionar que, aunque elijamos un sistema de referencia donde los vectores fuerza -por separado- no sean paralelos a los vectores posición, el torque neto sigue anulándose. Dicho esto, nos pararemos en el sistema centro de masa por lo que resta del ejercicio. En la figura 1 les ponemos nombres a las partículas e indicamos el sistema de referencia que utilizaremos.

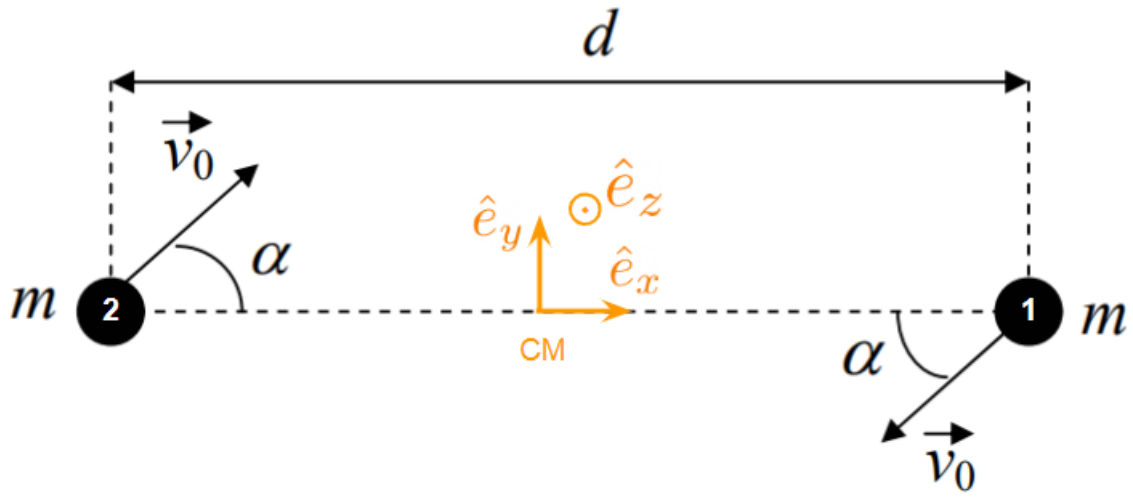

Figura 1: Tomamos el origen de coordenadas en el centro de masa y un sistema cartesiano para calcular las magnitudes conservadas en el instante inicial. Para un instante arbitrario será cómodo usar el sistema de polares asociado a alguna de las partículas, por ejemplo, la masa 1.

La única fuerza que realiza trabajo se deriva de un potencial que depende de la distancia entre las partículas por lo que la energía mecánica **del sistema** también se conserva.

1.2. Inciso (c)

Empecemos calculando, en función de datos, las cantidades conservadas. El momento lineal del sistema ya dijimos que es cero. Para el momento angular, en el instante inicial (el que está dibujado en la figura) tenemos:

$$\vec{L}^{(CM)} = \frac{d}{2}\hat{e}_x \wedge mv_0(-\cos\alpha\hat{e}_x - \sin\alpha\hat{e}_y) - \frac{d}{2}\hat{e}_x \wedge mv_0(\cos\alpha\hat{e}_x + \sin\alpha\hat{e}_y) = -mdv_0\sin\alpha\hat{e}_z\,. \tag{3}$$

La energía mecánica se obtiene como la suma del potencial gravitatorio y las energías cinéticas de las dos partículas. En particular, en el instante inicial se tiene:

$$E = mv_0^2 - \frac{Gm^2}{d} \,. \tag{4}$$

Para que las cantidades conservadas nos sirvan de algo, necesitamos expresiones de dichas cantidades en un instante cualquiera. Ahora es cuando conviene pasar a una descripción en polares[2]. Si tomamos $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$ *siguiendo* a la partícula 1, para el momento angular tenemos:

$$\vec{L}^{(CM)} = mr_1^2\dot{\theta}_1\hat{e}_z + mr_2^2\dot{\theta}_2\hat{e}_z \,, \tag{5}$$

pero, como ambas partículas son iguales, en el sistema centro de masa tenemos $r_1 = r_2 \equiv r$ y $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}$. La expresión anterior entonces se escribe simplemente:

$$\vec{L}^{(CM)} = 2mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z \,, \tag{6}$$

por lo que la conservación del momento angular se lee:

$$2mr^2\dot{\theta} = -mdv_0 \sin\alpha \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{dv_0 \sin\alpha}{2r^2} \,. \tag{7}$$

El signo en la expresión anterior es coherente con nuestra elección de ejes: el sistema se mueve de manera que $\dot{\theta} < 0$ (es decir, en sentido horario).

La expresión para la energía en un instante arbitrario resulta:

$$E = m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{Gm^2}{2r} \,, \tag{8}$$

donde nuevamente hemos usado que $r_1 = r_2 = r$ y la igualdad de las velocidades angulares. Para el término de potencial gravitatorio hay que tener cuidado: como $r_1 = r_2 = r$, tenemos que la distancia entre las partículas se escribe $2r$. Usando la conservación del momento angular (7), podemos recurrir a la ya vieja y querida triquiñuela de escribir $\dot{\theta}$ en términos de la coordenada radial, por lo que la conservación de la energía puede reescribirse[3]:

$$E = mv_0^2 - \frac{Gm^2}{d} = m\dot{r}^2 + \frac{md^2v_0^2\sin^2\alpha}{4r^2} - \frac{Gm^2}{2r} \,. \tag{9}$$

Nuestro objetivo es averiguar las componentes tangencial y radial de la velocidad cuando las partículas se encuentran separadas por una distancia $\frac{d}{2}$, es decir, cuando $r = \frac{d}{4}$. De las

[2]El eje $\hat{e}_z$ es el mismo así que este cambio no afecta la expresión del momento angular inicial. Dicho de otra forma: si lo hubiésemos calculado en polares obteníamos lo mismo. La energía es un escalar así que no importa cómo apuntan nuestros ejes a la hora de calcularla... si importa el origen, pero es el mismo en ambos casos.

[3]Notar que el término cinético queda $m\dot{r}^2$. Si usan el formalismo general del problema de dos cuerpos de las notas anteriores, acá trabajarían con la distancia entre las partículas $\tilde{r} = 2r$ y la masa reducida en este problema resulta $\mu = \frac{m}{2}$. Es fácil ver que entonces $m\dot{r}^2 = \frac{\mu}{2}\dot{\tilde{r}}^2$ y, como debe ser, ambos caminos dan lo mismo.

ecuaciones (7) y (9) podemos averiguar $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$ en esa situación y listo el pollo. Evaluando (7) en $r = d/4$ obtenemos:

$$\dot{\theta}\left(r = \frac{d}{4}\right) = -\frac{8v_0 \sin\alpha}{d}\,, \tag{10}$$

y la velocidad tangencial (por ejemplo de la partícula 1), la obtenemos multiplicando por el radio en dicho instante que es $\frac{d}{4}$:

$$v_\theta\left(r = \frac{d}{4}\right) = -2v_0 \sin\alpha\,. \tag{11}$$

La ecuación de la energía (9), evaluada en $r = \frac{d}{4}$, queda:

$$mv_0^2 - \frac{Gm^2}{d} = m\dot{r}^2 + 4mv_0^2 \sin^2\alpha - \frac{2Gm^2}{d}\,, \tag{12}$$

de donde podemos despejar la velocidad radial en el instante de interés:

$$v_r\left(r = \frac{d}{4}\right) = \dot{r}\left(r = \frac{d}{4}\right) = \pm\sqrt{v_0^2\left(1 - 4\sin^2\alpha\right) + \frac{Gm}{d}}\,. \tag{13}$$

Tiene sentido que, en caso de existir solución, haya una positiva y una negativa: porque podemos estar en la situación en la que las partículas están acercándose ($\dot{r} < 0$) o alejándose ($\dot{r} > 0$). También podría pasar que el argumento de la raíz sea 0, en cuyo caso $r = \frac{d}{2}$ es la distancia de **máximo acercamiento** entre las partículas. Más allá de esto, podría pasar que el argumento de la raíz fuera negativo y en dicho caso **no hay solución**. Para que el argumento de la raiz sea negativo, para empezar, necesitamos que $(1 - 4\sin^2\alpha) < 0$ (si no pasa esto, el argumento de la raíz es la suma de dos términos positivos) o, lo que es lo mismo, $\sin\alpha > \frac{1}{2}$. En este caso, si además sucede que:

$$v_0 > \sqrt{\frac{Gm}{d(4\sin^2\alpha - 1)}}\,, \tag{14}$$

tendremos no hay solución para $\dot{r}$. ¿Qué significa esto físicamente? que si el ángulo es lo suficientemente grande ($\sin\alpha > \frac{1}{2}$) y a su vez las velocidades iniciales también lo son (de manera que vale la desigualdad (14)), las partículas **nunca llegarán** a estar a una distancia $\frac{d}{2}$. Cuando exista solución, la velocidad de la partícula 1 en el instante de interés será $\vec{v} = v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta$ donde v_θ y v_r están dadas por las ecuaciones (11) y (13) y, por conservación del momento lineal, la velocidad de la otra será igual y opuesta[4]

El ejercicio termina acá y, gracias a que todo es muy simétrico y simpático, fue fácil resolverlo sin recurrir al potencial efectivo. Por completitud (y porque en el caso general es mucho más amigable este camino) veamos qué información adicional sale fácil de mirar el potencial efectivo.

[4]Recordar que los ejes polares que estamos usando están asociados a la partícula 1, por lo que tiene sentido que haya que cambiarle el signo a la velocidad cuando miramos a la partícula 2 usando estos ejes.

1.3. Potencial efectivo

El trabajo sucio ya está hecho. Lo que vamos a hacer aquí es simplemente re-escribir la ecuación (9) según:

$$E = T_{eff} + V_{eff} \,, \tag{15}$$

donde lo único que hicimos fueron dos bautismos:

$$T_{eff} \equiv m\dot{r}^2 \quad \text{y} \quad V_{eff} \equiv \frac{md^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{4r^2} - \frac{Gm^2}{2r} \,, \tag{16}$$

de manera que la conservación de la energía se puede pensar como una condición de balance entre un término cinético T_{eff} y un término potencial V_{eff} para un movimiento unidimensional (la única variable que aparece en la expresión es r). La figura (2) muestra un boceto del potencial efectivo. Notar que diverge para $r \to 0$ y tiende a cero cuando $r \to \infty$. Los puntos de retorno $\dot{r} = 0$ ($T_{eff} = 0$) corresponden a los cortes del potencial efectivo con el valor (constante) de la energía mecánica ($E = V_{eff}$). Del gráfico se ve claramente que cuando $E = mv_0^2 - \frac{Gm^2}{d}$ es mayor o igual a cero, habrá un punto de máximo acercamiento pero no de máximo alejamiento, por lo que el movimiento será **no ligado**. Cuando $E < 0$, el movimiento será ligado.

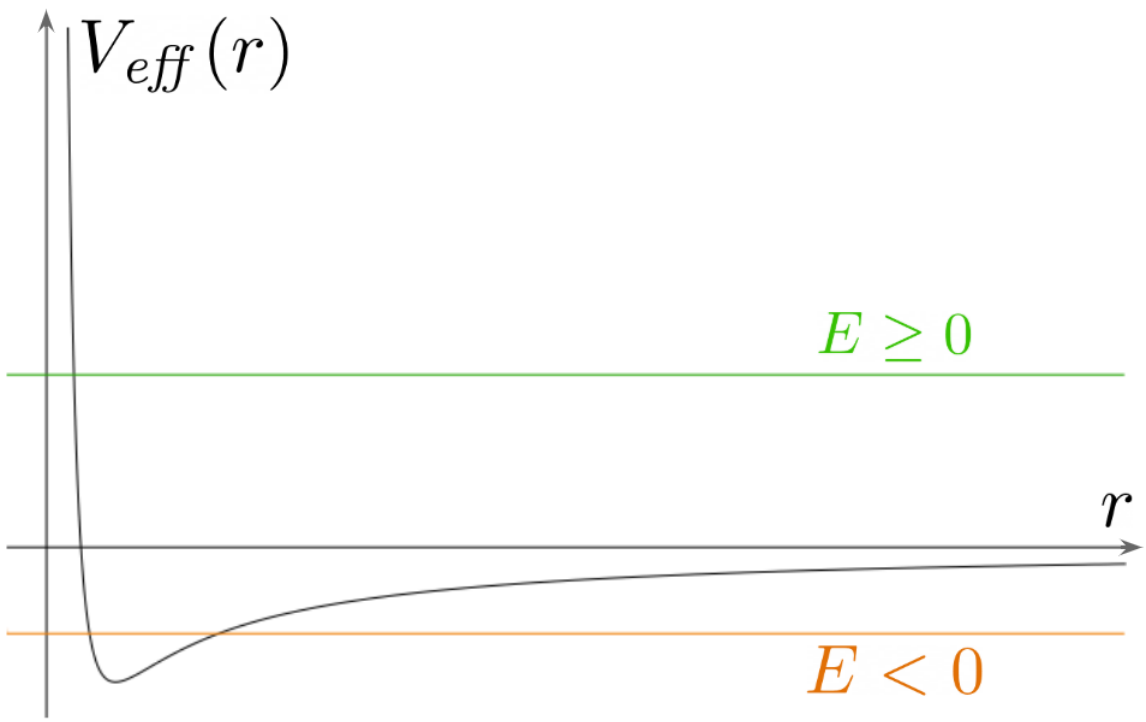

Figura 2: Boceto del potencial efectivo. Cuando la energía es negativa (caso naranja) tendremos dos puntos de retorno. Cuando la energía es no negativa (caso verde), el movimiento no será ligado.

Aquí es importante notar algo: si miramos de manera inocente el gráfico anterior, pareciera si la energía es lo suficientemente grande (lo cual podemos lograr dándole valores lo

suficientemente grandes a v_0), tendremos que el punto de retorno estará tan cerca de $r = 0$ como se nos antoje. **¡Grave error!** Es muy importante entender que el potencial efectivo **también depende de las condiciones iniciales** (los valores de v_0, d y α aparecen en la definición del potencial efectivo), por lo que al cambiar las condiciones iniciales (por ejemplo aumentando la velocidad inicial v_0), no sólo movemos para arriba la recta horizontal asociada a la energía sino que también *cambiamos la forma* del potencial efectivo. Está muy bien que esto sea así, porque para velocidades iniciales bestiales, es de esperar que las partículas comiencen a alejarse indefinidamente y la distancia de máximo acercamiento sea simplemente la distancia inicial d. Sería muy extraño que para velocidades iniciales muy grandes, la distancia de máxima acercamiento tienda a cero, como una primera mirada ingenua del gráfico indicaría. **Lo discutido en este párrafo es importante y sucede siempre: el potencial efectivo depende de las condiciones iniciales. Ojo con eso.**

La condición de movimiento ligado, $E < 0$, en términos de datos, se escribe:

$$v_0 < \sqrt{\frac{Gm}{d}}\,, \tag{17}$$

que da el valor máximo que debe tener la velocidad inicial para que las partículas no logren escaparse una de la otra. Si queremos los puntos de retorno, planteamos $E = V_{\mathit{eff}}$:

$$mv_0^2 - \frac{Gm^2}{d} = E = \frac{md^2v_0^2\sin^2\alpha}{4r^2} - \frac{Gm^2}{2r}\,, \tag{18}$$

a primera vista parece una ecuación un poco diabólica. Pero si multiplicamos todo por r^2, esto se transforma en una simple y tierna cuadrática[5]:

$$r^2 + \frac{Gm^2}{2E}r - \frac{md^2v_0^2\sin^2\alpha}{4E} = 0\,, \tag{19}$$

de donde sale:

$$r_\pm = -\frac{Gm^2}{E} \pm \sqrt{\frac{G^2m^4}{E^2} + \frac{md^2v_0^2\sin^2\alpha}{4E}}\,. \tag{20}$$

Notar que, cuando $E > 0$, el módulo de la raíz es mayor a $\frac{Gm}{E}$, por lo que una de las soluciones será positiva y otra negativa (sin sentido físico, pues r es una variable positiva). Esto es coherente con el hecho de que cuando $E > 0$, sólo hay un punto de retorno. Cuando la energía es negativa, es sencillo ver que ambas soluciones son positivas, como es de esperar.

El álgebra es medio molesta, pero de imponer que la solución r_- (punto de máximo acercamiento) sea mayor a $\frac{d}{4}$, verán que recuperan la relación (14) que obtuvimos antes.

[5]Este truco es muy usual a la hora de buscar puntos de retorno en un problema gravitatorio. También dividimos por E para que el coeficiente principal sea 1 y las cuentas sean más amigables. Desde luego, estamos suponiendo $E \neq 0$; pero si $E = 0$ el punto de retorno sale directamente sin necesidad de resolver la cuadrática.