* nigro@df.uba.ar

GRAVITACIÓN: PROBLEMA 11-4 Y GENERALIDADES

MAURO NIGRO *

En el esquema de la figura tenemos un tubo apoyado sobre la superficie de la Tierra. La dirección del tubo coincide con el eje $\hat{y}$. Una masa m puede moverse dentro del tubo de manera que si especificamos sus coordenadas como x, y, z, entonces tenemos

$$x = R \tag{1}$$

$$z = 0 \tag{2}$$

en todo momomento, donde R es el radio de nuestro querido planeta. La idea de este problema es analizar los posibles movimientos de m a lo largo del tubo empleando consideraciones energéticas. Vamos a analizar este problema de tres maneras diferentes, todas equivalentes entre sí.

1. La conservación de la energía escondida en la segunda ley de Newton

La fuerza de atracción gravitatoria que siente m debido a la Tierra puede escribirse como

$$\bar{F}_{mM} = -\frac{G\,m\,M}{r^2}\,\hat{r}, \tag{3}$$

donde $\hat{r}$ es un versor ubicado en el centro de la Tierra que apunta a m. Por otro lado r es la distancia del centro de la Tierra a m. La ecuación (3) es la ley de gravitación universal y por supuesto es válida para $r \geq R$. Notemos que la hemos formulado de forma general. Lo que haremos a continuación es adaptarla a nuestro problema, es decir, emplearemos las condiciones de vínculo (1-2).

En nuestro problema particular conviene emplear coordenadas cartesianas. La manera más rápida de escribir $\bar{F}_{mM}$ en cartesianas es notar que por definición es $\bar{r} = r\,\hat{r}$ de manera que

$$\hat{r} = \frac{\bar{r}}{r} = \frac{R\,\hat{x} + y\,\hat{y}}{\sqrt{R^2 + y^2}}, \tag{4}$$

donde hemos usado que $\bar{r} = R\,\hat{x} + y\,\hat{y}$. Reemplazando (4) en (3) y usando que $r^2 = R^2 + y^2$, la segunda ley de Newton en cartesianas toma la forma

$$0 = m\ddot{x} = -\frac{GmM}{(R^2 + y^2)^{3/2}}\,R + F_V \tag{5}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{GmM}{(R^2 + y^2)^{3/2}}\,y \tag{6}$$

$$0 = m\ddot{z} \tag{7}$$

En $\hat{z}$ no hace falta introducir ninguna fuerza de vínculo puesto que en nuestras coordenadas la fuerza gravitatoria en $\hat{z}$ es cero. En cambio en el eje $\hat{x}$ debemos introducir una fuerza de vínculo que compense la fuerza gravitatoria en $\hat{x}$. Cancelando m en (6) llegamos a la ecuación de movimiento del problema:

$$\ddot{y} = -\frac{GM}{(R^2 + y^2)^{3/2}}\,y \tag{8}$$

Al igual que cuando estudiamos el péndulo, o el pingüino de Nacho en donde uno calculaba $\dot{\theta}(\theta)$ empleando la regla de la cadena, aquí podemos hacer lo mismo con la coordenada y. Para eso notamos que

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d\dot{y}}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{d\dot{y}}{dy}\dot{y} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{y}^2}{dy}, \tag{9}$$

de manera que la ecuación de movimiento (8) se puede integrar directamente:

$$\frac{1}{2}\int_{\dot{y}_i}^{\dot{y}_f} d\dot{y}^2 = -GM\int_{y_i}^{y_f} dy\,\frac{y}{(R^2 + y^2)^{3/2}}. \tag{10}$$

Aquí $\dot{y}_i$ y $\dot{y}_f$ son las velocidades inicial y final respectivamente, mientras que y_i e y_f son las coordenadas inicial y final, respectivamente. El miembro izquierdo de (10) se integra directamente para dar $\frac{1}{2}\dot{y}_f^2 - \frac{1}{2}\dot{y}_i^2$. Esto tiene olor a variación de energía cinética. La baranda no tiene precedentes. Calculemos ahora la otra integral. Para ello hacemos un cambio de variables: $u = y^2$. Entonces

$$-GM \int_{y_i}^{y_f} dy \, \frac{y}{(R^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{G\,M}{2} \int_{y_i^2}^{y_f^2} du \, \frac{1}{(R^2+u)^{3/2}}. \tag{11}$$

Ahora realizamos un nuevo cambio de variables: $s = u + R^2$, de manera que $du = ds$ y la integral (11) queda

(12)

$$-\frac{G\,M}{2} \int_{y_i^2}^{y_f^2} du \, \frac{1}{(R^2+u)^{3/2}} = -\frac{G\,M}{2} \int_{R^2+y_i^2}^{R^2+y_f^2} ds \, \frac{1}{s^{3/2}} = -\frac{G\,M}{2} \left(\frac{1}{-\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{R^2+y_f^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+y_i^2}} \right).$$

Por lo tanto la ecuación original (10) queda

$$\frac{1}{2}\dot{y}_f^2 - \frac{1}{2}\dot{y}_i^2 = \frac{G\,M}{\sqrt{R^2+y_f^2}} - \frac{G\,M}{\sqrt{R^2+y_i^2}}. \tag{13}$$

Multiplicando por m ambos mienbros tenemos y reordenando llegamos a

$$\frac{1}{2}m\dot{y}_f^2 - \frac{G\,m\,M}{\sqrt{R^2+y_f^2}} = \frac{1}{2}m\dot{y}_i^2 - \frac{G\,m\,M}{\sqrt{R^2+y_i^2}}. \tag{14}$$

Como y_f es arbitrario, podemos llamar $y_f \equiv y$. El miembro derecho de (14) es una constante que depende de las condiciones iniciales. Definiendo

$$E \equiv \frac{1}{2}m\dot{y}_i^2 - \frac{G\,m\,M}{\sqrt{R^2+y_i^2}}, \tag{15}$$

entonces obtenemos la ecuación de conservarción de la energía:

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{G\,m\,M}{\sqrt{R^2+y^2}} = E. \tag{16}$$

La cantidad $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$ se denonima energía cinética. El segundo término del miembro izquierdo de (16) es la energía potencial $V(y)$:

$$V(y) = -\frac{G\,m\,M}{\sqrt{R^2+y^2}} \tag{17}$$

Antes de estudiar en detalle la ecuación de conservación de la energía (16) veamos maneras alternativas de llegar al mismo resultado. Por el momento notemos que conociendo "la pinta" de la función $V(y)$, como E es una constante fijada por las condiciones iniciales, entonces para cada y podemos obtener información sobre la velocidad de la masa.

2. La conservación de la energía mediante el cálculo del trabajo

En la sección anterior obtuvimos la ecuación de conservación de la energía a partir de la segunda ley de Newton. Existe una manera alternativa de llegar al mismo resultado: mediante la noción de trabajo mecánico. El trabajo mecánico que realiza una fuerza $\bar{F}$ sobre una masa m cuyas posiciones inicial y final son $\bar{r}_i$ y $\bar{r}_f$, respectivamente, viene dado por

$$W_{if} = \int_{\bar{r}_i}^{\bar{r}_f} \bar{F} \, d\bar{r}, \tag{18}$$

donde se entiende que la partícula se desplaza de $\bar{r}_i$ a $\bar{r}_f$ solo por acción de la fuerza $\bar{F}$. Se trata de una integral de línea. En cursos más avanzados de matemática las van a estudiar en detalle. Aquí sólo calcularemos W_{if} para situaciones muy simples, de manera que no es necesario mucho aparato matemático.

Notemos que $\bar{F}$ representa la fuerza resultante que opera sobre la masa m, es decir, la sumatoria de fuerzas. Independientemente de $\bar{F}$ podemos evaluar la integral (18) empleando la segunda ley de Newton. Usando que $m\bar{a} = \bar{F}$ entonces tenemos

$$W_{if} = \int_{\bar{r}_i}^{\bar{r}_f} \bar{F}\, d\bar{r} = \int_{\bar{r}_i}^{\bar{r}_f} m\, \bar{a}\, d\bar{r}. \tag{19}$$

En nuestro problema es $d\bar{r} = d(y\,\hat{y}) = \hat{y}\, dy$, por lo tanto en el producto escalar $\bar{a}\, d\bar{r}$ sólo sobrevive $a_y\, dy$. Entonces,

$$W_{if} = m \int_{y_i}^{y_f} dy\, a_y = m \int_{y_i}^{y_f} dy\, \frac{d\dot{y}}{dt} = m \int_{y_i}^{y_f} dy\, \frac{d\dot{y}}{dy}\frac{dy}{dt} = m \int_{y_i}^{y_f} dy\, \frac{d\dot{y}}{dy}\dot{y} = \frac{m}{2}\int_{\dot{y}_i^2}^{\dot{y}_f^2} d\dot{y}^2. \tag{20}$$

Por lo tanto

$$W_{if} = \frac{1}{2}m\, \dot{y}_f^2 - \frac{1}{2}m\, \dot{y}_i^2. \tag{21}$$

Hemos llegado a que el trabajo es la variación de energía cinética, independientemente de $\bar{F}$. Esto es un resultado general, nososotros lo hemos particularizado al problema en cuestión. Si no existiera ningún vínculo entonces llegaríamos a que $W_{if} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$, donde $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Aquí $v_x = v_z = 0$.

Calculemos ahora W_{if} especificando quién es $\bar{F}$. En virtud de la segunda ley de Newton (5-6) tenemos que

$$\bar{F} = F_V\, \hat{x} - \frac{GmM}{(R^2+y^2)^{3/2}}\, y\, \hat{y}. \tag{22}$$

Entonces recordando que $d\bar{r} = \hat{y}$, la integral (18) queda

$$W_{if} = \int_{y_i}^{y_f} F_V \hat{x}\, \hat{y}\, dy - G\, mM \int_{y_i}^{y_f} \frac{y}{(R^2+y^2)}\, \hat{y}\, \hat{y}\, dy. \tag{23}$$

El primer término es cero porque $\hat{x}\, \hat{y} = 0$. En otras palabras la fuerza de vínculo no realiza trabajo puesto que en todo momento es perpendicular al desplazamiento de m. Por lo tanto

$$W_{if} = -G\, mM \int_{y_i}^{y_f} \frac{y}{(R^2+y^2)}\, dy. \tag{24}$$

Pero esta integral ya la hemos calculado cuando analizamos la segunda ley de Newton (ver (11-12)). Por lo tanto

$$W_{if} = \frac{G\, mM}{\sqrt{R^2+y_f^2}} - \frac{G\, mM}{\sqrt{R^2+y_i^2}}. \tag{25}$$

Pero esta expresión debe ser la misma que (21). Por lo tanto llegamos a

$$\frac{1}{2}m\, \dot{y}_f^2 - \frac{1}{2}m\, \dot{y}_i^2 = \frac{G\, mM}{\sqrt{R^2+y_f^2}} - \frac{G\, mM}{\sqrt{R^2+y_i^2}}, \tag{26}$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{2}m\dot{y}_f^2 - \frac{G\, m\, M}{\sqrt{R^2+y_f^2}} = \frac{1}{2}m\dot{y}_i^2 - \frac{G\, m\, M}{\sqrt{R^2+y_i^2}}. \tag{27}$$

Hemos llegado al mismo resultado que antes:

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{G\, m\, M}{\sqrt{R^2+y^2}} = E = \text{cte} = \frac{1}{2}m\dot{y}_i^2 - \frac{G\, m\, M}{\sqrt{R^2+y_i^2}}. \tag{28}$$

El potencial es

$$V(y) = -\frac{G\, m\, M}{\sqrt{R^2+y^2}}. \tag{29}$$

Notemos que si derivamos el potencial (29) y lo multiplicamos por -1 obtenemos exactamente la fuerza gravitatoria en el eje $\hat{y}$. En efecto,

$$-\frac{dV}{dy} = G\,mM\Big(-\frac{1}{2}\Big)2y(R^2+y^2)^{-3/2} = -\frac{G\,mM}{(R^2+y^2)}\,y \tag{30}$$

Veamos que esto no es ninguna casualidad y es una propiedad de las fuerzas conservativas: Toda fuerza conservativa tiene asociada una función potencial escalar que depende sólo de las coordenadas tal que cada componente de la fuerza es igual a "menos" la derivada del potencial respecto de tal coordenada. En la sección siguiente veremos esto de manera más general. Por el momento notemos que dado que la fuerza de vínculo no realiza trabajo y que

$$F_{\text{grav}} = -\frac{dV}{dy},$$

entonces el trabajo es

$$W_{if} = \int_{y_i}^{y_f} -\frac{dV}{dy}\hat{y}\,\hat{y}dy = -(V(y_f)-V(y_i)), \tag{31}$$

es decir, el trabajo de una fuerza conservativa es igual a menos la variación de energía potencial: $W_{if} = -\Delta V$. Pero como también sabemos que $W_{if} = \Delta T$, siempre, entonces

$$\Delta T = -\Delta V,$$

o equivalentemente,

$$\Delta(T+V) = 0. \tag{32}$$

Esta ecuación es exactamente la misma que (28)

3. Potencial gravitatorio en general

Ignoremos por un momento las condiciones de vínculo (1-2), pensemos que la masa m es libre de moverse bajo la acción del campo gravitatorio debido al cuerpo M. Debido a que el momento angular de m se conserva entonces su trayectoria estará siempre contenida en un plano fijo, digamos, con normal $\hat{z}$. Por lo tanto el $\hat{r}$ que aparece en la ley de gravitación universal (3) equivale al famoso $\hat{r}$ de las coordenadas polares. Para efectuar el cálculo del trabajo debemos decir algo sobre $d\bar{r}$. Como $\bar{r} = r\hat{r}$ entonces

$$d\bar{r} = \hat{r}\,dr + r\,d\hat{r}. \tag{33}$$

Recordando que

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y} \tag{34}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}, \tag{35}$$

entonces

$$d\hat{r} = d\theta\,\hat{\theta}. \tag{36}$$

Por lo tanto

$$d\bar{r} = \hat{r}\,dr + \hat{\theta}\,r\,d\theta, \tag{37}$$

y el trabajo debido al campo gravitatorio queda

$$W_{if} = \int_{\bar{r}_i}^{\bar{r}_f} -\frac{G\,m\,M}{r^2}\,\hat{r}\,(\hat{r}\,dr + \hat{\theta}\,r\,d\theta) = \int_{r_i}^{r_f} -\frac{G\,m\,M}{r^2}\,dr = \frac{G\,mM}{r_f} - \frac{G\,mM}{r_i}. \tag{38}$$

Recordando que el trabajo de las fuerzas conservativas se puede escribir como $-\Delta V$ entonces el potencial gravitatorio es

$$V(r) = -\frac{G\,mM}{r}. \tag{39}$$

Observemos que se cumple

$$F_{mM} = -\frac{dV}{dr}. \tag{40}$$

Introduciendo las condiciones de vínculo entonces $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{R^2+y^2}$. Hemos obtenido el mismo potencial (29). Como la fuerza de vínculo no realiza trabajo entonces para escribir la ecuación de energía sólo nos queda imponer las condiciones de vínculo sobre la energía cinética, esto es, $v_x = v_z = 0$. Para concluir con esta parte notemos que podemos llegar a la expresión del potencial integrando la ecuación (40). En ese caso tendremos:

$$F_{mM} = -\frac{G\,mM}{r^2} = -\frac{dV}{dr} \to \int \frac{G\,mM}{r}\,dr = \int dV \to V(r) = -\frac{G\,mM}{r} + C, \tag{41}$$

donde C es una constante arbitraria, "el cero del potencial". Tal constante es irrelevante. En efecto la conservación de la energía se lee ahora

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{G\,mM}{r} + C = E = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{G\,mM}{r_i} + C, \tag{42}$$

por lo tanto se cancela C.

Como notarán hay muchas maneras de entender la conservación de la energía, todas equivalentes. Antes de analizar la ecuación de energía notemos que la ecuación de movimiento (8), que dedujimos simplemente planteando la segunda ley de Newton, también puede derivarse de la ecuación de conservación de la energía. Para ello derivando respecto del tiempo (28) nos queda

$$m\dot{y}\ddot{y} + \frac{dV}{dy}\dot{y} = 0 \to m\ddot{y} - f_{mM} = 0. \tag{43}$$

Recuperamos la segunda ley de Newton.

4. Análisis del potencial

La ecuación de conservación de la energía es

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + V(y) = E, \tag{44}$$

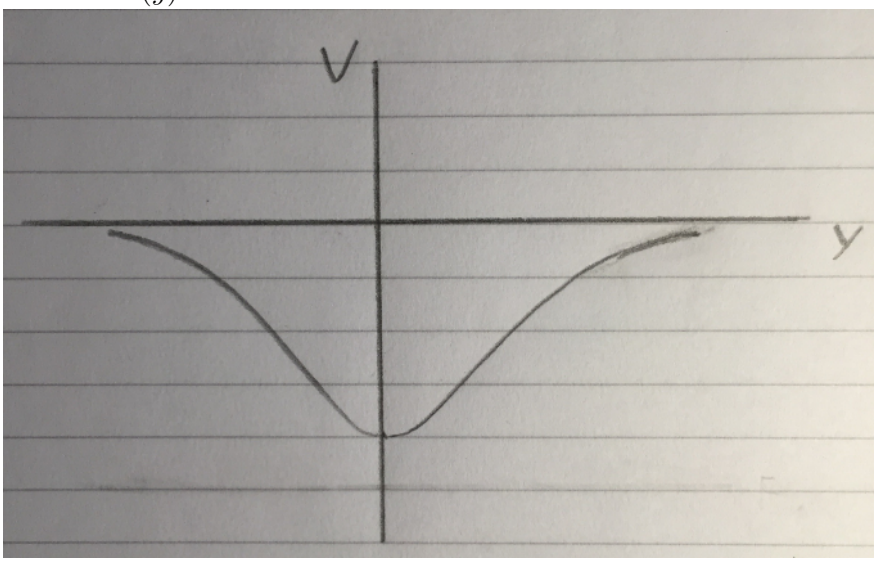
donde

$$V(y) = -\frac{G\,mM}{\sqrt{R^2+y^2}}, \tag{45}$$

donde según las condiciones iniciales del problema

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{G\,mM}{R}. \tag{46}$$

Veamos que conociendo la forma de $V(y)$, la ecuación (44) nos permite sacar conclusiones tanto cualitativas como cuantitativas. En primer lugar $V(y) < 0\ \forall\, y$. Además $\lim_{y\to\pm\infty} V(y) = 0$. Para buscar extremos anulamos la primer derivada y analizamos el signo de la segunda: $0 = \frac{dV}{dy} \to y = 0$. Por otro lado $\left.\frac{d^2V}{dy^2}\right|_{y=0} = \frac{G\,mM}{R^3} > 0$. Entonces en $y = 0$ la función alcanza un mínimo y es el único. La función $V(y)$ tiene la forma:



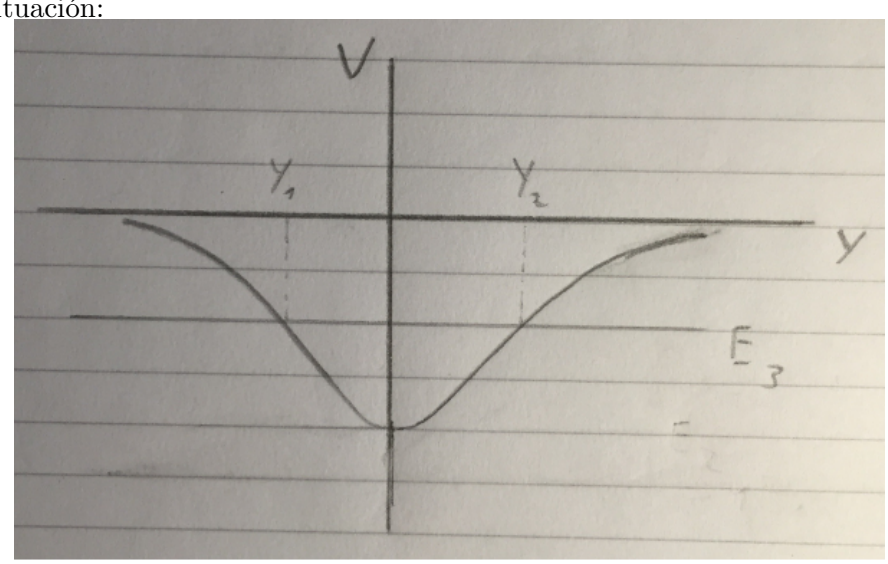
Para analizar los distintos tipos de movimiento superponemos la función $V(y)$ con la función constante $f(y) = E$, y vamos variando el valor de E.

Supongamos $E = E_1 < V(y = 0) = -\frac{GmM}{R}$. Sabemos que $T + V = E_1$, de manera que $T = E_1 - V(y) = V(y = 0) - V(y)$. Pero como $V(y = 0)$ es el mínimo absoluto de $V(y)$ entonces $V(y = 0) - V(y) < 0$ de manera que $T < 0$. Esto no tiene sentido dado que la energía cinética es siempre positiva. Por lo tanto los valores de energía $E_1 < V(y = 0)$ no tienen sentido.

Supongamos ahora que $E = E_2 = V(y = 0) = -\frac{GmM}{R}$. En este caso es $T = E_2 - V(y) = V(y = 0) - V(y)$. Nuevamente, como $V(y = 0)$ es el mínimo de $V(y)$ entonces $V(y = 0) - V(y) \leq 0$. Vimos antes que cuando $V(y = 0) - V(y) < 0$ entonces T es negativo y no tiene sentido. Por lo tanto en este caso sólo tiene sentido físico los valores de y para los que $V(y = 0) - V(y) = 0$, es decir $T = 0$. La partícula permanece indefinidamente en $y = 0$. Se trata de una posición de equilibrio. Efectivamente si miramos la ecuación de movimiento (8) podemos ver fácilmente que $y = 0$ es una posición de equilibrio. Recordando además que $F_{mM} = -\frac{dV}{dy}$ entonces resulta que las posiciones de equilibrio se corresponden a extremos del potencial. Antes para analizar la estabilidad analizábamos el signo de la derivada de la fuerza. En términos del potencial tenemos que $\frac{dF_{mM}}{dy} = -\frac{d^2V}{dy^2}$ de manera que

$$\text{Si } \left.\frac{d^2V}{dy^2}\right|_{y_{eq}} > 0 \text{ (mínimo de potencial)} \rightarrow y_{eq} \text{ estable}$$
$$\text{Si } \left.\frac{d^2V}{dy^2}\right|_{y_{eq}} < 0 \text{ (máximo de potencial)} \rightarrow y_{eq} \text{ inestable.}$$

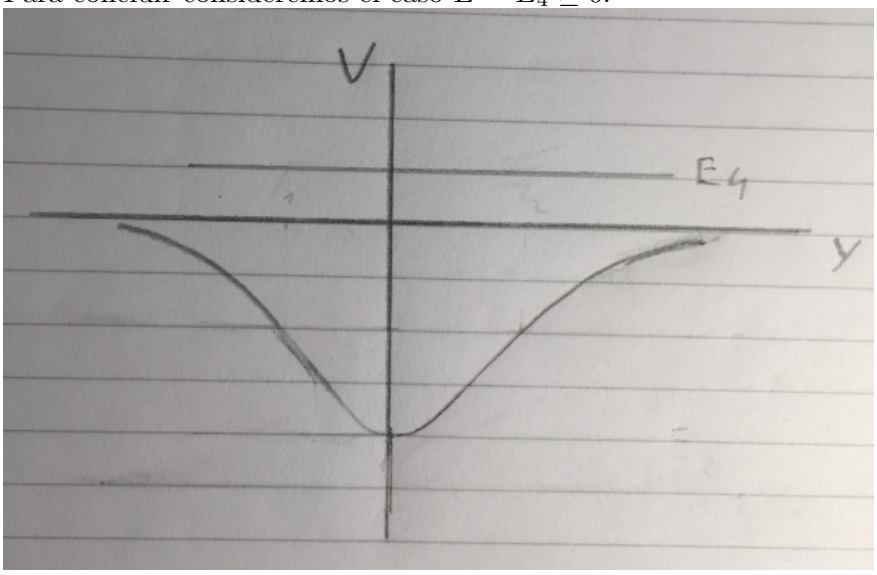
Veamos qué ocurre cuando $V(y = 0) < E = E_3 < 0$. En la siguiente figura representamos esta situación:



Para los valores y_1 e y_2 la recta $f(y) = E_3$ intersecta la curva $V(y)$, esto es, $E_3 = V(y_1) = V(y_2)$. Estos valores los calculamos despejando y de la ecuación $E_3 = V(y)$. Resulta $y_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{GmM}{E_3}\right)^2 - R^2}$. Recordando que $T = E_3 - V(y)$, entonces $T(y_1) = T(y_2) = 0$. En estos puntos la velocidad de m es cero. Por otro lado para $y < y_1$ y para $y > y_2$ es $T = E_3 - V(y) < 0$. Entonces tales regiones están prohibidas. La partícula no podrá alcanzarlas con las condiciones iniciales implícitas en E_3. Por el contrario, para $y_1 \leq y \leq y_2$ tenemos que $T = E_3 - V(y) \geq 0$ de manera que hemos encontrado el rango de valores de y en dónde la partícula se mueve. Notemos que $y_{1,2}$ son puntos de retorno. Efectivamente sabemos que allí la velocidad es cero. Veamos el signo de la aceleración. Para ello notamos que $\left.\frac{dV}{dy}\right|_{y_1} < 0$, por lo tanto $F_{mM}|_{y_1} = -\left.\frac{dV}{dy}\right|_{y_1} > 0$. La aceleración es positiva, de manera que la partícula se mueve hacia la derecha luego de alcanzar y_1. Por otro lado tenemos que $\left.\frac{dV}{dy}\right|_{y_2} > 0$, por lo tanto $F_{mM}|_{y_1} = -\left.\frac{dV}{dy}\right|_{y_1} < 0$. La aceleración es

negativa, de manera que la partícula se mueve hacia la izquierda luego de alcanzar y_2. En este caso decimos que el movimiento es ligado.

Para concluir consideremos el caso $E = E_4 \geq 0$.



En este caso $T = E_4 - V(y) > 0\ \forall y$, de manera que todos los valores de y están permitidos. No hay puntos de retorno. La masa se aleja indefinidamente. Por lo tanto concluimos que para que el movimiento sea ligado debe verificarse simplemente

$$E < 0. \tag{47}$$

Esto equivale a pedir que

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{G\,mM}{R} < 0, \tag{48}$$

de manera que

$$v_0 < \sqrt{\frac{2G\,M}{R}}. \tag{49}$$

Para $v_0 \geq \sqrt{\frac{2G\,M}{R}}$ la masa se aleja indefinidamente. En este caso a medida que $|y|$ crece la velocidad de la masa tienen a un valor constante $v_{\text{lejos}} = \sqrt{\frac{2E_4}{m}}$, puesto que para $|y|$ grande, $V(y) \to 0$.

5. Cerca del equilibrio estable

Analicemos la ecuación de movimiento cerca de $y_{\text{eq}} = 0$. Para ello debemos realizar un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $y = 0$ de la fuerza de gravedad:

$$F_{mM}(y) \approx F_{mM}(y=0) + \left.\frac{dF_{mM}}{dy}\right|_{y=0} y. \tag{50}$$

Esta aproximación tiene sentido porque $y = 0$ es un punto de equilibrio estable.

$$\frac{dF_{mM}}{dy} = -\frac{G\,mM}{(R^2+y^2)^{3/2}} + \frac{3G\,mM\,y^2}{(R^2+y^2)^{5/2}}. \tag{51}$$

Por lo tanto $\left.\frac{dF_{mM}}{dy}\right|_{y=0} = -\frac{G\,mM}{R^3}$ y la ecuación de movimiento la podemos aproximar por

$$m\ddot{y} \approx -\frac{G\,mM}{R^3}\,y, \tag{52}$$

o cancelando m,

$$\ddot{y} \approx -\frac{G\,M}{R^3}\,y, \tag{53}$$

Como $\frac{G\,M}{R^3}$ es un número positivo entonces la ecuación (53) es idéntica a la de un oscilador armónico con frecuencia angular de oscilación $\omega = \sqrt{\frac{G\,M}{R^3}}$. La solución general es entonces

$$y(t) = A\,\cos\omega\,t + B\,\sin\omega\,t. \tag{54}$$

Por un lado sabemos que

$$0 = y(t=0) = A\cos 0, \tag{55}$$

por lo tanto $A = 0$ de manera que $y(t) = B\,\sin\omega\,t$. Por otro lado

$$v_0 = \dot{y}(t=0) = B\,\omega\,\cos 0. \tag{56}$$

Entonces $B = \frac{v_0}{\omega}$. La solución final queda

$$y(t) = v_0\sqrt{\frac{R^3}{G\,M}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{G\,M}{R^3}}\,t\right). \tag{57}$$