Resolución Tarea 6: Gravitación 11.8

Física 1A - 2do Cuatrimestre 2020

Gonzalo Javier Alvarez

(gonzalojavieralvarez@hotmail.com)*

Acá va la resolución de la Tarea 6 para entregar. En este problema vamos a aplicar los teoremas de conservación aprendidos en las guías anteriores para un caso *resorte-gravitatorio*.

Ítem a

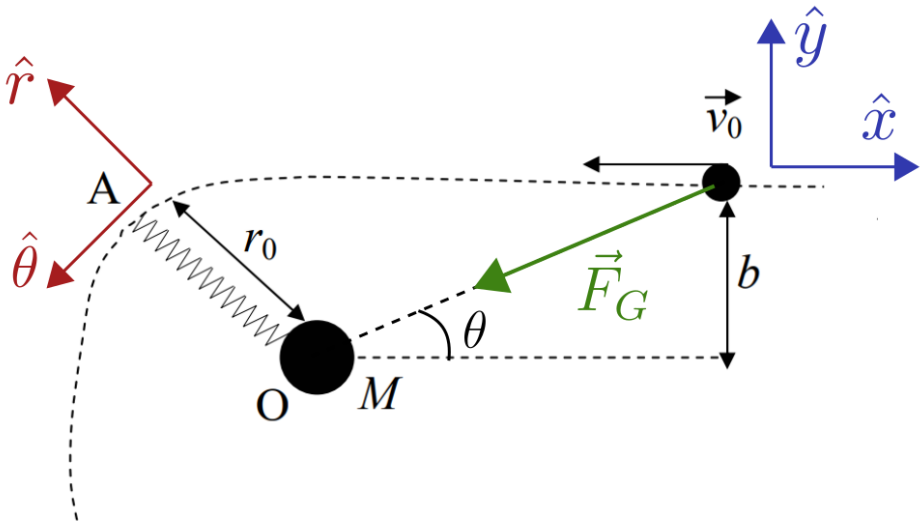

Figura 1: Esquema del problema. Utilizamos coordenadas cartesianas en el infinito y coordenadas polares en todo instante posterior. Antes del punto A la única fuerza actuante en la masa m es la fuerza gravitatoria que ejerce la masa M fija al punto O. Luego, en el punto A la partícula se engarza a un resorte con un extremo fijado al mismo punto por lo que se sumará una fuerza elástica.

Antes del punto A:

Empecemos analizando qué magnitudes se conservan en esta parte del problema. El **momento lineal no se conserva** ya que tenemos como única fuerza externa a la fuerza gravitatoria y nada la compensa por lo que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{F}_G \neq 0 \implies \vec{p} \neq \text{cte} \tag{1}$$

*Ante cualquier comentario o duda respecto a este resuelto chiflen.

(o simplemente notar que al seguir una trayectoria hiperbólica su velocidad y por ende su momento va cambiando instante a instante).

Por otro lado, dado que la fuerza gravitatoria es radial sabemos que **el momento angular se debe conservar**. Tomando polares con origen en el punto O (es decir, donde está fijada la masa M) de modo que la posición de la masa m viene dada por $\vec{r} = r\hat{r}$ podemos escribir la fuerza gravitatoria como

$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \tag{2}$$

Entonces, para ver explícitamente que el momento angular se conserva calculemos la suma de torques respecto a nuestro origen (solo debido a la fuerza gravitatoria):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_o}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{N}_i^{\text{ext}} = \vec{r} \times \vec{F}_G = r\hat{r} \times \left(-\frac{GMm}{r^2}\right)\hat{r} = 0 \implies \vec{L}_o = \text{cte} \tag{3}$$

recordando que $\hat{r} \times \hat{r} = 0$.

Por último, **la energía también se conservará** ya que la única fuerza involucrada es la gravitatoria que es una fuerza conservativa (no hay fuerzas no conservativas por lo que el trabajo de éstas es nulo)

$$W_{\text{NC}} = 0 \implies E = \text{cte} \tag{4}$$

Ahora, como la partícula viene desde el infinito, podemos calcular allí las magnitudes conservadas ya que facilitará la cuenta. Tomando coordenadas cartesianas (ver Figura 1) calculemos el momento angular en el infinito respecto al punto O tomando el vector posición como $\vec{r}_\infty = x\hat{x} + b\hat{y}$ donde podríamos decir que $x \to \infty$ (aunque esta componente en $\hat{x}$ no afecta la cuenta ya que es paralela a la velocidad)

$$\vec{L}_o^\infty = \vec{r}_\infty \times m\vec{v}_0 = (x\hat{x} + b\hat{y}) \times m(-v_0\hat{x}) = mbv_0\hat{z} \tag{5}$$

donde $\hat{x} \times \hat{x} = 0$ y $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$.

Nos dicen que la energía potencial gravitatoria es nula en el infinito $V_G(\infty) = 0$ (como es usual de definir en problemas de gravitación) por lo que la energía inicial de la partícula es simplemente la parte cinética:

$$E^\infty = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \tag{6}$$

Concluyendo, estas magnitudes se escriben de forma general en esta parte del trayecto como

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times m\vec{v} = r\hat{r} \times m(v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}) = mrv_\theta\hat{z} \tag{7}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \tag{8}$$

y al conservarse las podremos igualar a sus correspondientes valores iniciales en el infinito.

En el punto A:

En este punto $r = r_0$ la partícula se engancha a un resorte en su longitud natural $l_0 = r_0$. La fuerza elástica viene dada también en la dirección radial e integrándola conocemos su potencial asociado

$$\vec{F_{el}}(r) = -k(r - r_0)\hat{r} \implies V_{el}(r) = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 \tag{9}$$

Vemos que se anula en $r = r_0$ por lo que no habrá contribución en este punto ($V_{el}(r_0) = 0$) y la energía mecánica viene dada simplemente por los dos términos que ya teníamos anteriormente

$$E^A = \frac{1}{2}m{v_A}^2 - \frac{GMm}{r_0} \tag{10}$$

donde en principio $\vec{v_A} = \vec{v}(r_0) = v_{Ar}\hat{r} + v_{A\theta}\hat{\theta}$ pero como nos dicen que el punto A es el punto de máximo acercamiento, entonces, en la posición $r = r_0$ tendremos que la velocidad radial se anula $v_{Ar} = 0$ (en la coordenada radial este es un punto de retorno). Por lo que podemos afirmar que la velocidad en A será tangencial $\vec{v}_A = v_A\hat{\theta}$ y además $v_A > 0$ teniendo en cuenta la elección de polares mostrada en la Figura 1. Igualando la energía con la del infinito $E^A = E^\infty$

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \implies {v_A}^2 - \frac{2GM}{r_0} - {v_0}^2 = 0 \tag{11}$$

¿Quiénes son nuestras incógnitas? El problema nos pide calcular v_A y r_0, entonces dejemos esta ecuación por un rato y busquemos qué relación debe cumplir r_0 mediante el momento angular:

$$\vec{L}_o^A = r_0\hat{r} \times mv_A\hat{\theta} = r_0mv_A\hat{z} \tag{12}$$

y ahora igualemos $\vec{L}_o^A = \vec{L}_0^\infty$, entonces

$$r_0mv_A\hat{z} = mbv_0\hat{z} \implies r_0 = \frac{v_0}{v_A}b \tag{13}$$

Obteniendo esta relación, podemos reemplazar en (11) de modo que nos quede únicamente en términos de nuestra incógnita v_A

$${v_A}^2 - \frac{2GM}{bv_0}v_A - {v_0}^2 = 0 \tag{14}$$

Esto es una ecuación cuadrática, por lo que utilizando la vieja y confiable resolvente:

$$v_A = \frac{GM}{bv_0} \pm \sqrt{\left(\frac{GM}{bv_0}\right)^2 + {v_0}^2} \tag{15}$$

Como es habitual, obtenemos dos posibles valores de velocidad, una positiva y otra negativa (la energía no distingue la dirección de movimiento). Notando que el segundo término es mayor que el primero (el segundo es una hipotenusa en la que el primero es un cateto) y pidiendo que $v_A > 0$ como es el caso en nuestro problema, nos quedamos con la solución positiva.

$$\boxed{v_A = \frac{GM}{bv_0} + \sqrt{\left(\frac{GM}{bv_0}\right)^2 + {v_0}^2}} \tag{16}$$

Donde $\vec{v}_A = v_A\hat{\theta}$. De esta forma, queda determinado también el valor de r_0

$$\boxed{r_0 = \frac{v_0}{v_A}b} \tag{17}$$

Análogamente, uno podría haber invertido esta última relación para despejar $v_A = \frac{b}{r_0}v_0$ y en ese caso resolveríamos una cuadrática para r_0. De esta otra forma, llegamos a una expresión de este estilo:

$$v_0{}^2 r_0{}^2 + 2GMr_0 - b^2 v_0{}^2 = 0 \tag{18}$$

y resolviendo esta cuadrática obtenemos

$$r_0 = \frac{-2GM \pm \sqrt{\left(2GM\right)^2 + \left(2bv_0{}^2\right)^2}}{2v_0{}^2} \tag{19}$$

$$= \frac{-GM \pm \sqrt{\left(GM\right)^2 + \left(bv_0{}^2\right)^2}}{v_0{}^2} \tag{20}$$

Nuevamente acá hay dos soluciones y solo una de ellas es físicamente relevante. El segundo término nuevamente es mayor que el primero ya que (como pasaba en el otro caso) es la hipotenusa del cateto que forma cada uno de los términos, por lo que la respuesta es con el signo positivo ($r_0 > 0$ ya que es una distancia) entonces

$$\boxed{r_0 = \frac{-GM + \sqrt{\left(GM\right)^2 + \left(bv_0{}^2\right)^2}}{v_0{}^2}} \tag{21}$$

Después del punto A

Como ya dijimos, ahora la partícula se engancha al resorte y vimos que en el punto A esto no importaba ya que se encontraba en su longitud natural. En el resto del trayecto, lo único que cambia es que en la energía tendremos un término extra.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 \tag{22}$$

Repasemos rápidamente las magnitudes de interés:

- **Momento lineal:** Si antes no se conservaba ahora menos: ahora tenemos la fuerza gravitatoria y la fuerza elástica y no tienen razón de compensarse.

- **Momento angular:** De la misma forma que la fuerza gravitatoria tenía torque nulo por ser radial, con la fuerza elástica pasa lo mismo por lo que el momento angular se sigue conservando.

$$\vec{N}_{el} = \vec{r} \times \vec{F}_{el} = r\hat{r} \times \big(-k(r - r_0)\big)\hat{r} = 0 \tag{23}$$

- **Energía mecánica:** La fuerza elástica también deriva de un potencial y por lo tanto también es una fuerza conservativa por lo que la energía se sigue conservando.

Ítem b

Nos piden la velocidad de la partícula cuando se encuentre a distancia $d = 2r_0$ del punto O. Ahora sí habrá componente tanto radial como tangencial: $\vec{v}_f = v_{f_r}\hat{r} + v_{f\theta}\hat{\theta}$ (velocidad en este punto final). La componente tangencial vendrá de la mano de la conservación del momento angular mientras que la componente radial de la mano de la conservación de la energía. Veamos eso, calculamos el momento angular final: $\vec{L_{of}} = \vec{L_o}(2r_0)$

$$\vec{L_{of}} = 2r_0\hat{r} \times m(v_{f_r}\hat{r} + v_{f\theta}\hat{\theta}) = m2r_0v_{f\theta}\hat{z} \tag{24}$$

y lo igualamos al momento angular inicial en el infinito $\vec{L}_o^{\infty} = mbv_0\hat{z}$

$$m2r_0v_{f\theta}\hat{z} = mbv_0\hat{z} \implies \boxed{v_{f\theta} = \frac{b}{2r_0}v_0} \tag{25}$$

Vemos que $v_{f\theta} > 0$, es decir, la conservación del momento angular nos dice explícitamente el signo de la velocidad tangencial. Por otro lado, calculamos la energía final $E_f = E(2r_0)$

$$E_f = \frac{1}{2}m{v_f}^2 - \frac{GMm}{2r_0} + \frac{1}{2}k{r_0}^2 \tag{26}$$

donde el estiramiento del resorte es $\Delta r = r - r_0 = 2r_0 - r_0 = r_0$ y donde ${v_f}^2 = {v_{f_r}}^2 + {v_{f\theta}}^2$ es el módulo cuadrado de la velocidad final. Ahora, la igualamos a la energía inicial en el infinito $E^{\infty} = \frac{1}{2}m{v_0}^2$ entonces

$$\frac{1}{2}m{v_f}^2 - \frac{GMm}{2r_0} + \frac{1}{2}k{r_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \tag{27}$$

y despejando ${v_f}^2$

$${v_f}^2 = {v_0}^2 + \frac{GM}{r_0} - \frac{k}{m}{r_0}^2 \tag{28}$$

vemos que podemos hallar la velocidad radial según ${v_{f_r}}^2 = {v_f}^2 - {v_{f\theta}}^2$ reemplazando lo obtenido previamente para $v_{f\theta}$

$$v_{f_r} = \pm\sqrt{{v_0}^2 + \frac{GM}{r_0} - \frac{k}{m}{r_0}^2 - \left(\frac{b}{2r_0}v_0\right)^2} \tag{29}$$

que como dice el enunciado, está expresado en términos de r_0 y datos del problema. En este caso, la conservación de energía no nos explicita el signo de la componente radial (que dedujimos a partir del módulo de la velocidad) por lo que uno debe agregar información extra. Como partimos del punto A con $r = r_0$ entonces si la partícula alcanza $r = 2r_0$ con velocidad no nula, se tiene que $v_{f_r} > 0$ (luego podría oscilar y volver a tener un valor $r = 2r_0$ pero con velocidad radial negativa). La primera vez que alcance dicho valor tenemos que

$$\boxed{v_{f_r} = \sqrt{{v_0}^2 + \frac{GM}{r_0} - \frac{k}{m}{r_0}^2 - \left(\frac{b}{2r_0}v_0\right)^2}} \tag{30}$$

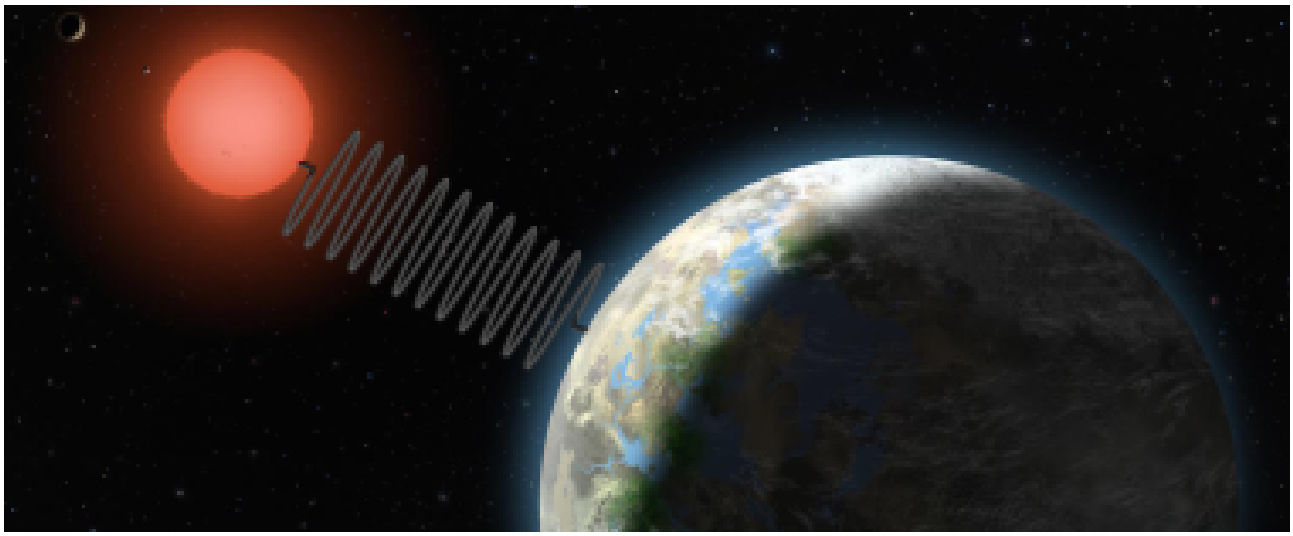

Figura 2: Es una recreación (nunca pasó).