Física 1 - Turno A - 1erC 2020 - DF-FCEyN, UBA

Luciano Andrés Masullo

lmasullo@df.uba.ar

Problema 11.5: nave despegando del planeta Tierra.

Este problema es un clásico ejemplo de todos los conceptos de conservación de magnitudes aplicado al caso del potencial gravitatorio.

1. Inciso (a)

Nos pide analizar si se conservan el i) impulso lineal $\vec{P}$, ii) el impulso angular $\vec{L}$ y iii) la energía mecánica H **de la nave**. No confundir con el mismo análisis para el sistema Tierra+nave.

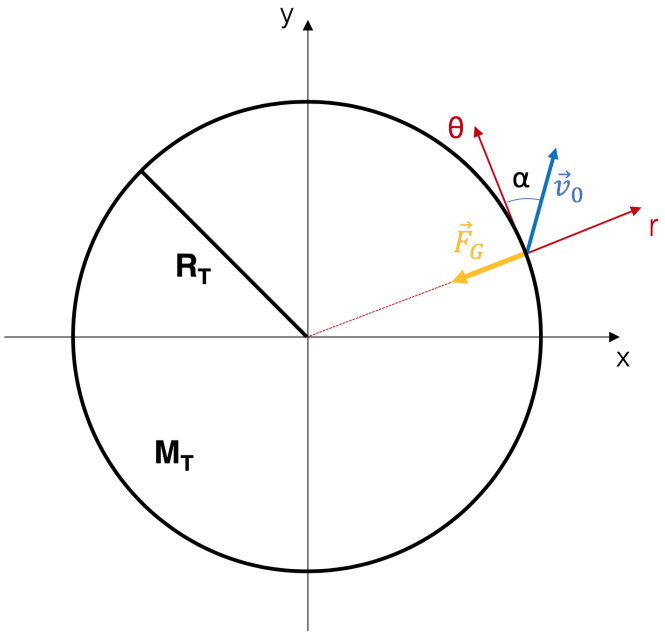

Figura 1: Esquema del problema, diagrama de fuerzas y sistemas de coordenadas.

Primero que nada, vamos a elegir un sistema de coordenadas polares como se indica en la Figura 1 y dibujar las fuerzas sobre la nave. La ayuda de suponer que la Tierra de masa M_T y radio R_T tiene toda la masa concentrada en su centro[1] hace que escribir la fuerza de interacción gravitatoria sobre la nave sea fácil, será $\vec{F_G} = \left(\frac{-GM_Tm}{r^2}\right)\hat{r}$. Veamos entonces las conservaciones (o no) de las distintas magnitudes:

i) Hay que considerar las fuerzas que actúan sobre la nave en el problema, la única es la fuerza gravitatoria. Luego

[1]Se puede demostrar que esto es equivalente sin suponerlo, pero el problema nos da esta ayuda para no hacerlo demasiado difícil

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F_i} = \vec{F_G} \neq 0 \rightarrow \boxed{\vec{P} \neq cte} \tag{1}$$

ii) Hay que considerar los *torques* que actúan sobre la nave. Luego

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M_i} = \vec{r} \times \vec{F_G} = r\hat{r} \times \left(\frac{-GM_T m}{r^2}\right)\hat{r} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{L} = cte} \tag{2}$$

iii) Veamos el trabajo de las fuerzas no conservativas... es nulo porque *no hay* fuerzas no conservativas actuando.

$$W_{nc} = 0 \rightarrow \boxed{H = cte} \tag{3}$$

2. Inciso (b)

Empecemos por calcular el potencial gravitatorio $V_G(r)$ que dado que no hay otro potencial en este problema llamaremos $V_G(r) \equiv V(r)$. Hay al menos dos maneras para obtener $V(r)$: i) calculando el trabajo de F_G, ii) proponiendo un potencial $V(r)$ que cumpla $F_G = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\hat{r}$

Veamos:

i) Calculamos el trabajo realizado por la fuerza desde $r' = \infty$[2] hasta $r' = r$.

$$V(r) - V_\infty = -\int_\infty^r \vec{F_G}(r')d\vec{r'} = -\int_\infty^r \left(\frac{-GM_T m}{r'^2}\ \hat{r}\right).\left(dr'\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}\right) \tag{4}$$

Pero recordemos que $\hat{r}.\hat{r} = 1$ y $\hat{r}.\hat{\theta} = 0$, luego

$$V(r) - V_\infty = -\int_\infty^r \frac{-GM_T m}{r'^2}dr' = \frac{-GM_T m}{r} \tag{5}$$

Si elijo $V_\infty = 0$ (y puedo, porque el potencial está definido a menos de una constante) obtenemos

$$\boxed{V(r) = -\frac{GM_T m}{r}} \tag{6}$$

ii) También es válido proceder, *proponiendo* $V(r) = \frac{-GM_T m}{r}$ y comprobar que

$$-\nabla V(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\hat{r} = -\frac{GM_T m}{r^2}\hat{r} = \vec{F_G} \tag{7}$$

pero para este camino tengan cuidado porque hay que llevarse bien con el operador gradiente.

Ya tenemos la energía potencial V ahora veamos la cinética T, en polares no es más que

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right] \tag{8}$$

[2] A quien lx perturbe demasiado igualar a un infinito, tome un R grande y después el límite $R \rightarrow \infty$.

Pero además, recordemos que $\vec{L}$ se conserva y a $t = 0$ vale

$$\vec{L}_0 = m\ \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = mR_T\hat{r} \times \left[v_0 \cos\alpha\ \hat{\theta} + v_0 \sin\alpha\ \hat{r}\right] = mR_T v_0 \cos\alpha \hat{z} \tag{9}$$

luego vale $\forall t$ que

$$L^2 = (mR_T v_0 \cos\alpha)^2 \tag{10}$$

con lo cual lo tenemos definido en función de los datos del problema. Pero recordemos que (ver Problema 10.6 ecuaciones 27 y 28) además

$$\frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 = \frac{L^2}{2mr^2} \tag{11}$$

Entonces usando (6), (8) y (11) y $H = T + V$ podemos escribir

$$\boxed{H = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{T'} + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GM_T m}{r}}_{V_{eff}(r)}} \tag{12}$$

donde una vez más, como el momento angular se conserva podemos analizar el problema como un análogo (efectivo) unidimensional en el que la partícula tiene energía cinética[3] $T' = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ y siente un potencial $V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GM_T m}{r}$ (Figura 2).

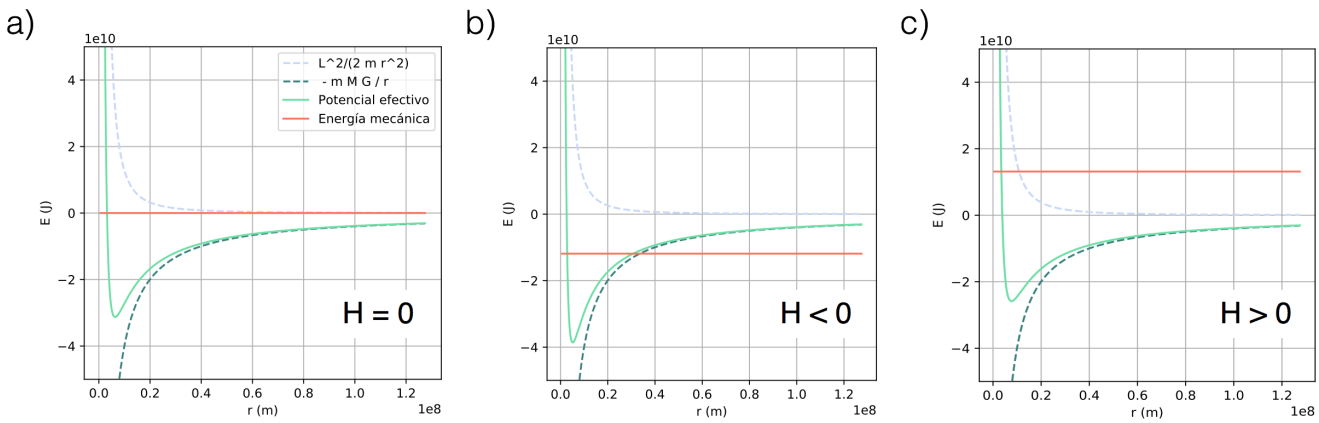

Figura 2: Gráficos de $V_{eff}(r)$ y H. **a)** $H = 0$ es el caso límite de escape, **b)** $H < 0$ el movimiento es ligado (hay r_{min} y r_{max} cuando H corta V_{eff}, **c)** $H > 0$ el movimiento no es ligado, no existe un r_{max}, H no corta por segunda vez V_{eff}.

Los valores de los parámetros usados son reales/realistas. Se tomaron $G = 6,67408 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, $\alpha = \pi/4$, la masa de la tierra $M_T = 5,972 \times 10^{24} Kg$, su radio $R_T = 6371 Km$, la masa de la nave

[3] Uso T' porque T tenía en cuenta la parte angular

$m = 1000Kg$, y las velocidades iniciales $v_0 = [11185, 10067, 12304]\ m/s$ para a), b), c) respectivamente. Nótese que los ejes dicen 1e10 y 1e8, eso significa $\times 10^{10}$ y $\times 10^{8}$ respectivamente. Para que no quede demasiado abarrotado no dibujé la posición de R_T en los gráficos. Búsquenla ustedes y determinen en cada caso si la nave puede realmente alcanzar r_{min}.

A algunx quizás le haga ruido que las energías tomen valores negativos o que el potencial gravitatorio vaya de $-\infty$ a 0, nuevamente esto no tiene nada de raro ya que lo que tiene sentido físico son las **diferencias** de potencial.

3. Inciso (c)

Observando el gráfico de la Figura 2, podemos determinar que hay dos zonas en las que el movimiento de la nave es *cualitativamente* diferente. Para $H < 0$ el movimiento va estar dado entre dos posiciones en r, es decir $r \in [r_{min}, r_{max}]$ esto es lo que se considera por definición un movimiento *ligado*. La nave va a realizar órbitas [4] alrededor de la tierra indefinidamente. Ojo, para ciertos valores de H podrían encontrar que la aproximación de la Tierra como masa puntual no es válida y chocar contra su superficie muriendo todos sus tripulantes. Para $H \geq 0$ no existe un r_{max} y la nave emprenderá un viaje que la llevará a $r \to \infty$ sin necesidad de prender ningún motor, sólo usando conservación de la energía. En la realidad eventualmente empezará a interactuar con el potencial gravitatorio de otro cuerpo (por ejemplo la Luna) y ahí cambia la dinámica. A la velocidad mínima que nos lleva a esta situación se la llama **velocidad de escape**.

Notemos en este punto que hay una relación que determina unívocamente v_0 y H porque la nave empieza siempre en el punto de lanzamineto en R_T con lo cual su energía potencial incial está fija. Lo único que (razonablemente) se puede modificar es la velocidad inicial y el ángulo del lanzamiento. Expresado en términos matemáticos:

$$H = \frac{1}{2}m(v_0)^2 - \frac{GM_T m}{R_T} \tag{13}$$

dónde usé la expresión $H = T + V$. Por lo discutido en el párrafo anterior, la velocidad v_0 mínima va a corresponder al caso $H = 0$, luego podemos usar (13) y despejar la velocidad de escape:

$$\boxed{|v_0| = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}} \tag{14}$$

Fíjense que v_0 **no depende** de la masa m. Esto podría llevar a una paradoja: ¿Da lo mismo lanzar un *nano-satélite*[5] que una nave tripulada a la Luna?

[4] Los invito a que resuelvan este problema numéricamente modificando el script de Python del Problema 10.6

[5] Los nanosatélites son pequeños satélites de unos $\approx 40Kg$, más de 100 veces más livianos que los satélites tradicionales. La empresa argentina Satellogic (`https://es.wikipedia.org/wiki/Satellogic`) es pionera en el campo.

La respuesta es que no, no da lo mismo, no olviden que para llegar a la energía cinética T, alguien tiene que haber realizado el trabajo

$$\Delta W_{nc} = T = \frac{1}{2} m {v_0}^2 \tag{15}$$

que sí depende de la masa. También parece antintuitivo, mirando (14) que la velocidad de escape no dependa del ángulo de lanzamiento α. Lo que sucede es que para $\alpha \approx \pi/2$ habrá muy poco movimiento en $\hat{\theta}$ (o nulo en el caso de la igualdad) y la nave hará su trayecto de escape en *menos tiempo* y con una trayectoria más parecida a una línea recta. Por otro lado para $\alpha \approx 0$ la nave dará muchas vueltas alrededor de la tierra y se irá alejando paulatinamente, tardará mucho más tiempo que en el caso del lanzamiento perpendicular para llegar a un mismo r. Esta discusión pone en evidencia cómo el análisis que hicimos hasta ahora nos dice poco y nada sobre la parametrización en el tiempo de la trayectoria de la nave $(\theta(t), r(t))$.

El problema termina acá, pero uno podría perfectamente plantear un inciso (d) en el que se pida resolver el problema para pequeñas oscilaciones (¿Cuál sería la condición sobre H?) y calcular cuánto viaja la nave alrededor de la tierra antes de estrellarse contra su superficie (¿Cómo pueden, mirando simplemente los gráficos de la energía, estar (casi) seguros de que bajo la hipótesis de pequeñas oscilaciones los tripulantes de la nave tienen muy pocas chances de sobrevivir? ¿Qué parámetros optimizan las chances de supervivencia de los astronautas?). Se los dejo de tarea.

Lanzamiento del satélite argentino de telecomunicaciones ARSAT II el 30 de Septiembre de 2015. Fue fabricado en Bariloche por la empresa INVAP.