Disgresión sobre los sistemas inerciales

La mecánica clásica usual, las leyes de Newton y en particular la ley de inercia tienen una hipótesis subyacente fundamental que es la existencia de un espacio y un tiempo absolutos en reposo independientemente del contenido del universo o sistema a tratar. De este modo siempre es posible definir sistemas de referencia en reposo o en MRU con respecto a ese espacio absoluto. Las ecuaciones de Newton son válidas **sólo** en estos sistemas, llamados inerciales, como veremos en breve.

Este *defecto* epistemológico inherente a la mecánica clásica fue señalado por Ernst Mach a fines de siglo XIX. La relatividad especial de Albert Einstein (1905) reinterpreta la concepción del espacio-tiempo absoluto, pero no obstante la existencia de sistemas de referencia privilegiados persiste. En la introducción del trabajo en el que se presenta la forma definitiva de la Relatividad General en 1916, Einstein propone la extensión del postulado de la relatividad inspirado en las críticas de Mach y enuncia que las leyes de la física deben ser aplicables a sistemas de referencia en cualquier tipo de movimiento. Las diferencias entre los sistemas de referencia sólo podrán basarse en su estado de movimiento en relación al resto de los cuerpos del universo (*resto del universo*) y no respecto de un espacio absoluto[1]. En 1918 Einstein atribuyó a Mach el requerimiento de que la inercia sea derivada de una interacción entre los cuerpos, y bautizó como *principio de Mach* a aquellos enunciados de la Relatividad General que realizaban esta idea.

Dentro de la mecánica clásica, y sin hablar de la teoría de la Relatividad, también es posible intentar eliminar la existencia de sistemas de referencia absolutos en términos de lo que se conoce como *mecánica relacional* [2].

Luego de la disgresión previa, recalcamos que podemos trabajar con la mecánica clásica usual de Newton sin ningún tipo de problemas pero debemos tener en cuenta la diferencia entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales como veremos a continuación. Vamos a lo que nos convoca.

[1]Rafael Ferraro, *El espacio-tiempo de Einstein*, Ediciones Cooperativas, 2da edición (2007).

[2]En este tipo de teorías no sería posible distinguir entre dos cuerpos en el vacío rotando en movimiento circular o en reposo, pues no existe forma de diferenciarlos sin proponer un sistema de referencia privilegiado. La distinción entre estos movimientos cobra sentido cuando se incorpora el *resto del universo*, como por ejemplo los astros distantes. En ese caso se puede distinguir si los cuerpos rotan o no rotan respecto del resto del universo.

Repaso sobre sistemas inerciales y no inerciales

Los sistemas inerciales serán los que se encuentre en reposo o en MRU respecto al espacio absoluto mencionado previamente. Dentro de estos sistemas, son válidas las ecuaciones de Newton

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}, \tag{1}$$

donde $\vec{F}$ es la sumatoria de las fuerzas debidas a interacciones, m es la masa inercial y $\ddot{\vec{r}}$ es la acelaración. Por el contrario, los sistemas **no** inerciales serán los que se encuentren acelerados respecto a los sistemas inerciales. Si utilizamos un sistema **no** inercial las ecuaciones de Newton (1) **no** son válidas, es necesario corregirlas agregando un término especial vinculado al movimiento acelerado de ese sistema.

Para ser concretos supongamos, como se ve en la figura 1, que tenemos un sistema inercial S y otro sistema arbitrario S'. El vector $\vec{R}(t)$ une el origen de S con el origen de S' y en particular describe el movimiento relativo entre ambos. Si

$$\ddot{\vec{R}}(t) \neq 0\,,$$

el sistema S' estará acelerado respecto de S y entonces S' será un sistema **no** inercial. Si

$$\ddot{\vec{R}}(t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\vec{R}}(t) = \text{cte}\,,$$

el sistema S' estará en MRU respecto de S y en consecuencia S' será (otro) sistema inercial.

Un punto cualquiera del espacio tendrá posición $\vec{r}(t)$ respecto de S y $\vec{r'}(t)$ respecto de S'. Como se ve en la figura 1, la relación entre ambas será

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r'}(t)\,, \tag{2}$$

y al derivar obtenemos el vínculo entre las aceleraciones

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{R}}(t) + \ddot{\vec{r'}}(t)\,. \tag{3}$$

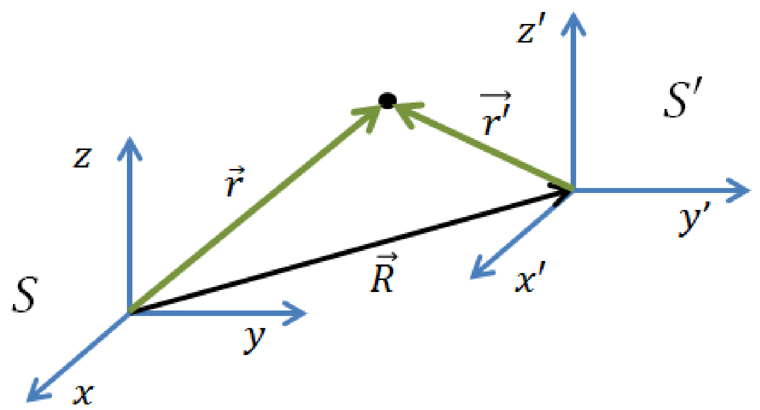


Figura 1: Vínculo entre los sistemas de referencia S y S'

Por otro lado sabemos que como S es un sistema inercial valen las ecuaciones de Newton

$$\vec{F} = m\,\ddot{\vec{r}}(t) = m\left[\ddot{\vec{R}}(t) + \ddot{\vec{r'}}(t)\right] = m\,\ddot{\vec{R}}(t) + m\,\ddot{\vec{r'}}(t) \tag{4}$$

y entonces

$$m\,\ddot{\vec{r'}}(t) = \vec{F} \; - m\,\ddot{\vec{R}}(t). \tag{5}$$

Esta ecuación muestra que para calcular la aceleración $\ddot{\vec{r'}}(t)$ dentro de un sistema no inercial debemos considerar la sumatoria de fuerza debidas a interacciones, $\vec{F}$, y además agregar un **término de fuerzas de inercia**[3],

$$\vec{F}_{\mathrm{IN}} = -m\,\ddot{\vec{R}}(t)\,,$$

que incorpora los efectos de estar en un sistema acelerado ($\ddot{\vec{R}}(t) \neq 0$) y por ende no inercial. Estas fuerzas inerciales siempre tienen sentido contrario a la aceleración del sistema y no son debidas a interacciones físicas. De hecho **no** tienen par de interacción y en consecuencia no cumplen la tercera ley.

RESUMEN IMPORTANTE:

1. **Sistemas inerciales**
   - Se encuentran en reposo o en MRU respecto del espacio absoluto.
   - Las ecuaciones de Newton son válidas considerando las fuerzas debidas a interacciones.
   - Dado un sistema inercial, cualqueir otro sistema en reposo o en MRU respecto del primero también será un sistema inercial.
2. **Sistemas no inerciales**
   - Se mueven aceleradamente ($\ddot{\vec{R}}(t) \neq 0$) respecto de un sistema inercial. Pueden ser traslaciones aceleradas y/o rotaciones.
   - Las ecuaciones de Newton **no** son válidas si sólo consideramos las fuerzas debidas a interacciones.
   - Para corregir las ecuaciones de Newton debemos agregar las fuerzas de inercia.

Ahora resolvamos dos ejercicios de la guía.

[3]Sí, de inercia. Aunque sean debidas a estar en sistema **no** inercial las llamamos fuerzas de inercia. C'est la vie.

Problema 5.2

En la figura 2 se muestra el esquema del ejercicio. En todos los casos vamos a considerar un sistema inercial S en reposo, fijo a la Tierra y un sistema S' solidario al ascensor. Dependiendo del movimiento del ascensor respecto de la Tierra, S' será inercial o no inercial.

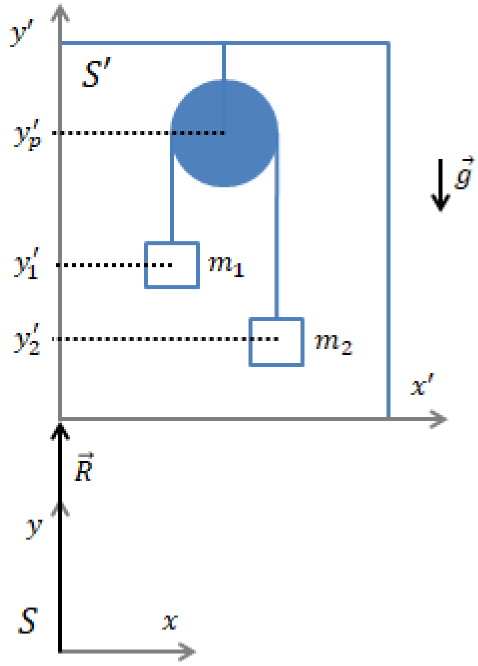


Figura 2: Esquema con los sistemas de referencia S y S'

a) Nos piden calcular las aceleraciones de cada masa tanto en S como en S' cuando el ascensor sube con velocidad constante. Como el ascensor se mueve con velocidad constante respecto del sistema inercial S, entonces S' también es un sistema inercial.

Planteamos las ecuaciones de Newton estando en S'. Aquí el término de fuerzas de inercia no es necesario pues $\dot{\vec{R}}(t) = v\,\hat{y}$, con $v =$ cte, de modo que ya estamos en un sistema inercial ($\ddot{\vec{R}}(t) = 0$).

Los diagramas de cuerpo libre se ven en la figura 3 y las ecuaciones dinámicas son

$$\hat{y}') \qquad m_1\ddot{y}'_1 = T_1 - m_1 g \qquad\qquad m_2\ddot{y}'_2 = T_2 - m_2 g \tag{6}$$

Dado que la polea es ideal (sin masa) $T_1 = T_2 = T$. Por otro lado, debido a que la soga es inextensible de largo l, obtenemos la condición de vínculo

$$l = (y'_p - y'_1) + (y'_p - y'_2)\,. \tag{7}$$

Derivando dos veces

$$0 = -\ddot{y}'_1 - \ddot{y}'_2 \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y}'_2 = -\ddot{y}'_1\,. \tag{8}$$

Así las ecuaciones de movimiento quedan

$$m_1\ddot{y}'_1 = T - m_1 g \tag{9}$$

$$-m_2\ddot{y}'_1 = T - m_2 g\,. \tag{10}$$

Restando ambas ecuaciones llegamos a

$$\ddot{y}'_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \,, \tag{11}$$

$$\ddot{y}'_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \,. \tag{12}$$

En el sistema S las aceleraciones serán iguales pues en este caso S y S' ambos son sistemas inerciales. Naturalmente las posiciones $y'_i(t)$ e $y_i(t)$ sí serán diferentes.

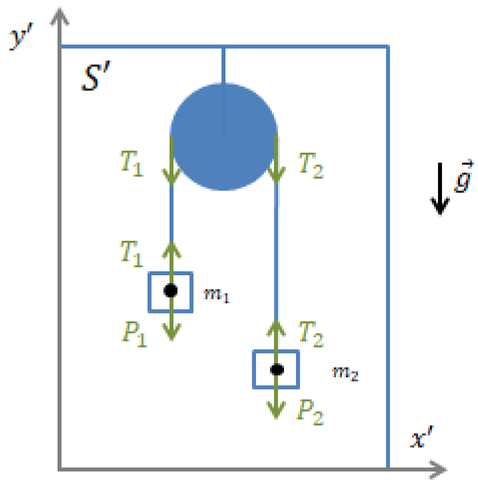


Figura 3: DCL desde S' para el caso en el que el ascensor asciende con velocidad constante.

b) Ahora el ascensor sube con aceleración $\vec{a}$ constante. Esto quiere decir que S' ahora será un sistema acelerado respecto de S y por lo tanto **no** inercial. Concretamente $\ddot{\vec{R}}(t) = \vec{a} = a\,\hat{y}$, con $a > 0$ porque acelera hacia arriba.

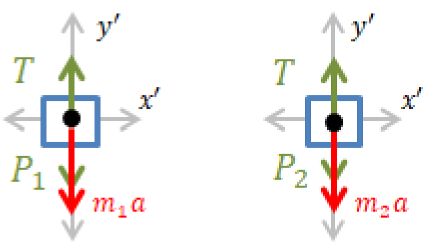
En el sistema S' además de las fuerzas de interacción del inciso a) debemos agregar el término de fuerzas de inercia para cada masa. Para m_1

$$\vec{F}_{\mathrm{IN}} = -m_1 \ddot{\vec{R}}(t) = -m_1 a \hat{y}' \,, \tag{13}$$

y para m_2

$$\vec{F}_{\mathrm{IN}} = -m_2 \ddot{\vec{R}}(t) = -m_2 a \hat{y}' \,, \tag{14}$$

La aceleración de S' es hacia arriba entonces la fuerza de inercia será en sentido contrario, hacia abajo, como se ve en (13)-(14). Así los diagramas de cuerpo libre son



Las ecuaciones de Newton quedan

$$m_1\ddot{y}_1' = T_1 - m_1 g - m_1 a \tag{15}$$
$$m_2\ddot{y}_2' = T_2 - m_2 g - m_2 a\,. \tag{16}$$

La relación $T_1 = T_2 = T$, debida a la polea y cuerda ideales, y la condición de vínculo $\ddot{y}_2' = -\ddot{y}_1'$ se mantienen sin cambios. Restando (15)-(16) y despejando obtenemos

$$\ddot{y}_1' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}(g + a) \tag{17}$$
$$\ddot{y}_2' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a) \tag{18}$$

Para hallar las aceleraciones en el sistema S usamos la relación

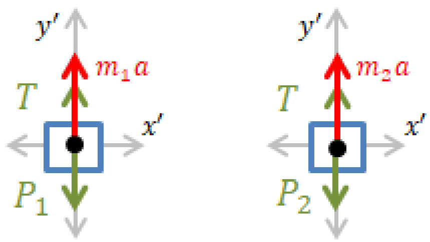
$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{r}}'(t) + \ddot{\vec{R}}(t)\,, \tag{19}$$

de modo que

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_1' + a \tag{20}$$
$$\ddot{y}_2 = \ddot{y}_2' + a \tag{21}$$

c) El ascensor acelera hacia abajo con aceleración constante. Antes de hacer cuentas pensemos qué cambia respecto del caso b). Como la aceleración del ascensor es hacia abajo, $\ddot{\vec{R}}(t) = -a\hat{y}'$ con $a > 0$, la fuerza de inercia para cada masa será hacia arriba. Por lo tanto es análogo al inciso anterior y basta cambiar a por $-a$ y luego considerar $a > 0$.

Los diagramas de cuerpo libre serán



Entonces las ecuaciones de Newton en el sistema no inercial S' quedan

$$m_1\ddot{y}_1' = T_1 - m_1 g + m_1 a \tag{22}$$
$$m_2\ddot{y}_2' = T_2 - m_2 g + m_2 a\,. \tag{23}$$

Las aceleraciones $\ddot{y}_1'$ e $\ddot{y}_2'$ serán

$$\ddot{y}_1' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}(g - a) \tag{24}$$
$$\ddot{y}_2' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g - a) \tag{25}$$

y en S

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_1' - a \tag{26}$$
$$\ddot{y}_2 = \ddot{y}_2' - a \tag{27}$$

d) Finalmente estudiemos el caso en el que se corta el cable del ascensor. En este caso el ascensor queda en caída libre por lo cual su aceleración será $\vec{g} = -g\hat{y}$ con $g > 0$.

En consecuencia este inciso se reduce al inciso c) reemplazando a por g. Podemos intuir que la aceleración de las masas vistas en S' deben ser nulas ya que todo el sistema está en caída libre y a su vez las aceleraciones de todos los cuerpos (incluído el ascensor) vistas desde S serán $-g$. En efecto, corroboramos que en S'

$$\ddot{y}_1' = 0\,, \tag{28}$$
$$\ddot{y}_2' = 0 \tag{29}$$

y en S

$$\ddot{y}_1 = -g\,, \tag{30}$$
$$\ddot{y}_2 = -g\,. \tag{31}$$

Problema 5.3

En este problema vamos a plantear un sistema inercial S en reposo fijo a la Tierra y otro S' fijo a la plataforma como se ve en el figura 4.

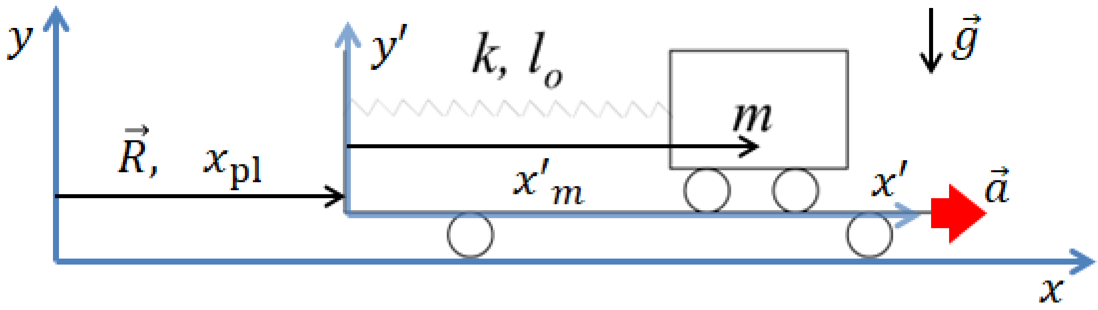
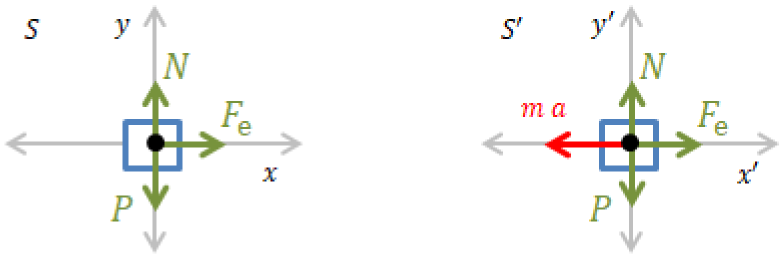


Figura 4: Esquema de sistemas de referencia y posiciones.

a) La aceleración de la plataforma es constante en la dirección horizontal y sentido hacia la derecha, $\ddot{\vec{R}}(t) = a\hat{x}$. En consecuencia el sistema S' será no inercial.

Los diagramas de cuerpo libre en S y en S' son



Desde S': las fuerzas que actúan sobre la masa m son $\vec{F}_e$, $\vec{N}$, $\vec{P}$ (todas fuerzas de interacción) y la fuerza inercial $\vec{F}_{IN} = -ma\hat{x}'$. Desde S actúan las misma fuerzas de interacción pero no tendremos la fuerza de inercia pues S es un sistema inercial. Como vemos la plataforma desde afuera (paradxs en S), sabemos que está acelerada y no hace falta agregar ninguna fuerza extra.

b) Las ecuaciones de Newton en el sistema S' son

$$\hat{y}') \qquad m\ddot{y}'_m = N - mg \tag{32}$$
$$\hat{x}') \qquad m\ddot{x}'_m = F_e - ma. \tag{33}$$

En este caso la fuerza inercial tendrá sólo componente horizontal y eso representa el término $-ma$ en la dirección x'. La fuerza elástica la escribimos como $\vec{F}_e = F_e\,\hat{x}'$ con $F_e = -k(x'_m - l_0)$. Notamos que si $x' > l_0$ el resorte se encuentra estirado y ejerce una fuerza sobre la masa en sentido $-\hat{x}'$. Vemos que la expresión escrita funciona correctamente.

Por otra parte tenemos el vínculo $y'_m = 0$ con lo cual $\dot{y}'_m = \ddot{y}'_m = 0$ y así

$$N = mg. \tag{34}$$

En la dirección horizontal nos queda

$$m\ddot{x}'_m = -k(x'_m - l_0) - ma \tag{35}$$

que es equivalente a

$$\ddot{x}'_m + \frac{k}{m}\,x'_m = \frac{kl_0}{m} - a. \tag{36}$$

La ecuación (36) es la ecuación de movimiento de la masa m en el sistema S'. Es una ecuación diferencial ordinaria, lineal, de segundo orden, inhomogénea y con coeficientes constantes (¿algo más?). Como han visto en la teórica y en otras prácticas, para resolver (36) se propone una solución general como la suma de una parte homogénea y una particular

$$x'_m(t) = x'_H + x'_p. \tag{37}$$

La solución homogénea tendrá dos constantes a determinar según las condiciones iniciales. Por el contrario, la solución particular no dependerá del estado inicial del sistema. (Recuerden que las condiciones iniciales deben aplicarse sobre la solución general $x'(t)$.)

Comencemos por encontrar la solución particular que cumplirá

$$\ddot{x}'_p + \frac{k}{m}\,x'_p = \frac{kl_0}{m} - a\,. \tag{38}$$

Ya que la parte inhomogénea (lado derecho de la ecuación) es constante propongamos una x'_p tal que $\ddot{x}'_p = \dot{x}'_p = 0$. Reemplazando en (38) nos queda

$$x'_p = l_0 - \frac{ma}{k}. \tag{39}$$

En este caso la solución particular x'_p corresponde con la posición de equilibrio del sistema.

Por otra parte la solución homogénea x'_H debe cumplir

$$\ddot{x}'_H + \frac{k}{m}x'_H = 0, \tag{40}$$

y así vamos a proponer lo que es usual para el movimiento oscilatorio armónico simple

$$x'_H(t) = A\cos(\omega t + \phi)\,. \tag{41}$$

La frecuencia de oscilación dependerá de los parámetros, $\omega = \sqrt{k/m}$, y por otra parte las constantes A y ϕ serán determinadas por las condiciones iniciales.

Finalmente la solución general será

$$x'_m(t) = A\cos(\omega t + \phi) + l_0 - \frac{ma}{k}. \tag{42}$$

Para estar seguros, una vez que encontramos la solución general podemos reemplazar (42) en (36) y ver que se cumple la relación trivialmente. Ahora nos falta calcular A y ϕ con las condiciones iniciales $x'_m(0) = l_0$ y $\dot{x}'_m(0) = 0$. Veamos, para la posición

$$x'_m(t=0) = A\cos(\phi) + l_0 - \frac{ma}{k} = l_0 \tag{43}$$

y para la velocidad

$$\dot{x}'_m(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)\,, \tag{44}$$
$$\dot{x}'_m(t=0) = -A\omega\sin\phi = 0\,. \tag{45}$$

A partir de (45) tenemos que $\phi = 0$, luego volviendo a (43) encontramos que

$$A = \frac{ma}{k}\,. \tag{46}$$

Por último la solución final queda

$$x'_m(t) = \frac{ma}{k}\cos(\omega t) + l_0 - \frac{ma}{k}\,. \tag{47}$$

Hasta acá ok, ahora podemos pensar cómo se ve desde el sistema S. Sabemos que

$$x_m(t) = x'_m(t) + x_{\rm pl}(t) \tag{48}$$

con $x_{\rm pl}(t)$ la posición de la plataforma. Para calcular $x_{\rm pl}(t)$ asumimos que la plataforma parte de $x_{\rm pl} = 0$ en reposo y usamos que tiene aceleración constante, a, de modo que integrando dos veces llegamos a

$$x_{\rm pl}(t) = \frac{a\,t^2}{2}. \tag{49}$$

Por lo tanto

$$x_m(t) = x'_m(t) + \frac{a\,t^2}{2} \tag{50}$$

con $x'_m(t)$ la expresión en (47).

c) Para este inciso es más claro trabajar en el sistema S.

Desde el sistema inercial S podemos ver que la plataforma se ve sometida a una fuerza, $\vec{F}_M$, que permite que mantenga su aceleración constante y además siente la fuerza elástica, $\vec{F}_{\rm pe}$ que genera la masa sobre la plataforma (par de interacción con la que ya calculamos). En la dirección vertical sólo tendremos la fuerza de contacto con el suelo, la fuerza de contacto con la masa m y el peso mismo de la plataforma. Como no hay movimiento vertical todas esas fuerzas deben cancelarse. Concentrémonos en la ecuación para la dirección horizontal

$$M\ddot{x}_{\rm pl} = F_{\rm pe} + F_M = k(x_m - x_{\rm pl} - l_0) + F_M. \tag{51}$$

Pueden chequear que los signos de la fuerza $F_{\rm pe}$ son correctos y que corresponde a $-F_{\rm e}$ del inciso b) por ser su par de interacción. Si queremos que $\ddot{x}_p = a = $ cte entonces

$$F_M = Ma - k\,[x_m(t) - x_{\rm pl}(t) - l_0] = Ma - k\,[x'_m(t) - l_0] \tag{52}$$

en la última igualdad usamos que $x_m(t) - x_{\rm pl}(t) = x'_m(t)$.