Física 1, segundo cuatrimestre de 2020

Sistemas rotantes: problemas 5.8 y 5.9

Ignacio Perito (iperito@df.uba.ar)

Empezaremos con un brevísimo resumen de sistemas no inerciales rotantes. Luego pasaremos al problema 9, que ilustra de manera muy clara la equivalencia entre la descripción desde un sistema inercial y otro no inercial. Finalmente, resolveremos el problema 8.

1. Sistemas rotantes

Consideremos dos sistemas de referencia $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ que comparten origen. Que tengan un origen en común significa que lo único que puede hacer $\mathcal{S}'$, con respecto a $\mathcal{S}$, es rotar. Si llamamos $\vec{\omega}$ al vector velocidad angular de dicha rotación, las velocidades de una partícula cualquiera en ambos sistemas se relacionan según[1]:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' , \tag{1}$$

donde $\vec{v}$ es el vector velocidad medido desde $\mathcal{S}$ y $\vec{v}\,'$ es el vector velocidad del mismo punto pero medido desde $\mathcal{S}'$. Como vieron en la teórica, derivando la expresión anterior con respecto al tiempo pueden obtener una relación entre las aceleraciones medidas desde ambos sistemas:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' , \tag{2}$$

donde $\vec{a}$ y $\vec{a}\,'$ son las aceleraciones de la partícula medidas desde $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ respectivamente. A diferencia de lo que sucede en el caso de sistemas cuyo movimiento relativo es puramente de traslación (y, por ende, la diferencia entre las aceleraciones está dada simplemente por un vector -que es el mismo para todos los puntos del espacio-) en este caso tenemos que la aceleración relativa depende tanto de la posición como de la velocidad del punto en cuestión.

Si suponemos ahora que $\mathcal{S}$ es un sistema inercial, multiplicando por la masa de la partícula a la expresión anterior y acomodando un poco los términos llegamos a que:

$$m\vec{a}\,' = \sum \vec{F} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' , \tag{3}$$

[1] ¿Por qué podemos usar indistintamente $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ en esta expresión?

donde hemos utilizado que $m\vec{a} = \sum \vec{F}$ puesto que $\mathcal{S}$ es un sistema inercial. La expresión anterior nos dice que podemos escribir la segunda ley de Newton desde un sistema rotante siempre y cuando paguemos el precio de incluir las tres *fuerzas ficticias* que aparecen en el miembro derecho (en orden de aparición: fuerza de arrastre, fuerza centrífuga y fuerza de Coriolis).

2. Problema 5.9

En este problema tenemos una partícula dentro de un tubo que gira en un plano con velocidad angular constante en torno a un punto fijo P. No hay fricción entre la partícula y el tubo y todo sucede en ausencia de gravedad[2]. El ejercicio se encuentra separado en dos incisos pero, en resumen, el objetivo es el de escribir las ecuaciones dinámicas en un sistema de referencia inercial y en otro, no inercial, fijo al tubo. Empecemos por lo más familiar.

2.1. Desde un sistema inercial

Si nos hubiésemos encontrado con este problema en la guía de dinámica (donde todo lo resolvimos utilizando sistemas de referencia inerciales), está claro que un sistema de coordenadas polares en el plano en el que gira el tubo y con origen en el punto P habría sido la opción más práctica para describir el movimiento de la partícula. Al igual que cada vez que usamos coordenadas polares en el pasado, el *sistema de referencia* es inercial y está fijo al punto P[3]; lo que gira es el sistema de coordenadas. Es decir, **no es lo mismo el sistema de referencia que el sistema de coordenadas**. Esto último es mucho muy importante.

En la figura 1 tenemos un esquema del problema, donde indicamos los versores polares y también el versor $\hat{e}_z$, perpendicular al plano del movimiento y en el cual apunta la velocidad angular del tubo. La única fuerza que actúa sobre la partícula es la fuerza de vínculo en la dirección tangencial y elegimos un sentido arbitrario para dibujarla (podría, tranquilamente, apuntar para el otro lado).

[2] Como mencionamos en la clase, si el tubo se encuentra girando sobre una mesa, el problema es el mismo por más que haya gravedad, puesto que el peso de la partícula se compensa con la fuerza de vínculo correspondiente.

[3] Si les ayuda, pueden pensar que se trata de un sistema cartesiano estático con origen en P el cual decidimos describirlo, matemáticamente, mediante el cambio de coordenadas a polares

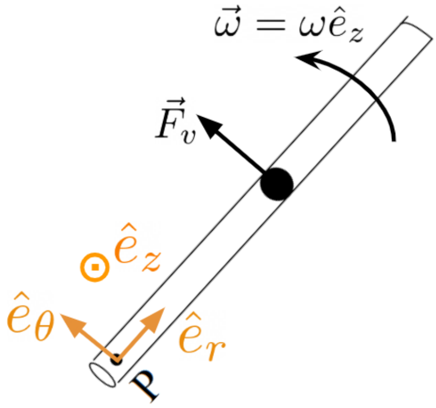

Figura 1: Esquema del problema desde un sistema de referencia inercial.

A diferencia de muchos de los problemas en los cuales elegimos usar coordenadas polares, en este caso la variable r puede variar libremente y el vínculo cinemático del problema tiene que ver con la variación de la coordenada θ: dado que la partícula está obligada a mantenerse siempre dentro del tubo, tenemos que $\dot{\theta}(t) = \omega \ \forall t$. Teniendo en cuenta esto, la aceleración de la partícula en nuestro sistemaes:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - \omega^2 r\right) \hat{e}_r + 2\omega\dot{r}\hat{e}_\theta \,. \tag{4}$$

Multiplicando la expresión anterior por la masa de la partícula e igualando a la sumatoria de fuerzas, que es simplemente $F_v\hat{e}_\theta$, obtenemos la segunda ley de Newton. Al separar en componentes, tenemos las dos ecuaciones que siguen:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \omega^2 r &= 0 \,, \\ 2m\omega\dot{r} &= F_v \,. \end{aligned} \tag{5}$$

La primera de las dos ecuaciones anteriores es la ecuación de movimiento del problema (la variable r es en este caso la variable cinemática relevante de la partícula) y, en aspecto, es muy similar a la ecuación de un oscilador armónico simple. La única diferencia radica en el signo relativo entre los dos términos, pero la estrategia para resolverla es la misma que la que aprendieron en el caso del oscilador armónico: si proponemos una solución de la forma $e^{\lambda t}$ y la insertamos en la ecuación de movimiento, obtenemos que el polinomio característico resulta $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, de donde sale que λ puede tomar los dos valores reales ω y $-\omega$. La solución más general a la ecuación de movimiento (notar que es homogénea, por lo que la solución particular es simplemente la función nula) es entonces:

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \,, \tag{6}$$

donde A y B se determinan con las condiciones iniciales. El ejercicio no pide nada de esto pero, ya que estamos, veamos como se ve esta solución para algunas condiciones iniciales razonables. Supongamos que a $t = 0$ la partícula se encuentra a una distancia d del punto P y en reposo con respecto al tubo, es decir, con $\dot{r}(t = 0) = 0$. Al igualar r y su derivada en $t = 0$ con estas condiciones iniciales, es fácil ver que $A = B = \frac{d}{2}$, por lo que la solución resulta:

$$r(t) = \frac{d}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) \equiv d\cosh(\omega t) \tag{7}$$

donde en la última línea hemos usado la definición de la función coseno hiperbólico, dada por $\cosh(x) \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (esto último es sólo una cuestión estética, la expresión con las exponenciales es más que suficiente para entender el movimiento). Como es de esperar, a medida que $t \to \infty$, la coordenada r diverge (pues la exponencial con argumento positivo diverge y la otra tiende a cero). Para la evolución de la coordenada θ no hay mucho que hacer, dado que $\dot{\theta} = \omega = cte$, tenemos $\theta(t) = \omega t$, donde, por comodidad, hemos supuesto que a $t = 0$, tenemos $\theta = 0$. Usando esto y lo anterior es fácil obtener una expresión para la trayectoria en polares:

$$r(\theta) = d\cosh(\theta) = \frac{d}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right) \,, \tag{8}$$

que es una suerte de espiral como la que se ve en la figura 2.

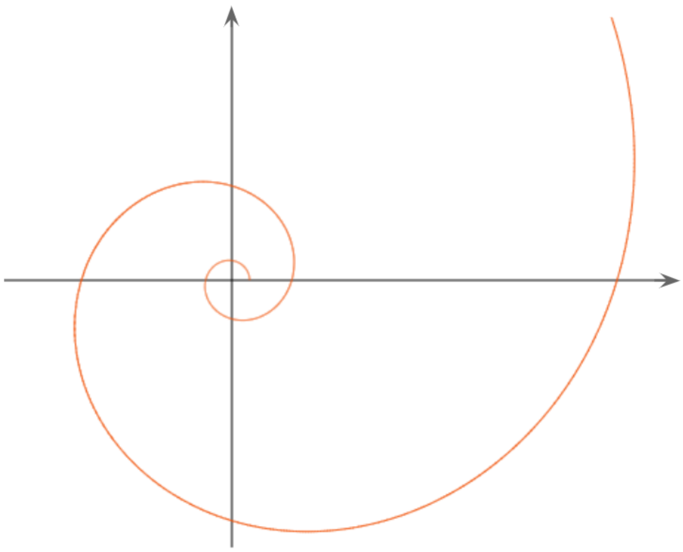

Figura 2: Trayectoria de la partícula, dada por la ecuación (8).

Notar que, una vez obtenida la función $r(t)$, podemos (si quisiéramos) derivarla e insertarla en la segunda línea de (5) para obtener la fuerza de vínculo como función del tiempo. En este caso resulta:

$$\vec{F}_v = 2m\omega\frac{d\omega}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)\hat{e}_\theta \equiv 2md\omega^2\sinh(\omega t)\hat{e}_\theta \,, \tag{9}$$

donde hemos usado la definición de la función seno hiperbólico $\sinh(x) \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Esto último tampoco era parte de la consigna, pero sirve para ilustrar que, en algunas situaciones, es posible resolver por completo el sistema de ecuaciones diferenciales inducido por las ecuaciones de Newton: en este caso, eran dos ecuaciones diferenciales (5) para dos incógnitas, $r(t)$ y $F_v(t)$.

2.2. Desde un sistema rotante

Ahora intentaremos describir el problema desde un sistema de referencia solidario al tubo. Para un observador *dentro* del tubo, la partícula realiza un movimiento unidimensional, por lo que el sistema de coordenadas natural en este caso serán cartesianas. Tomaremos el versor $\hat{e}_z$ igual que antes (en la dirección de $\vec{\omega}$, el versor $\hat{e}_x$ en la dirección del tubo y el versor $\hat{e}_y$ en la dirección perpendicular restante (respetando la terna derecha). En la figura 3 está dibujado dicho sistema de ejes. El hecho de que el tubo está rotando, en este sistema, se codifica en la presencia de las fuerzas ficticias, por eso en este esquema no hacemos mención a $\vec{\omega}$. Sólo dibujamos dos de las tres fuerzas ficticias porque ω es constante, así que la fuerza de arrastre se anula. Como veremos en las cuentas, las direcciones de las fuerzas centrífuga y de Coriolis son las indicadas en el esquema (en este problema, como veremos, Coriolis apunta siempre al revés que la fuerza de vínculo, así que elegimos dicho sentido en el esquema para preservar la coherencia del mismo). Notar también que, dado que en el sistema inercial usamos coordenadas polares, nos tomaremos la licencia notacional de no usar coordenadas primadas en este caso, puesto que no hay otro conjunto de coordenadas cartesianas con el cual confundirnos.

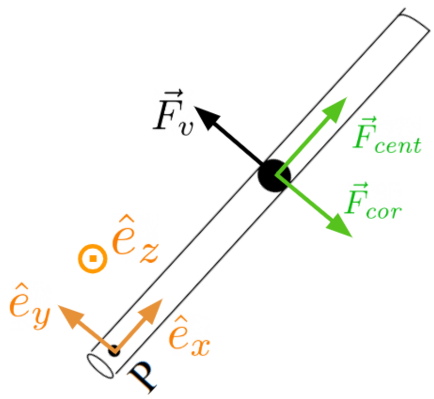

Figura 3: Esquema del problema desde un sistema de referencia rotante. En verde las fuerzas ficticias.

Dado que en el sistema solidario al tubo los ejes cartesianos están fijos, las expresiones para la posición, velocidad y aceleración de la partícula en este sistema de coordenadas no guardan ningún secreto y son:

$$\vec{r} = x\hat{e}_x \quad , \quad \vec{v} = \dot{x}\hat{e}_x \quad , \quad \vec{a} = \ddot{x}\hat{e}_x \, , \tag{10}$$

puesto que las coordenadas y y z de la partícula se mantienen constantes e iguales a cero.

Si queremos escribir la segunda ley desde este sistema, Newton nos dice que no podemos... pero en realidad sí: siempre y cuando no olvidemos de incluir las fuerzas ficticias[4]. Como dijimos, la fuerza de arrastre en este caso se anula, así que solo tenemos que calcular las otras dos. Para la centrífuga, tenemos:

$$\vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m\omega^2 x\hat{e}_z \times (\hat{e}_z \times \hat{e}_x) = m\omega^2 x\hat{e}_x \, , \tag{11}$$

mientras que Coriolis resulta:

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} = -2m\omega\dot{x}\hat{e}_z \times \hat{e}_x = -2m\omega\dot{x}\hat{e}_y \, , \tag{12}$$

[4] En tu cara, Newton.

donde puede verse que dicha fuerza tiene la dirección indicada en la figura 3 (el sentido dependerá del signo de $\dot{x}$).

La *"segunda ley de Newton"* en este sistema de referencia resulta de multiplicar la aceleración por la masa e igualar con la suma total de fuerzas (reales y ficticias):

$$m\ddot{x}\hat{e}_x = m\omega^2 x\hat{e}_x + (F_v - 2m\omega\dot{x})\,\hat{e}_y\,, \tag{13}$$

donde hemos usado que, en este sistema, la fuerza de vínculo se escribe $F_v\hat{e}_y$. Separando en componentes la expresión anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= m\omega^2 x\,, \\ 0 &= F_v - 2m\omega\dot{x}\,, \end{aligned} \tag{14}$$

que es exactamente el mismo sistema de ecuaciones que (5) pero con el cambio de nombre $r \to x$. Esto es más que razonable, puesto que la coordenada x en este sistema y la coordenada r en el anterior representan exactamente lo mismo: la distancia de la partícula al punto P. La única diferencia entre los dos enfoques es de qué lado de la ecuación decidimos escribir ciertos términos. En algunos casos (como este) la diferencia entre los dos enfoques parece puramente notacional. En otros, ya veremos que resolver la dinámica desde un sistema no inercial puede ser muchísimo más práctico que hacerlo desde un sistema inercial.

3. Problema 8

Este problema aborda la física de un objeto apoyado sobre una plataforma que gira sobre un plano paralelo al piso, es decir, el clásico problema del niñx desmayadx sobre el piso de una calesita. La idea será describir el problema desde un sistema de referencia fijo a esta última.

3.1. Inciso a

Al igual que en la clase, escribiremos las ecuaciones dinámicas en su forma más general posible. Luego particularicemos a los casos que haga falta en cada uno de los incisos que sigan. Tomaremos un sistema cartesiano $\{x, y, z\}$ fijo a la calesita[5], con la dirección $\hat{e}_z$ alineada con la verical (es decir, paralelo al vector velocidad angular). El único vínculo que tenemos de entrada es que el niñx se mantiene siempre en contacto con la plataforma, es decir, $z(t) = 0\ \forall t$. La posición, velocidad y aceleración del niñx en este sistema se escriben, entonces:

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y \quad , \quad \vec{v} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y \quad , \quad \vec{a} = \ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y\,. \tag{15}$$

[5]Nuevamente, omitiremos el uso de coordenadas primadas para no ensuciar tanto la notación.

Con esto y el vector velocidad angular de la calesita, $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$, tenemos todos los ingredientes para calcular las fuerzas ficticias. Notar que la velocidad angular puede (y va a) variar, pero sin cambiar de dirección, por lo que tenemos $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\hat{e}_z$. La fuerza de arrastre queda:

$$\vec{F}_{arr} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = -m\dot{\omega}\hat{e}_z \times (x\hat{e}_x + y\hat{e}_y) = m\dot{\omega}\,(y\hat{e}_x - x\hat{e}_y) \ , \tag{16}$$

la cual, como es de esperar, es un vector perpendicular a la posición (esto es fácil de chequear tomando el producto escalar entre la fuerza y $\vec{r}$, pero también es evidente desde la definición, puesto que involucra el producto vectorial de la posición con otra cosa). También es sano chequear unidades, ya que es muy común olvidarse de la masa en este tipo de cálculos.

Pasemos a la fuerza centrífuga, que resulta:

$$\vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m\omega^2\hat{e}_z \times [\hat{e}_z \times (x\hat{e}_x + y\hat{e}_y)] = m\omega^2\,(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y) \ , \tag{17}$$

donde se ve que es un vector que apunta en la misma dirección en la que está el niñx y es proporcional a la distancia entre estx y el origen del sistema rotante.

Finalmente, la fuerza de Coriolis es:

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} = -2m\omega\hat{e}_z\,(\dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y) = 2m\omega\,(\dot{y}\hat{e}_x - \dot{x}\hat{e}_y) \ , \tag{18}$$

donde, como es de esperar, obtenemos un vector perpendicular a la velocidad de la cría humana.

A modo de comentario general, notar que en un caso como este (en el cual la velocidad angular puede variar en módulo **pero no** en dirección) las tres fuerzas ficticias se obtienen como el producto vectorial entre algo que está en la dirección de ω ($\hat{e}_z$ en este caso) y otras cosas, por lo que todas las fuerzas ficticias deben ser perpendiculares a dicha dirección (lo cual es evidente, puesto que ninguna de ellas tiene componente no nula en $\hat{e}_z$).

Las únicas fuerza reales que siente el niñx[6] son su peso, la normal con la calesita y el rozamiento con la misma; y se escriben:

$$\vec{P} = -mg\hat{e}_z \quad , \quad \vec{N} = N\hat{e}_z \quad , \quad \vec{F}_{roz} = F^x_{roz}\hat{e}_x + F^y_{roz}\hat{e}_y \, , \tag{19}$$

donde, como se habrán imaginado, F^x_{roz} y F^y_{roz} son las componentes en $\hat{e}_x$ y $\hat{e}_y$ respectivamente de la fuerza de rozamiento (recuerden que estamos en el caso general, por lo que el niñx se puede mover para cualquier lado en la plataforma y, por ende, el rozamiento también puede adquirir cualquier dirección sobre la misma). Las ecuaciones dinámicas desde el sistema fijo a

[6]No, el amor no es una fuerza. Manga de hippies.

la calesita resultan, entonce:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F^x_{roz} + m\omega^2 x + m\dot{\omega} y + 2m\omega\dot{y}\,, \\ m\ddot{y} &= F^y_{roz} + m\omega^2 y - m\dot{\omega} x - 2m\omega\dot{x}\,, \\ 0 &= N - mg\,, \end{aligned} \tag{20}$$

donde en la ecuación para la dirección $\hat{e}_z$ ya impusimos que $\ddot{z} = 0$. Las ecuaciones que describen el movimiento son las primeras dos y, como habrán notado, son un verdadero quilombo: están acopladas e involucran no sólo a ambas variables (x e y) sino también sus derivadas primeras. Además, aparecen las dos componentes de la fuerza de rozamiento que, dependiendo de las condiciones del movimiento, pueden oficiar de fuerzas de vínculo (rozamiento estático) o como una fuerza que depende de ¡la dirección del vector velocidad![7]... un horror. Veremos ahora como quedan estas ecuaciones en los casos particulares que nos piden analizar en los incisos (b) y (d).

3.2. Inciso (b)

En este inciso nos encontramos en la situación en la cual la calesita gira con velocidad angular constante (por lo que $\dot{\omega} = 0$) y el niñx no desliza con respecto a la misma (por lo que $\dot{x} = \ddot{x} = \dot{y} = \ddot{y} = 0$). Conviene entonces alinear alguno de los ejes, digamos $\hat{e}_x$ con la posición de la criatura, que se encuentra a una distancia l del eje de giro. Si la posición del niñx en esta situación es $\vec{r} = l\hat{e}_x$, tenemos que las ecuaciones de movimiento (20) se reducen a:

$$\begin{aligned} 0 &= F^x_{roz} + m\omega^2 l\,, \\ \ddot{y} &= 0\,, \\ N &= mg\,, \end{aligned} \tag{21}$$

lo cual nos dice que la fuerza de rozamiento sólo actúa en la dirección del vector posición del niñx y se encarga de compensar la fuerza centrífuga. Si lo hubiésemos pensado desde un sistema inercial, llegaríamos a la conclusión de que la fuerza de rozamiento en la dirección radial se encarga de proveerle la aceleración centrípeta al niñx y en la dirección tangencial, por tratarse de un movimiento circular **uniforme**, no hay fuerzas. Dado que el rozamiento es estático, sabemos que el módulo del vector $\vec{F}_{roz}$ está acotado superiormente por $\mu_e N$. Como la única componente de dicho vector está en $\hat{e}_x$, esta cota se reduce a:

$$|F^x_{roz}| \leq \mu_e mg\,, \tag{22}$$

[7] En el caso de rozamiento dinámico, el módulo de la fuerza es constante e igual a $\mu_d mg$; pero al tratarse de un movimiento bidimensional, la dirección de dicho vector no es siempre la misma.

donde hemos despejado la normal de la ecuación para la dirección $\hat{e}_z$. Combinando esto con la ecuación para la dirección $\hat{e}_x$, concluimos que:

$$m\omega^2 l \leq \mu_e mg \Rightarrow |\omega| \leq \sqrt{\frac{\mu_e g}{l}}\,, \tag{23}$$

por lo que el valor máximo (en módulo) de la velocidad angular de la calesita para que el niñx se mantenga en contacto con la misma es $\sqrt{\frac{\mu_e g}{l}}$.

Pasamos ahora directo al inciso (d) que está bastante emparentado con este. El inciso (c) lo dejaremos para el final porque se trata de un problema puramente de cinemática.

3.3. Inciso (d)

Ahora la velocidad angular de la calesita depende del tiempo según $\omega(t) = \gamma t$, por lo que la fuerza de arrastre se hará presente ya que $\dot{\omega} = \gamma \neq 0$. De nuevo nos interesa la situación en la cual el niñx está quieto con respecto a la calesita, así que tomando las mismas consideraciones del inciso anterior, las ecuaciones ahora resultan:

$$\begin{aligned} 0 &= F^x_{roz} + ml\gamma^2 t^2\,, \\ 0 &= F^y_{roz} - m\gamma l\,, \\ N &= mg\,, \end{aligned} \tag{24}$$

donde en la primera línea ya hicimos el reempalzo $\omega = \gamma t$. En este caso sí tenemos fuerza de rozamiento en la dirección $\hat{e}_y$ (la *dirección tangencial* si estuviésemos mirando el problema desde afuera de la calesita) porque es necesario compensar a la fuerza de arrastre. Mientras se mantenga esta situación, las primeras dos ecuaciones nos permiten escribir al vector fuerza de rozamiento como:

$$\vec{F}_{roz} = -ml\gamma^2 t^2 l\hat{e}_x + m\gamma l\hat{e}_y\,, \tag{25}$$

de donde podemos obtener su módulo como:

$$\|\vec{F}_{roz}\| = \sqrt{m^2 l^2 \gamma^4 t^4 + m^2\gamma^2 l^2} = m\gamma l\sqrt{\gamma^2 t^4 + 1}\,. \tag{26}$$

La condición de que el rozamiento es estático nos impone que la expresión anterior está acotada, nuevamente, por $\mu_e N$. Tenemos entonces:

$$m\gamma l\sqrt{\gamma^2 t^4 + 1} \leq \mu_e mg \Rightarrow t \leq t_{cr} \equiv \left[\frac{\mu_e^2 g^2}{\gamma^4 l^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right]^{1/4}\,, \tag{27}$$

es decir, el niñx se mantendrá en contacto con la calesita hasta el valor crítico t_{cr} indicado en la expresión anterior. Además de chequear unidades (les queda a ustedes), es interesante notar que la expresión para t_{cr} involucra una raíz cuarta, por lo que sólo tiene sentido siempre y cuando el corchete sea positivo. Es fácil ver que para que el corchete sea negativo, debemos tener:

$$\frac{\mu_e g}{l} \leq \gamma \,, \tag{28}$$

y, en dicho caso, no existirá t_{cr}. Esto es razonable, puesto que la expresión anterior nos dice que si la aceleración angular γ supera cierto valor, la fuerza de arrastre es lo suficientemente grande como para que el rozamiento estático no sea capaz de bancársela apenas se pone en marcha la calesita. Es decir, si $\frac{\mu_e g}{l} \leq \gamma$, el niñx sale volando apenas prendemos la máquina.

3.4. Inciso (c)

Antes de tirarnos a hacer cuentas, tratemos de entender lo que nos piden. Si desaparece el rozamiento de un momento para otro, lo que le pasa al niñx es muy sencillo de describir desde el punto de vista de un sistema inercial en reposo (es decir, que no rota): el niñx sale disparado con cierta velocidad y la sumatoria de fuerzas que siente de allí en más es nula, por lo que describirá un clásico y querido movimiento rectilíneo uniforme. Este inciso se trata, entonces, de ver como se describe dicho movimiento (que para un observador inercial es muy sencillo) desde el punto de vista del observador que está girando en el centro de la calesita. Como ahora sí compararemos dos sistemas de referencia distintos, utilizaremos coordenadas primadas para referirnos al sistema rotante y coordenadas sin primar para referirnos al sistema inercial.

Resulta conveniente hacer coincidir los dos sistemas en el instante en el cual se apaga el rozamiento. Tenemos entonces, que desde el sistema de referencia inercial, cuando desaparece el rozamiento ($t = 0$), el niño está en $\vec{r} = l\hat{e}_x$ con velocidad:

$$\vec{v} = \omega l \hat{e}_y \,, \tag{29}$$

por lo que el vector posición en este sistema, para todo tiempo posterior, será $\vec{r}(t) = l\hat{e}_x + \omega l t \hat{e}_y$. La velocidad en el sistema inercial se relaciona con aquella medida desde el sistema rotante según la ecuación (1), que queda:

$$\omega l \hat{e}_y = \vec{v}\,' + (\omega \hat{e}_z) \times (l\hat{e}_x + \omega l t \hat{e}_y) \;. \tag{30}$$

De acá ya podríamos despejar lo que estamos buscando (que es $\vec{v}\,'$). El problema es que el carácter vectorial de dicha expresión está referido a los ejes del sistema inercial. Para escribir todo en términos de los ejes rotantes, basta notar que estos se relacionan con los ejes fijos según:

$$\hat{e}_x = \cos(\omega t)\hat{e}_{x'} - \sin(\omega t)\hat{e}_{y'} \quad , \quad \hat{e}_y = \sin(\omega t)\hat{e}_{x'} + \cos(\omega t)\hat{e}_{y'} \,. \tag{31}$$

Si reemplazan estas expresiones en (30) y se ensucian un poco las manos con algo de álgebra, van a llegar a que:

$$\vec{v}\,' = \omega^2 lt \left[\cos(\omega t)\hat{e}_{x'} - \sin(\omega t)\hat{e}_{y'}\right] \tag{32}$$

que es un vector cuyo módulo aumenta indefinidamente con el tiempo (razonable, pues si estamos dando vueltas en el centro de la calesita, la velocidad del resto de las cosas con respecto a nosotros será mayor cuánto más lejos se encuentren de nosotros, y el niñx se está alejando) y cuya dirección, si suponemos que ω es positiva (la calesita gira en sentido anti-horario), cambia en sentido horario con frecuencia angular ω, lo cual es super razonable también. Notar que en el instante inicial, la velocidad del niñx y de la calesita coinciden (pues hasta $t = 0$ el niñx estaba en contacto) y, como pueden ver, cuando $t = 0$ efectivamente tenemos $\vec{v}\,' = \vec{0}$.

Por alguna extraña razón, el enunciado pide $\vec{v}\,'$ en función de la distancia al origen (y no en función del tiempo como la hemos obtenido). Llegar a eso a partir de lo que tenemos aquí es sencillo y les queda a ustedes pensar cómo hacerlo.

Finalmente, aunque esto no lo pide el enunciado, fíjense que las expresiones para ambas componentes de la velocidad en el sistema rotante son sencillas de integrar con respecto al tiempo, así que fácilmente podemos obtener la posición en función del tiempo en dicho sistema. Si se toman el laburo de hacer esto (no olviden la condición inicial: $\vec{r}\,'(t = 0) = l\hat{e}_{x'}$), llegan a:

$$\vec{r}\,'(t) = l\left(\omega t \sin(\omega t) + \cos(\omega t)\right)\hat{e}_{x'} + l\left(\omega t \cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right)\hat{e}_{y'}\,, \tag{33}$$

si se toman la molestia de graficar la trayectoria (es decir, graficar y' como función de x') con algún programita (pueden hacerlo online incluso), verán que tiene la forma que todxs esperamos, mostrada en la figura 4

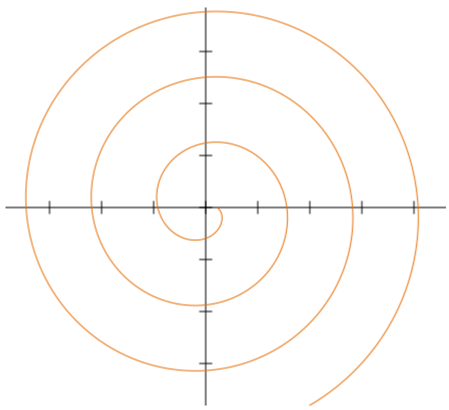

Figura 4: Trayectoria del niñx -en movimiento rectilíneo uniforme con respecto a la Tierra- vista desde el sistema rotante.