Física 1 - Turno A - 2doC 2020 - DF-FCEyN, UBA

Luciano Andrés Masullo

lmasullo@df.uba.ar

### Problema 5.13: partícula y aro en sistema rotante

---

Este problema es un muy buen ejemplo del uso de coordenadas polares en un sistema no inercial $S'$. El foco va a estar puesto en escribir correctamente la posición y velocidad de la partícula en el sistema no inercial y las fuerzas inerciales que aparecen.

## 1. Inciso (a)

Lo primero que necesitamos hacer (y lo más difícil) es escribir correctamente las fuerzas *de interacción* e *inerciales* o *ficticias* actuando sobre el sistema. El enunciado ya nos indica un sistema de referencia $S'$ rotante, fijo al aro. La primera pregunta que les podría surgir es: ¿Por qué este sistema es no inercial si gira a velocidad angular constante? La respuesta es que un sistema inercial se mueve con velocidad $\vec{V}$ constante y en un movimiento circular ya vimos que la velocidad cambia de dirección instante a instante, luego hay una aceleración. Entonces un sistema que gira con velocidad constante es un sistema no inercial.

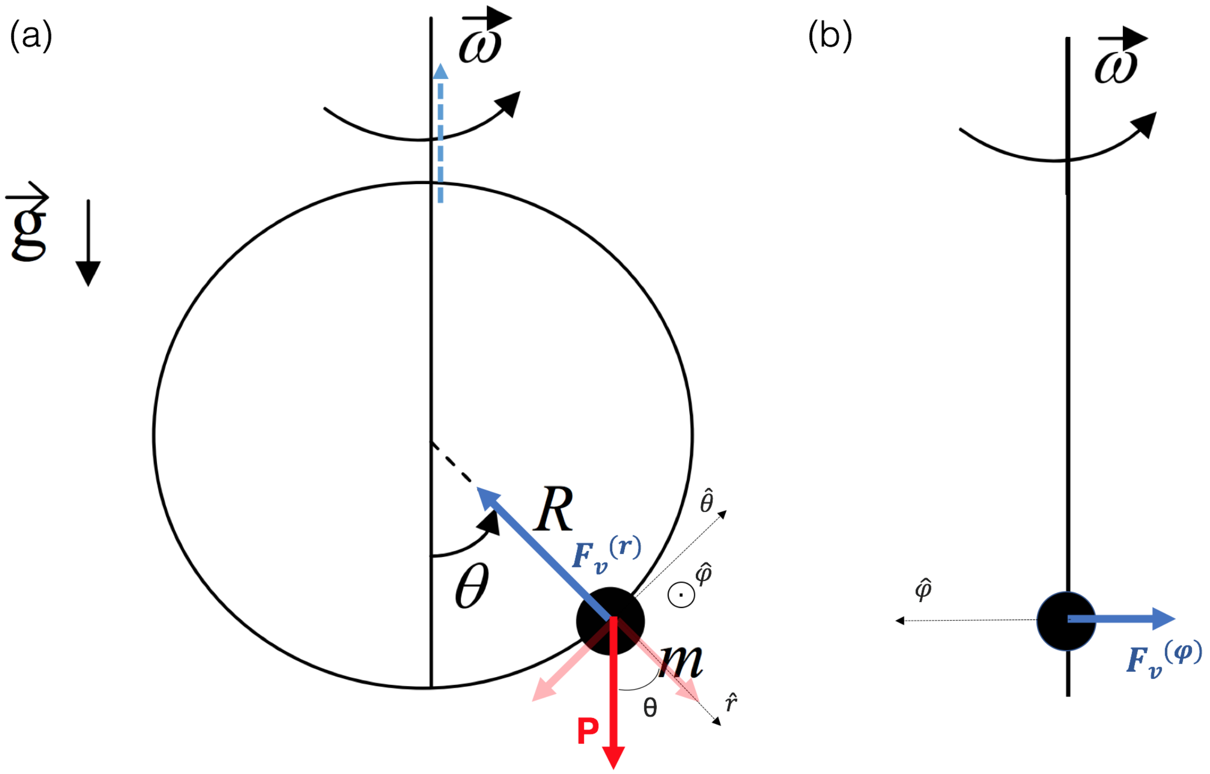


Figura 1: DCL de las fuerzas inerciales en el sistema S'.

Veamos primero el DCL de las fuerzas de interacción, esta parte es muy similar a problemas que ya venimos trabajando (Figura 1.a). Una novedad que aparece es que ahora el problema es tridimensional y el aro puede (veremos luego que es así) hacer una fuerza de vínculo en la dirección perpendicular a su plano (Figura 1.b), esta dirección la llamaremos $\varphi$.

Veamos ahora, las fuerzas *inerciales* o *ficticias* que ve el observador en el sistema $S'$ debido a la rotación del sistema $S'$ con respecto a uno inercial $S$. Como ya se imaginarán, el sistema de coordenadas polares es la mejor opción para describir el movimiento de la partícula en el sistema $S'$. La clave ahora va a ser escribir con mucho cuidado los vectores en el sistema elegido, o sea en coordenadas polares.

La ecuación fundamental para esta parte (y para todos los problemas de la guía) es:

$$\boxed{m\vec{a'} = \underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{de interacción}} \underbrace{-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'}}_{\text{arrastre}} \underbrace{-m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right)}_{\text{centrífuga}} \underbrace{-2m\vec{\omega} \times \vec{v'}}_{\text{Coriolis}}} \tag{1}$$

Lo que vamos a hacer es calcular cada una de las fuerzas ficticias. Empecemos por escribir cada uno de los vectores que aparecen en la ecuación en el sistema de referencia en polares. Si proyectan el vector $\vec{\omega}$ en el sistema de coordenadas polares, usando trigonometría (ayuda: dibujen el vector $\vec{\omega}$ desde el origen del sistema de coordenadas polares), resulta:

$$\boxed{\vec{\omega} = \omega \sin\theta \ \hat{\theta} - \omega \cos\theta \ \hat{r}} \tag{2}$$

donde denotamos $|\vec{\omega}| \equiv \omega$. Como es de esperar para un sistema de coordenadas polares, las proyecciones de $\vec{\omega}$ **dependen de la posición $\theta$ de la partícula**. El vector posición $\vec{r'}$ en coordenadas polares es sencillamente:

$$\boxed{\vec{r'} = R \ \hat{r}} \tag{3}$$

donde usamos que la posición radial está fija por condiciones de vínculo en $r = R$. Recuerden que esto no significa que la posición sea constante, ya que, en polares, ¡El versor $\hat{r}$ depende del ángulo! Veamos por último la velocidad. En general la expresión en polares es:

$$\vec{v'} = \dot{r} \ \hat{r} + r\dot{\theta} \ \hat{\theta} \tag{4}$$

y para nuestro caso particular, usando $r = R = cte$, tenemos

$$\boxed{\vec{v'} = R\dot{\theta} \ \hat{\theta}} \tag{5}$$

Entonces, ya tenemos en (2), (3) y (5) las herramientas para calcular las fuerzas ficticias de (1). Empecemos notando que como $\vec{\omega} = cte$ entonces el término $-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'}$ se anula porque $\dot{\vec{\omega}} = 0$. Veamos la fuerza centrífuga. Empezamos por calcular $(\vec{\omega} \times \vec{r'})$.

$$\left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right) = \left(\omega \sin\theta \; \hat{\theta} - \omega \cos\theta \; \hat{r}\right) \times R \; \hat{r} = -R\omega \sin\theta \; \hat{\varphi} \tag{6}$$

donde usé que el producto vectorial de dos vectores paralelos (mismo versor) es 0 y la *regla de la mano derecha* para $(\theta, r, \varphi)$. Luego ahora veamos el la fuerza centrífuga entera, queda:

$$-m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right) = -m\left(\omega \sin\theta \; \hat{\theta} - \omega \cos\theta \; \hat{r}\right) \times -R\omega \sin\theta \; \hat{\varphi} = m\left(R\omega^2 \sin^2\theta \; \hat{r} + R\omega^2 \sin\theta \cos\theta \; \hat{\theta}\right) \tag{7}$$

donde usé la regla de la mano derecha para los productos vectoriales entre versores y tuve **mucho cuidado** con los signos.

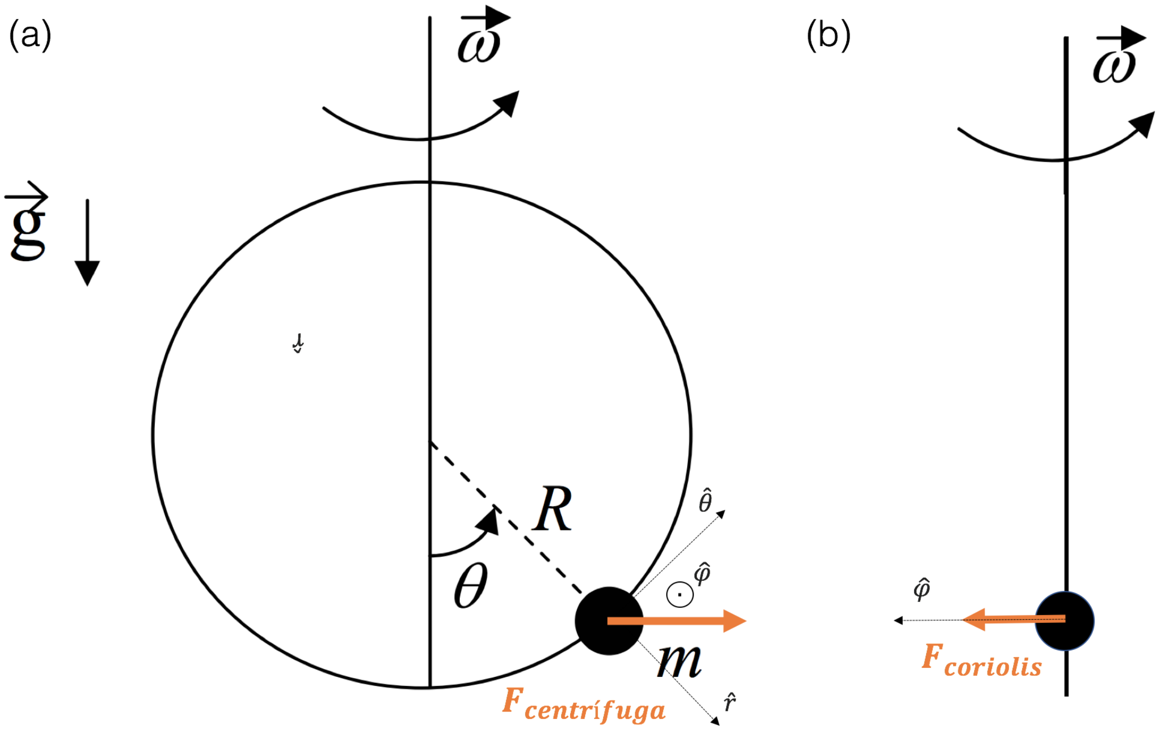


Figura 2: Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas no inerciales en el sistema rotante S'. (a) Vista frontal del sistema. (b) Vista lateral del sistema, 90° respecto a (a)

Veamos por último la fuerza de Coriolis. Tenemos

$$-2m\vec{\omega} \times \vec{v'} = -2m\left(\omega \sin\theta \; \hat{\theta} - \omega \cos\theta \; \hat{r}\right) \times R\dot{\theta} \; \hat{\theta} = 2mR\omega \cos\theta \dot{\theta} \hat{\varphi} \tag{8}$$

Noten cómo en la expresión de la fuerza de Coriolis se ve que el $\cos\theta$ hace que la fuerza cambie de sentido según el hemisferio en el que estamos. Ahora ya tenemos las fuerzas ficticias y podemos dibujarlas para nuestro sistema (Figura 2). La fuerza de Coriolis está claro que apunta en dirección

$\hat{\varphi}$ pero la fuerza centrífuga puede no ser tan obvio que apunta en la dirección que la dibujé. Fíjense que el resultado de (7) puede escribirse:

$$m\left(R\omega^2\sin^2\theta\;\hat{r}+R\omega^2\sin\theta\cos\theta\;\hat{\theta}\right)=mR\omega^2\sin\theta\left(\sin\theta\;\hat{r}+\cos\theta\;\hat{\theta}\right) \tag{9}$$

que para todo ángulo $\theta$ apunta en la dirección que dibujé. Si miran con cuidado el término entre paréntesis de la expresión. Otra manera de ver esto (y de paso de chequear no habernos equivocado con los productos vectoriales) es pasar por un momento a un sistema de coordenadas cartesianas y pensar un problema auxiliar que ya resolvieron que es el de una partícula girando sobre un disco (es equivalente para un dado ángulo $\theta$ de este problema). Esto se los dejo para que lo piensen ustedes.

Bueno ahora que tenemos todas las fuerzas ficticias y agregando las fuerzas de vínculo más la descomposición de la fuerza peso en coordenadas polares podemos escribir las ecuaciones de Newton. Noten que voy a tener que escribir tres ecuaciones porque el problema tiene fuerzas en las tres dimensiones.

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{r})\;\; -mR\dot{\theta}^2 &= -F_v^{(r)}+mR\omega^2\sin^2\theta+mg\cos\theta && \text{(10a)}\\ \hat{\theta})\;\; mR\ddot{\theta} &= -mg\sin\theta+mR\omega^2\sin\theta\cos\theta && \text{(10b)}\\ \hat{\varphi})\;\; 0 &= 2mR\omega_0\cos\theta\;\dot{\theta}-F_v^{(\varphi)} && \text{(10c)} \end{aligned}}$$

donde usé las condiciones de vínculo entre el aro y la partícula, es decir la suma de fuerzas en $\hat{\varphi}$ es 0 y las derivadas de $r$ se anulan porque no hay movimiento radial ($r=R=cte$)

Hasta acá resolvimos la parte más difícil del problema que era encontrar las fuerzas ficticias en el sistema de coordenadas polares y escribir correctamente las ecuaciones de Newton del sistema. Lo que sigue es muy similar a incisos de problemas que ya resolvieron en las guías anteriores.

## 2. Inciso (b)

Veamos el equilibrio, necesitamos $\ddot{\theta}=0$ y $\dot{\theta}=0$, luego usando (10b), obtenemos:

$$0=-mg\sin\theta_{eq}+mR\omega^2\sin\theta_{eq}\cos\theta_{eq} \tag{11}$$

Acá un detalle matemático importante: antes de pasar alegremente dividiendo el $\sin\theta$ debemos evaluar *qué pasa cuando se anula*, es decir el caso en el que no podemos dividir toda la expresión por $\sin\theta$. Es matemática básica pero un error súper común. Y de hecho en este problema, $\sin\theta=0$ es posición de equilibrio. Notación: llamaremos a las distintas posiciones de equilibrio $\theta_1,\theta_2,\theta_3$.

$$\boxed{\theta_1=0} \tag{12}$$

$$\boxed{\theta_2 = \pi} \tag{13}$$

Estas situaciones corresponden a la bolita en el fondo del aro y arriba de todo, en esos casos la fuerza centrífuga se anula porque la partícula está sobre el eje de rotación y la fuerza peso se compensa totalmente con la de vínculo. ¿Pueden predecir sin hacer cuentas si estas posiciones de equilibrio son estables o inestables? ¿De qué depende?

Evaluemos estabilidad de estos equilibrios con el criterio de la derivada. Para eso primero calculemos $F'(\theta)$. Aclaración: acá y muchas veces cuando escribimos $F(\theta)$ nos referimos a la *suma de las fuerzas* que resultó de la ecuación de Newton, no a una fuerza en particular.

$$F(\theta) = -mg\sin\theta + mR\omega^2 \sin\theta\cos\theta \tag{14}$$

y luego

$$F'(\theta) = -mg\cos\theta + mR\omega^2 \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \tag{15}$$

Si $\sin\theta \neq 0$, obtenemos

$$0 = -mg + mR\omega^2 \cos\theta_3 \tag{16}$$

de lo que despejamos

$$\boxed{\theta_3 = \arccos\left(g/R\omega^2\right)} \tag{17}$$

notamos inmediatamente es que este $\theta_3$ va a existir solamente si $g < R\omega^2$, además si obtenemos $\theta_3$ también $-\theta_3$ será punto de equilibrio.

Analicemos ahora la estabilidad de los distintos puntos de equilibrio. Veamos qué sucede para $\theta_2 = \pi$.

$$F'(\theta_2) = -mg(-1) + mR\omega^2 (1-0) = mg + mR\omega^2 > 0 \tag{18}$$

Entonces para $\theta_2$ el equilibrio es siempre **inestable**. Fíjense que esto ya se podía predecir cualitativamente: si apartamos un $d\theta$ la partícula del punto más alto del aro, tanto el peso como la fuerza centrífuga van empujar a la partícula en la dirección $-\hat{\theta}$.

Veamos ahora qué sucede para $\theta_1 = 0$.

$$F'(\theta_1) = -mg(1) + mR\omega^2 (1-0) = mg - mR\omega^2 \tag{19}$$

El valor de la derivada depende de dos términos, uno que depende (es) la fuerza peso y el otro que depende de la fuerza centrífuga. Si se desplaza la partícula un diferencial $d\theta$ la fuerza peso va a intentar hacer volver a la partícula a la posición de equilibrio, pero la fuerza centrífuga la va a intentar sacar de ahí. Entonces el equilibrio va a ser **estable** o **inestable** dependiendo de si $mg > mR\omega^2$ o $mg < mR\omega^2$ respectivamente. ¿Qué pasa cuando $mg = mR\omega^2$ es decir cuando se anula $F'(\theta_1)$? En ese caso tenemos que o bien seguir buscando órdenes superiores en las derivadas y armarnos el polinomio de Taylor y ver qué pasa a órdenes mayores (ver el apunte *Equilibrio y Estabilidad* por Vale que subimos al Campus) o bien graficar la función y determinar evaluando el gráfico si el equilibrio es estable o inestable. Les dejo como tarea calcular la derivada tercera (la segunda se anula) y les muestro el gráfico de $F(\theta)$ para $mg = mR\omega_0^2$ para que lo evaluemos.

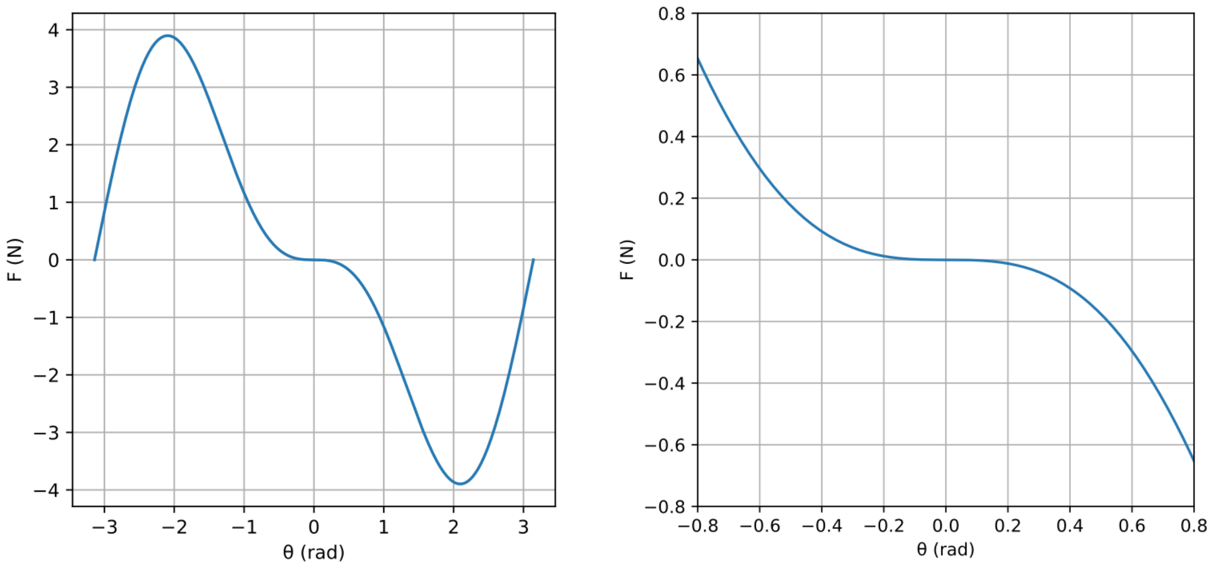


Figura 3: a) Gráfico de $F(\theta)$ entre $-\pi$ y $\pi$ para el caso en que los parámetros cumplen $g = R\omega^2$. b) Zoom en la región de interés cerca de $\theta = 0$. Se puede ver que para la fuerza $F(\theta)$ tiene sentido el signo opuesto de $\theta$

Se puede ver que para valores de $\theta > 0$ la fuerza $F(\theta)$ es negativa y para valores de $\theta < 0$ la fuerza $F(\theta)$ es positiva, con lo cual tiende a hacer volver a la partícula al punto de equilibrio y luego el equilibrio es **estable**. De todas maneras vale remarcar que lo interesante de este análisis es el cambio de comportamiento del sistema, equilibrio estable/inestable, para los dos rangos de valores $mg > mR\omega^2$ y $mg < mR\omega^2$, el caso de la igualdad es muy poco probable y con menor significado físico (¿Qué tan factible les parece lograr esa igualdad matemática en un laboratorio?)

Veamos por último para $\theta_3$. Usando (15) y reemplazando $\theta_3$ obtenemos

$$F'(\theta_3) = -mg\left(\frac{g}{R\omega^2}\right) + mR\omega^2\left[\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2 - \left(\sqrt{1-\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2}\right)^2\right] \tag{20}$$

donde usé la identidad trigonométrica $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Podemos reescribir esa expresión como

$$F'(\theta_3) = -mg\left(\frac{g}{R\omega^2}\right) - mR\omega^2\left[1 - 2\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2\right] \tag{21}$$

que se puede simplificar a

$$F'(\theta_3) = mg\left(\frac{g}{R\omega^2}\right) - mR\omega_0^2 \tag{22}$$

y recordando que lo que nos interesa es ver si $F'(\theta_3) < 0$, planteamos

$$mg\left(\frac{g}{R\omega^2}\right) - mR\omega^2 < 0 \tag{23}$$

equivalente a

$$g^2 < \left(R\omega^2\right) \tag{24}$$

y que se cumple si y sólo si $g < R\omega_0^2$ que no es ni más ni menos que la condición que habíamos encontrado para que existiera $\theta_3$. Luego el equilibrio en $\theta_3$ es estable. ¿Qué pasa para $g^2 = (R\omega^2)$? En este caso es fácil ver que la igualdad se cumple sólo para $\theta_3 = 0$ que es un caso que ya evaluamos anteriormente. Como modo de chequear que estos resultados analíticos sean correctos, los invito a chequear gráficamente que el equilibrio para $\theta_3$ es estable.

# 3. Inciso (c)

Para responder este inciso vamos a hacer algo muy similar a lo que ya hicimos en otros problemas. La idea es que con las ecuaciones (10a) y (10c) tenemos la relación entre las dos componentes de la fuerza de vínculo (la fuerza de vínculo que pide el problema será la suma vectorial de las dos componentes) y términos que dependen de $\theta$. Lo que nos molesta es $\dot{\theta}$, pero si pudiéramos obtener $\dot{\theta}(\theta)$, ya estaríamos. Para eso vamos a usar el truco de $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}$ e integrar la ecuación (10b). Usando el truco y ya planteando las integrales, obtengo:

$$\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} R\dot{\theta}' d\dot{\theta}' = \int_{\theta_0}^{\theta} \left[-g\sin\theta' + R\omega^2 \sin\theta' \cos\theta'\right] d\theta' \tag{25}$$

El último término de la integral de la derecha sale haciendo la sustitución $u = \sin\theta$ y obtenemos

$$\frac{R\dot{\theta}^2}{2} - \frac{R\dot{\theta}_0^{\,2}}{2} = \left[g\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) + \frac{R\omega^2}{2}\left(\sin^2\theta - \sin^2\theta_0\right)\right] \tag{26}$$

Usando que $\dot{\theta}_0 = 0$ ya que el móvil se "sueltaz pasando convenientemente un factor 2 obtenemos

$$R\dot{\theta}^2 = 2\left[g\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) + \frac{R\omega^2}{2}\left(\sin^2\theta - \sin^2\theta_0\right)\right] \tag{27}$$

Ahora sólo reemplazar (27) en (10a) y despejar $F_v^{(r)}$. Por otro lado si despejamos $\dot{\theta}$ obtenemos

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{R}\left[g\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) + \frac{R\omega^2}{2}\left(\sin^2\theta - \sin^2\theta_0\right)\right]} \tag{28}$$

y al reemplazar en (10c) y despejar obtenemos $F_v^{(\varphi)}$. Con esto obtuvimos las dos componentes de la fuerza de vínculo en función de $\theta$. La respuesta final al inciso (c) es $F_v(\theta) = F_v^{(r)}(\theta)\,\hat{r} + F_v^{(\varphi)}(\theta)\,\hat{\phi}$. Les dejo a ustedes ese despeje final y escribir la expresión completa de la solución.