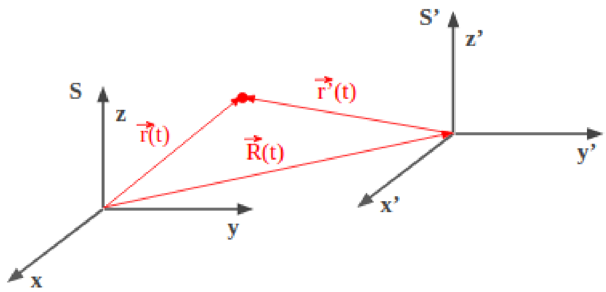
Sistemas no inerciales

Samantha Kucher
samanthakucher@gmail.com

1er cuatrimestre 2020

- **Sistemas inerciales**
  - Valen las ecuaciones de Newton teniendo en cuenta las fuerzas debidas a interacciones.
  - Si un sistema es inercial, entonces cualquier sistema que se traslade con velocidad constante respecto de él también es inercial.
- **Sistemas no inerciales**
  - Se trasladan con aceleración ($\dot{\vec{R}} \neq$ cte) respecto del sistema inercial S (o rotan).
  - No valen las ecuaciones de Newton teniendo en cuenta sólo las fuerzas debidas a interacciones.
  - ¡Pero sí valen las ecuaciones de Newton si se agregan las fuerzas de inercia!

Supongamos que tenemos un sistema inercial S y otro sistema S' que se mueve con aceleración $\ddot{\vec{R}}$ respecto de S.



La posición de algún punto será

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$$

Derivamos 2 veces

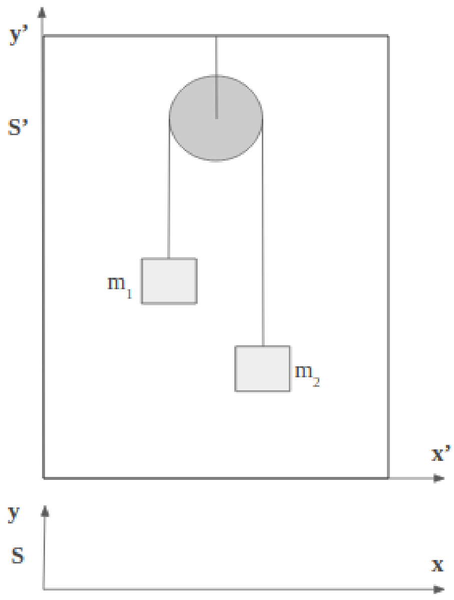
$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{R}}(t) + \ddot{\vec{r}}'(t)$$

En S, $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$. Relacionemos esto con la aceleración medida en S'.

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m(\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}') = m\ddot{\vec{R}} + m\ddot{\vec{r}}'$$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} \quad \underbrace{-m\ddot{\vec{R}}}_{\text{fuerza de inercia}}$$

Ejercicio 2



a)

El ascensor sube con velocidad constante. Entonces S' es un sistema inercial y podemos resolver el ejercicio como lo haríamos en la guía 2.

Resolvemos en S', aunque en realidad es lo mismo porque como $\ddot{\vec{R}} = 0$, entonces $m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}'$.

Realizamos los diagramas de cuerpo libre y escribimos las ecuaciones de Newton.

$$m_1)\ddot{y}') \quad m_1\ddot{y}_1' = T_1 - m_1 g \qquad m_2)\ddot{y}') \quad m_2\ddot{y}_2' = T_2 - m_2 g$$

Planteamos ahora los vínculos:

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \equiv T \\ L = y_p' - y_2' + y_p' - y_1' \end{cases} \xrightarrow{\text{derivo 2 veces}} \quad \ddot{y}_1' = -\ddot{y}_2'$$

Reemplazamos en las ecuaciones de Newton:

$$m_1\ddot{y}_1' = T - m_1 g \tag{1}$$

$$-m_2\ddot{y}_1' = T - m_2 g \tag{2}$$

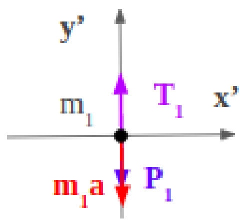
Restamos las ecuaciones (1)-(2):

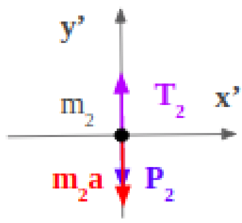
$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_1' = (m_2 - m_1)g$$

$$\ddot{y}_1' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \qquad \ddot{y}_2' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

b)

El ascensor sube con aceleración a. Entonces ahora S' es un sistema no inercial.
Realizamos los diagramas de cuerpo libre en el sistema S', incluyendo las fuerzas de inercia.





$$m_1)\ddot{y}') \quad m_1\ddot{y}'_1 = T_1 - m_1 g - m_1 a \qquad m_2)\ddot{y}') \quad m_2\ddot{y}'_2 = T_2 - m_2 g - m_2 a$$

Los vínculos se mantienen. Reemplazamos:

$$m_1\ddot{y}'_1 = T - m_1 g - m_1 a \tag{3}$$

$$-m_2\ddot{y}'_1 = T - m_2 g - m_2 a \tag{4}$$

Restamos las ecuaciones (3)-(4):

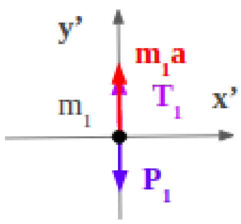
$$(m_1 + m_2)\ddot{y}'_1 = (m_2 - m_1)(a + g)$$

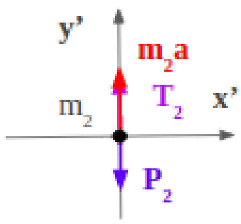
$$\ddot{y}'_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}(a + g) \qquad \ddot{y}'_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(a + g)$$

En S, $\ddot{y}_1 = \ddot{y}'_1 + a$ y $\ddot{y}_2 = \ddot{y}'_2 + a$

c)

El ascensor baja con aceleración a.
En S',





$$m_1)\ddot{y}') \quad m_1\ddot{y}'_1 = T_1 - m_1 g + m_1 a \qquad m_2)\ddot{y}') \quad m_2\ddot{y}'_2 = T_2 - m_2 g + m_2 a$$

Los vínculos se mantienen. Reemplazamos:

$$m_1\ddot{y}'_1 = T - m_1 g + m_1 a \tag{5}$$

$$-m_2\ddot{y}'_1 = T - m_2 g + m_2 a \tag{6}$$

Restamos las ecuaciones (5)-(6):

$$(m_1 + m_2)\ddot{y}'_1 = (m_2 - m_1)(g - a)$$

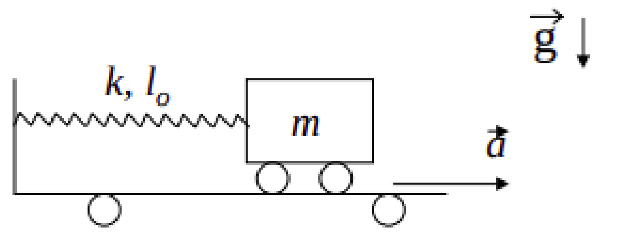
$$\ddot{y}_1' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}(g - a) \qquad \ddot{y}_2' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g - a)$$

En S, $\ddot{y}_1 = \ddot{y}_1' - a$ y $\ddot{y}_2 = \ddot{y}_2' - a$

d)

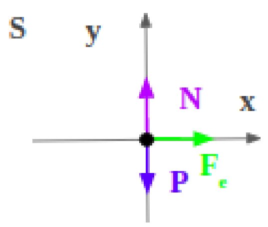
Se corta el cable del ascensor. Entonces desciende con aceleración $\vec{g}$. Si reemplazamos en las ecuaciones del ítem c vemos que en S' $\ddot{y}_1' = 0$ y $\ddot{y}_2' = 0$, y en S ambas masas tienen aceleración $-g$. Ni necesitábamos los vínculos para averiguar esto, si se corta el cable se cae todo.

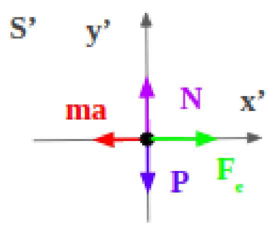
Ejercicio 3



a)

Llamamos sistema S al sistema fijo al piso y S' a un sistema que se mueve solidario a la plataforma.





b)

Nos piden describir el movimiento de la masa respecto de la plataforma, es decir, en el sistema S'. Escribimos las ecuaciones de Newton:

$$x') \quad m\ddot{x}' = -k(x' - l_0) - ma \qquad y') \quad m\ddot{y}' = N - mg$$

Observamos que el signo de la fuerza elástica es el correcto: cuando el resorte se comprime, $x' - l_0 < 0$ y la fuerza es positiva, y cuando el resorte se estira, $x' - l_0 > 0$ y la fuerza es negativa.

Como vínculo tenemos que $y' = \text{cte} \rightarrow \ddot{y}' = 0$ y por lo tanto $N = mg$.

Proponemos una solución para $x'(t)$:

$$x'(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + B \quad \text{donde} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Veamos las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \dot{x}'(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -A\omega_0 \sin\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0 \\ x'(t=0) = l_0 \quad \Rightarrow \quad A + B = l_0 \end{cases}$$

Derivamos dos veces para obtener la aceleración y reemplazamos:

$$\ddot{x}'(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$
$$-mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -k[A\cos(\omega_0 t) + B + l_0] - ma$$
$$-m\omega_0^2 A = -k \underbrace{[A + B - l_0]}_{=0} - ma$$

Podemos despejar A y B:

$$A = \frac{ma}{k} \qquad B = l_0 - \frac{ma}{k}$$

Entonces la expresión para la posición de la masa en el sistema S' queda:

$$x'(t) = \frac{ma}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + l_0 - \frac{ma}{k}$$

En S, $x(t) = x'(t) + \frac{1}{2}at^2$ donde $\frac{1}{2}at^2$ es el movimiento de la plataforma.

c)

Planteo la sumatoria de fuerzas para la plataforma en el sistema S', incluyendo la fuerza de inercia.

$$\vec{F}_M + \vec{F}_e^M - M\vec{a} = 0$$

En el sistema solidario a la plataforma, ésta tiene aceleración cero. Llamamos $\vec{F}_M$ a la fuerza que hace que se mueva (la que nos pide la consigna) y $\vec{F}_e^M$ a la fuerza que siente la plataforma debido al resorte.

Planteamos ahora las ecuaciones de Newton sobre el resorte, y luego consideramos que tiene masa cero. Tenemos entonces que los módulos de las fuerzas elásticas que sienten la masa m y la plataforma son iguales $\mid F_e^M \mid = \mid F_e^m \mid$. Como $F_e^m = -k(x_m - l_0)$, reemplazo:

$$F_M + k(x_m - l_0) - Ma = 0$$

donde x_m es la posición de la masa m en el sistema solidario a la plataforma. En este caso la fuerza elástica lleva un signo más (al contrario que en la masa m) porque cuando el resorte se comprime ($x_m - l_0 < 0$), empuja a la plataforma hacia atrás, entonces la fuerza en ese caso debería ser negativa. Podemos entonces despejar la fuerza F_M:

$$F_M = Ma - k(x_m - l_0)$$