Física 1, primer cuatrimestre de 2020: Problema 6.9

Ignacio Perito (iperito@df.uba.ar)

Acá va la resolución del problema 9 de la guía de relatividad. El enunciado del ejercicio no lo dice explícitamente, pero la idea es derivar la fórmula del efecto Doppler relativista.

Antes de pasar a resolverlo, es una buena idea discutir un poco el efecto Doppler clásico y qué cosas nuevas esperamos encontrar en el caso relativista. Con la versión clásica del efecto Doppler todxs estamos familiarizados: el ejemplo más concreto es el cambio en la frecuencia del sonido que percibimos cuando la fuente que lo emite se está acercando o alejando de nosotrxs. No vamos a entrar en detalles (sobre todo porque resolveremos el caso relativista que, desde luego, contiene al caso clásico en cierto límite) y, además, una animación vale más que mil palabras... **si hacen click acá** pueden ver un gif que me choreé del artículo de Wikipedia sobre efecto Doppler. La idea es sencilla: cuando la fuente se aleja de nosotrxs, los pulsos (en este caso picos de ondas de presión en el aire) nos llegan más *espaciados* y percibimos una frecuencia menor; mientras que al acercarse, los pulsos llegan más pegados y percibimos una frecuencia mayor. En el caso relativista esto sigue sucediendo, pero aparece un ingrediente extra: la forma en que transcurre el tiempo en los dos sistemas de referencia (fuente y receptor) **no es la misma** y, desde luego, esto tendrá un impacto en la relación entre las frecuencias.

1. Problema 6.9

El problema habla de una nave que se aleja de la Tierra a una velocidad dada y que emite pulsos con un período también dado. Para obtener una fórmula más general, no supondremos nada sobre la velocidad de la nave o sobre el período con que los pulsos son emitidos desde el mismo. Resolveremos el caso de una nave que **se aleja** de la Tierra con una velocidad de módulo v arbitrario y emite pulsos con un período arbitrario. Al final ustedes pueden particularizar los resultados a $v = \frac{c}{2}$ y pulsos emitidos con un período de un año, que son los datos del problema.

Vamos a tomar un sistema de referencia $\mathcal{S}$ fijo a la Tierra y un sistema $\mathcal{S}'$ fijo a la nave y un eje $\hat{e}_x$ en la dirección del movimiento de la nave. Tenemos entonces que la velocidad del sistema primado con respecto a la Tierra está dado por $\vec{v} = v\hat{e}_x$. Las transformaciones de Lorentz relevantes (en sus dos versiones, de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ y viceversa) para el problema quedan:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \quad , \quad ct = \gamma\,(ct' + \beta x') \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \quad , \quad x = \gamma\,(x' + \beta ct') \end{aligned} \tag{1}$$

donde c es la velocidad de la luz, $\beta \equiv \frac{v}{c}$ y $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Como siempre, los orígenes espacio temporales de ambos sistemas coinciden; y en este caso resulta sumamente útil ubicar la emisión de uno de los pulsos en dicho evento. Es decir, a $x = x' = 0$ y $t = t' = 0$, la nave emite un pulso (y llega a la Tierra, pues las coordenadas espacio-temporales de dicho evento coinciden en ambos sistemas). Entonces, si queremos averiguar el período con el cual los pulsos llegan a la Tierra, simplemente debemos averiguar el valor de t para el cual llega el siguiente pulso. En el sistema fijo a la nave, el siguiente pulso es emitido a $t' = \tau'$ donde τ' es el período con el cual se emiten los pulsos desde la nave y **es un dato del problema** (en la guía, nos dicen que es un año). Sin entrar en detalles, porque ya lo hicimos muchas veces, es fácil -usando las transformaciones de Lorentz- ver que, desde la Tierra, dicho pulso se ve emitido a un tiempo:

$$t = \gamma\tau' \,. \tag{2}$$

En este punto hay que tener cuidado y recordar lo discutido al principio de las notas: hay dos efectos que tenemos que tener en cuenta y hasta aquí sólo consideramos uno de ellos (la dilatación temporal). **No es cierto** que el período con que los pulsos llegan a la Tierra es simplemente $\gamma\tau'$, porque dicho valor corresponde al momento en el cual el pulso es emitido, pero el mismo se desplaza a una velocidad finita (la de la luz), así que nos falta considerar el tiempo que le demora llegar a la Tierra. Esto último es la parte más fácil porque, al momento de ser emitido, sabemos que la nave se encontrará a una distancia $d = v\gamma\tau'$ de la Tierra (la nave se mueve a una velocidad de módulo v con respecto a Tierra y lo hizo durante un tiempo $\gamma\tau'$ entre pulso y pulso). Los pulsos emitidos son pulsos de luz, así que se mueven con velocidad c y, por ende, una vez emitido, el mismo demorará un tiempo $\frac{d}{c} = \frac{v\gamma\tau'}{c}$ en llegar a la Tierra. En resumen, si el primer pulso pasó por la Tierra a $t = 0$, el segundo llegará en:

$$\tau \equiv \gamma\tau' + \frac{v\gamma\tau'}{c} = \gamma\tau'\left(1 + \frac{v}{c}\right) \,, \tag{3}$$

donde hemos bautizado τ a esta cantidad porque no es otra cosa que el período con el que los pulsos llegan al sistema $\mathcal{S}$. Como es de esperar, el período con el que los pulsos llegan a la Tierra **es mayor** que aquel con el que son emitidos de la nave. También es sano notar, en este punto, que el límite clásico se obtiene poniendo $\gamma = 1$ en la expresión anterior (lo cual, físicamente, corresponde a haber omitido el efecto de la dilatación temporal) de donde recuperan la expresión para el efecto Doppler clásico (donde c es la velocidad de propagación de las ondas en cuestión y no tiene por qué ser la de la luz).

La expresión anterior se puede re-escribir, con un poco de álgebra, como:

$$\tau = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\tau' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,\tau' \,, \tag{4}$$

y, aunque el ejercicio no lo pide, es sencillo obtener la ley de transformación entre las frecuencias $f = \frac{1}{\tau}$ y $f' = \frac{1}{\tau'}$ simplemente tomando el inverso multiplicativo de la expresión anterior:

$$f = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\, f' \,, \tag{5}$$

que es la forma más usual en la que suele escribirse el efecto Doppler relativista. Como vemos (y ya sabíamos), la frecuencia observada en la Tierra **es menor** que la frecuencia de emisión de los pulsos desde la nave. En el caso particular en el cual tenemos una fuente fija a la nave que emite una onda electromagnética de frecuencia f', lo que llega a la Tierra es una onda electromagnética con una frecuencia menor y dada por la expresión anterior. Este fenómeno se conoce conoce como *corrimiento al rojo*, puesto que en el caso de ondas electromagnéticas en el espectro visible, el color de la luz emitida se ve desplazada hacia el rojo (frecuencia más baja del espectro visible)[1].

De tarea les queda a ustedes:

- ver (siguiendo un razonamiento idéntico al que usamos en todo lo anterior) que si la nave se está **acercando** a la Tierra con velocidad de módulo v, la relación entre las frecuencias resulta:

$$f = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\, f' \,, \tag{6}$$

  lo cual suele denominarse *corrimiento al azul* (como se imaginan, la frecuencia más alta del espectro visible corresponde al azul);

- encontrar el error en la canción Fuerza Natural de Cerati y,

- si no saben de qué estoy hablando en el ítem anterior, hacerse un favor y escuchar ese disco de principio a fin.

[1]Dicho sea de paso, gracias a esto -en realidad, a una versión un poco más *general* de esto- es que sabemos que el universo se está expandiendo.