Física 1 - Turno A - 2doC 2020 - DF-FCEyN, UBA

Luciano Andrés Masullo

lmasullo@df.uba.ar

1. Problema 6.1: Dilatación de tiempos

Para resolver este problema y otros asociados lo esencial (y difícil) es plantear bien las transformaciones de Lorentz y las condiciones de los sistemas. Una vez que hicimos esto, la cuestión se reduce a unas cuentas muy sencillas para despejar los parámetros con los datos que nos proveen.

Figura 1: Esquema del problema, prestar especial atención a las definiciones de S, S' y v. Se resalta la importancia de la condición $\Delta x' = 0$

El enunciado nos dice que tenemos a Pedro moviéndose con respecto a Juan con velocidad v. Asociaremos Juan $\rightarrow S$ y Pedro $\rightarrow S'$, según la Figura 1. Luego podemos plantear las **transformaciones de Lorentz**

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \tag{1}$$

$$x' = \gamma \left(x - vt \right) \tag{2}$$

con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Notemos que estamos usando las variables primadas para referirnos a las coordenadas de los eventos vistos desde S' y las variables no primadas para referirnos a los vistos desde S. Recuerden que estamos omitiendo por simplicidad la parte de la transformación que dice $y' = y$ y $z' = z$ porque este problema es totalmente 1D, pero estas podrían ser útiles en otros problemas de la guía. Por otro lado, planteemos también las **transformaciones inversas**:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \tag{3}$$

$$x = \gamma \left(x' + vt' \right) \tag{4}$$

Teniendo en cuenta que un intervalo de tiempo Δt es el tiempo transcurrido entre dos instantes de tiempo, digamos t_i y t_f, podemos escribir las transformaciones para t_i y t_f, x_i y x_f

$$t'_i = \gamma \left(t_i - \frac{vx_i}{c^2} \right) \tag{5}$$

$$x'_i = \gamma \left(x_i - vt_i \right) \tag{6}$$

$$t'_f = \gamma \left(t_f - \frac{vx_f}{c^2} \right) \tag{7}$$

$$x'_f = \gamma \left(x_f - vt_f \right) \tag{8}$$

Recuerden que estamos pensando en un evento inicial que se ve (t_i, x_i) desde S y que se ve (t'_i, x'_i) desde S' y en un evento final que se ve (t_f, x_f) desde S y que se ve (t'_f, x'_f) desde S'. Si restamos las ecuaciones, obtenemos

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma \left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2} \right) && (9) \\ \Delta x' &= \gamma \left(\Delta x - v\Delta t \right) && (10) \end{aligned}}$$

donde $\Delta t = t_f - t_i$ y $\Delta x = x_f - x_i$, $\Delta t' = t'_f - t'_i$ y $\Delta x' = x'_f - x'_i$. Análogamente, para las transformaciones inversas

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta t &= \gamma \left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2} \right) && (11) \\ \Delta x &= \gamma \left(\Delta x' + v\Delta t' \right) && (12) \end{aligned}}$$

Ahora, pensemos los siguiente: el tiempo que transcurre en el reloj de Juan (visto desde S) es el mismo para cualquier punto del espacio (visto desde S) en particular en los puntos en los que se encuentra Pedro, llamaremos a este tiempo que transcurre en el reloj de Juan Δt. Por otro lado veamos a Pedro visto desde S: recorre una distancia (va de x_i a x_f en ese tiempo transcurrido), luego $\Delta x \neq 0$. Por otro lado, visto desde S', el reloj de Pedro va a medir un cierto tiempo $\Delta t'$. La posición de Pedro y su reloj vistos desde S' (o sea desde su propio sistema) es $\Delta x' = 0$, es decir Pedro está en reposo de sí mismo. Ahora, ya vimos que en general $\Delta t \neq \Delta t'$, la pregunta es ¿Cómo los relacionamos?

Usemos (11) y recordemos que, en este problema, $\Delta x' = 0$

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right) = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\ 0}{c^2}\right) = \gamma\Delta t' \tag{13}$$

y obtenemos

$$\boxed{\Delta t = \gamma\Delta t'} \tag{14}$$

que es conocida como la fórmula de **dilatación temporal** porque recuerden que $\gamma > 1$. Fíjense que la "deducción"de esta fórmula, fue muy sencilla: partimos de (11) y usamos que $\Delta x' = 0$. Una pregunta que podría surgir si uno no parte de las transformaciones de Lorentz, es: ¿Por qué es $\Delta t = \gamma\Delta t'$? ¿Y no $\Delta t' = \gamma\Delta t$? Fíjense, que si usamos (9) aparece el término con Δx y $\Delta x \neq 0$, luego

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) \neq \gamma\Delta t \tag{15}$$

Pensando de esta manera no les debería quedar dudas de que la fórmula correcta es (14) pero hay algo más que podemos hacer: ¿Qué pasa si nos empecinamos en usar (9)? Bueno podemos usar la expresión de Δx dada por el movimiento MRU de Pedro con respecto a Juan, es decir $\Delta x = v\Delta t$ que no es más que medir lo que se desplazó Pedro (S') con respecto a Juan visto desde Juan (S)

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = \gamma\left(\Delta t - \frac{v(v\Delta t)}{c^2}\right) = \gamma\Delta t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{16}$$

pero notemos que $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1/\gamma^2$, luego

$$\Delta t' = \gamma\Delta t\frac{1}{\gamma^2} = \frac{\Delta t}{\gamma} \tag{17}$$

que es equivalente a (14).

Dicho todo esto vamos ahora sí a los puntos que nos pide el problema.

1.1. Inciso (a)

Llamaremos T_{Pedro} el tiempo transcurrido en el reloj de Pedro y T_{Juan}, luego si nos dicen que el ritmo de avance del reloj de Pedro es la mitad del ritmo de avance del reloj de Juan, tenemos:

$$T_{Pedro} = \frac{1}{2}T_{Juan} \tag{18}$$

Usando entonces que Juan $\rightarrow S$ y Pedro $\rightarrow S'$ podemos asociar $T_{Juan} \rightarrow \Delta t$ y $T_{Pedro} \rightarrow \Delta t'$. Luego, usando (14), concluimos que $\gamma = 2$ y luego

$$2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \boxed{v = \frac{\sqrt{3}}{2}c} \tag{19}$$

1.2. Inciso (b)

Nos dicen que dos eventos están separados $1s$ en el sistema S', luego $T_{Pedro} = 1s$ y usando que $T_{Pedro} = \frac{1}{2}T_{Juan}$, tenemos

$$\boxed{T_{Juan} = 2s} \tag{20}$$

Como verán, la dificultad está en interpretar el enunciado, escribirlo en términos matemáticos y en plantear las transformaciones de manera correcta, una vez hecho esto la matemática para resolver las preguntas es sencilla.

2. Problema 6.2: Contracción de longitudes

Para entender bien este problema tenemos que repasar primero el concepto de *longitud*. Una longitud de un objeto (por ejemplo la regla) la podemos pensar[1] como la diferencia de posición entre su punto final y su punto inicial **medidos a un mismo instante de tiempo** o, si se miden a distintos tiempos, medidos con el objeto en reposo. Piensen en el siguiente ejemplo: quiero medir la longitud de un auto. Tengo dos opciones: si está en movimiento, le saco una foto (medición de frente y cola simultánea), si está estacionado puedo ir y medir la posición del frente y después de la cola a distintos intervalos de tiempo (como caso particular también puedo medir en simultáneo pero no es necesario).

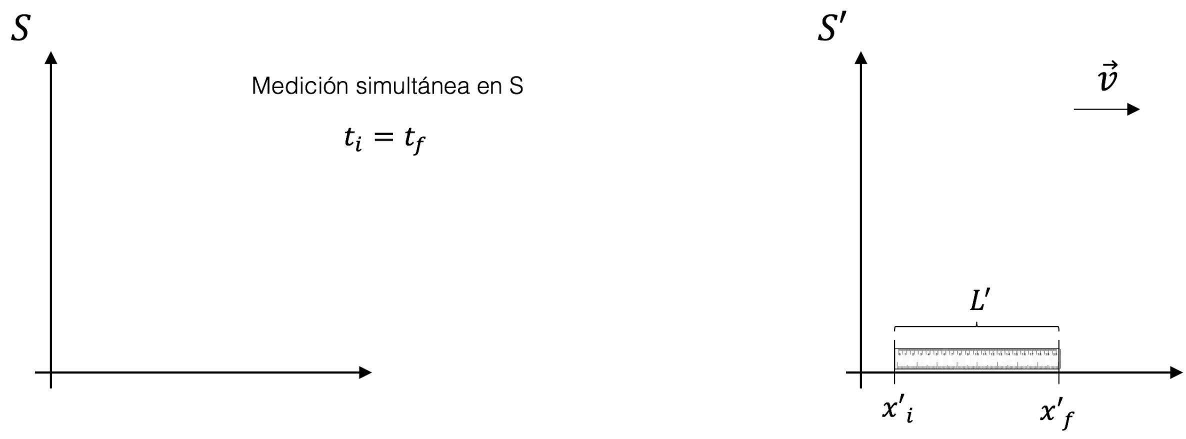

Figura 2: Esquema del problema, prestar especial atención a las definiciones de S, S' y v. Se resalta la importancia de la condición $\Delta t = 0$

Teniendo en cuenta estos conceptos, notemos que la longitud de la regla vista desde S' va a ser $\Delta x' = L'\ \forall t'$, luego podemos medir su longitud a distintos tiempos. Vista desde S la longitud

[1]La definición bien formal la pueden buscar si les interesa.

de la regla va a ser $\Delta x = L$ pero tenemos que medir de manera simultánea $\Delta t = 0$. Luego, ¿Cómo relacionamos L y L'? Bueno si miramos con cuidado las Transformaciones de Lorentz que enunciamos en el problema anterior, si usamos (10) podemos escribir

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right) = \gamma\left(\Delta x - v\ 0\right) \tag{21}$$

y luego, dividiendo todo por γ y mirando dada vuelta la igualdad obtenemos

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} \rightarrow \boxed{L = \frac{L'}{\gamma}} \tag{22}$$

que es conocida como la fórmula de **contracción de longitudes** porque recuerden que $\gamma > 1$. La longitud propia es la medida en el sistema en el cual el objeto está en reposo, en este caso S'. Luego la longitud en reposo de la regla es L', se la suele llamar también L_0. Yo les recomiendo que siempre más allá de cómo se definen los datos en el enunciado (imaginen si por ejemplo les decían que la longitud propia era L) ustedes renombren todo para que sea consistente con que las variables primadas sean vistas desde S' y las variables no primadas vistas desde S.

Nuevamente cabe preguntarse algo análogo a lo del problema anterior: ¿Cómo sabemos que la fórmuala correcta es $L = L'/\gamma$ y no $L' = L/\gamma$ Bueno, veamos:

$$\Delta x = \gamma\left(\Delta x' + v\Delta t'\right) \neq \gamma\Delta x' \tag{23}$$

porque $\Delta t' \neq 0$. Fíjense que la "deducción"de la fórmula fue muy sencilla, solamente tomamos la ecuación (10) y usamos que $\Delta t = 0$. Sin embargo, podemos obtener la fórmula de contracción de longitudes usando esa ecuación más la ecuación (9) solamente que es bastante cuentoso, va la deducción por el camino difícil (les recomiendo usar el fácil, pero hacer esta cuenta al menos una vez ayuda a esclarecer mucho el tema).

$$\Delta x = \gamma\left(\Delta x' + v\Delta t'\right) = \gamma\left(\Delta x' + v\gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)\right) = \gamma\left(\Delta x' + v\gamma\left(-\frac{v\Delta x}{c^2}\right)\right) \tag{24}$$

y luego

$$\Delta x = \gamma\left(\Delta x' - \gamma\frac{v^2}{c^2}\Delta x\right) \tag{25}$$

$$\Delta x\left(1 + \gamma^2\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right) = \gamma\Delta x'$$

$$\Delta x\left(1 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right) = \gamma\Delta x'$$

$$\Delta x \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \gamma \Delta x'$$

$$\Delta x \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \gamma \Delta x'$$

$$\Delta x \gamma^2 = \gamma \Delta x' \to \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

que no es más que una manera más difícil de llegar al mismo resultado.

Dicho todo esto vamos ahora sí a los puntos que nos pide el problema.

2.1. Inciso (a)

Del enunciado (¡Ojo que Juan y Pedro cambian de roles en este problema!) podemos escribir que

$$L = \frac{L'}{2} \to \gamma = 2 \tag{26}$$

y luego de manera análoga al problema anterior, obtenemos

$$\boxed{v = \frac{\sqrt{3}}{2} c} \tag{27}$$

2.2. Inciso (b)

La longitud propia de la barra es L', es decir la que ve Juan, ya que en su sistema de referencia, S', la regla está en reposo.