Relatividad Especial

Problema 6.6

El primer inciso de este problema nos propone estudiar la emisión de rayos de luz dentro de un tren que se está moviendo con velocidad $\vec{V}$ = cte respecto a un andén fijo a la Tierra como se muestra en la figura 1. En el segundo inciso los rayos son emitidos desde el andén como en la figura 4. Ya podemos identificar que, en todo el problema, tendremos dos sistemas de referencias relevantes: S, fijo al andén, y S', solidario al tren. Para ambos casos la velocidad del tren respecto al andén es $\vec{V} = V\hat{x}$ con $V > 0$. Los ejes x y x' son paralelos, y apuntan en el mismo sentido, y los ejes y, y' y z, z' coinciden entre sí. En consecuencia las transformaciones de Lorentz directas se leen

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\,(t - \beta x/c) && (1)\\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) && (2)\\ y' &= y && (3)\\ z' &= z\,, && (4) \end{aligned}$$

y las inversas

$$\begin{aligned} t &= \gamma\,(t' + \beta x'/c) && (5)\\ x &= \gamma\,(x' + \beta ct') && (6)\\ y &= y' && (7)\\ z &= z'\,, && (8) \end{aligned}$$

con $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ y $\beta = V/c$. Como siempre, usando estas transformaciones estamos diciendo que el origen de coordenadas de ambos sistemas coinciden[1]. Esto significa que cuando $(t', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$ entonces $(t, x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$. En breve veremos cómo entra esta condición al momento de elegir el lugar físico y el tiempo que representa el origen en cada sistema.

A la hora de resolver **este tipo** de ejercicios de relatividad debemos prestar atención a algunos puntos claves que nos van a ayudar a pensar los problemas. Una vez que tenemos definidos los dos sistemas S y S', es útil listar los eventos físicos relevantes en un cuadro de doble entrada, como el que se muestra abajo[2], que permita ordenar las coordenadas (temporales y espciales) de cada evento tanto en S como en S'. Ejemplos de estos eventos serían: emisión del haz de luz, llegada del haz al detector, etc.

[1] No es estríctamente necesario que los orígenes de ambos sistemas sean iguales, pero eso es lo que asumimos al escribir las transformaciones usuales (1)-(8). En tal caso deberíamos modificar las transformaciones de Lorentz agregándoles una traslación rígida de forma tal de hacer explícita la diferencia entre sus orígenes.

[2] Dado que la velocidad relativa entre sistema es $\vec{V} = V\hat{x}$, las coordenadas y y z no transforman y pueden elegirse iguales en ambos sistemas. Por eso sólo consideramos x y t en el caudro.

	S'		S	
	t'	x'	t	x
Evento 1				
Evento 2				
Evento 3				
Evento 4				
...				

Resolver el problema es básicamente completar este cuadro con las coordenadas a las que sucede cada evento en ambos sistemas. En este punto suele ser conveniente definir que el origen de coordenadas (que ya dijimos que es el mismo en ambos sistemas) coincida con algún evento relevante del problema. Por otra parte y muy importante: casi siempre hay un sistema en el que es mucho más fácil entender qué está pasando y en el cual, probablemente, podamos conocer rápidamente las coordenadas de los eventos. Para completar las coordenadas en el otro sistema usamos las transformaciones de Lorentz directas o inversas dependiendo el caso. Resolvamos el ejercicio que nos reúne.

Inciso a)

El problema nos dice que desde ambos extremos del tren se emiten dos haces de luz hacia el centro y que en algún momento llegan juntos al punto medio. Nos preguntan acerca de cuál fue emitido primero. Entonces, con la ayuda de la figura 1, ya estamos en condiciones de identificar 4 eventos relevantes:

- $A_i \rightarrow$ el haz de luz A, que parte de la cola del tren, es emitido
- $A_f \rightarrow$ el haz de luz A llega al detector del centro del tren
- $B_i \rightarrow$ el haz de luz B, que parte del frente del tren, es emitido
- $B_f \rightarrow$ el haz de luz B llega al detector del centro del tren

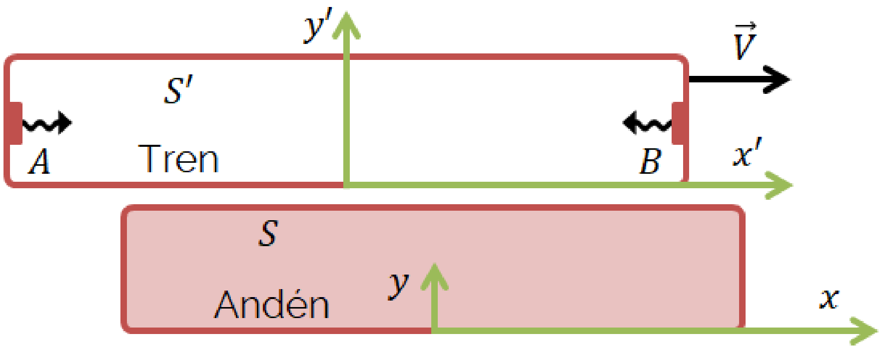

Figura 1: Esquema del inciso a) donde se definen ambos sistemas S', solidario al tren, y S, fijo al andén. En S' la posición $x' = 0$ corresponde con el centro del tren y en S la posición $x = 0$ coincide con el centro del andén.

Estos eventos tendrán coordenadas espacio-temporales que definirán su suceder visto por una observadora en S o en S'. Esta información la vamos a organizar en el Cuadro 1 (en este caso ya está completo pero imaginen que arranca vacío y que vamos completándolo paso a paso).

Empecemos a resolver. Como sabemos que en el instante en el que el centro del tren pasa por el centro del andén, los dos haces emitidos llegan a dicho centro del tren, vamos a definir convenientemente que el centro del tren sea el origen espacial del sistema S' ($x' = 0$) y que el centro del andén sea el origen espacial del sistema S ($x = 0$). A su vez aprovechamos que estos orígenes espaciales coinciden en el instante de arribo de los pulsos de luz al centro del tren, y por eso fijamos ese tiempo en $t' = t = 0$.

¿En qué sistema consideramos que va a ser más simple entender la cinemática? Claro, en el sistema de referencia solidario al tren la cuestión parece más sencilla.

Parémonos en el sistema S' y llamemos L' a la longitud del tren vista desde el mismo S'. Así, la cola del tren se encontrará en $x' = -L'/2$ y el frente en $x' = L'/2$. Por definición sabemos que L' es la longitud propia del tren ya que es la longitud que va a medir un observador que está en reposo con el tren. El dato que nos da el problema **no** es L', sino que es L, la longitud del tren vista por una observadora en el andén fijo a la Tierra (es decir, desde S). Para conectar estas dos cantidades tenemos que recurrir al concepto de contracción de la longitud y longitud propia, o "en reposo", que discutimos y desarrolamos en el ejercicio 6.2. Básicamente habíamos obtenido que la medición de la longitud de un objeto (L') que hace una observadora que se mueve con velocidad $\vec{V}$ respecto a ese objeto será menor (en un factor γ) que la que realiza un observador en reposo respecto al mismo objeto (L). En particular la relación es $L' = \gamma L$.

Sigamos pensando el problema dentro del sistema S'. Como en el estado final ambos haces se encuentran, la posición y tiempo de suceso de los eventos A_f y B_f serán iguales y corresponden con el centro del tren, $x' = 0$, y con el tiempo de llegada que definimos más arriba, $t' = 0$.

A su vez es fácil conocer las posiciones de los eventos A_i y B_i las cuales son $x' = -L'/2 = -\gamma L/2$ (la cola del tren) y $x' = L'/2 = \gamma L/2$ (el frente del tren). Lo que no es inmediato conocer es el tiempo en el que cada haz fue emitido, no obstante sí podemos adelantar que en el sistema S' ambos haces tienen recorridos simétricos.

Veamos, los tiempos de emisión dependerán de la cinemática del movimiento de los pulsos de luz que naturalmente se propagan a velocidad con módulo c. Bien, pero... ¿en

	S'		S	
	t'	x'	t	x
A_i	$-\gamma L/(2c)$	$-\gamma L/2$	$-\gamma^2 L(1+\beta)/(2c)$	$-\gamma^2 L(1+\beta)/2$
A_f	0	0	0	0
B_i	$-\gamma L/(2c)$	$\gamma L/2$	$-\gamma^2 L(1-\beta)/(2c)$	$\gamma^2 L(1-\beta)/2$
B_f	0	0	0	0

Cuadro 1: Tabla de eventos, coordenadas y sistemas de referencia para el inciso a).

qué sistema tienen esa velocidad?. La respuesta es que todo lo que se mueva con velocidad c lo hará con esa misma velocidad en cualqueir sistema de referencia. Por definición la velocidad de la luz c permanece invariante ante las transformaciones de Lorentz. Por lo tanto los haces de luz se propagan con velocidad c en cualquier sistema. No obstante si en vez de haces de luz tuviéramos móviles que se mueven con velocidades menores que c entonces el ejercicio debería especificarnos cuál es la velocidad de dichos móviles en algún sistema de referencia particular. En ese caso la transformación de la velocidad entre un sistema y otro no será trivial (ver problema 6.10[3]).

Volviendo a nuestro ejercicio, el haz A es emitido en un tiempo $t' = t'_{Ai}$ y llega al centro en $t' = t'_{Af} = 0$. Como este haz describe un MRU con velocidad c en sentido positivo sabemos que, en S', debe cumplirse la relación

$$x'_{Af} - x'_{Ai} = +c\,(t'_{Af} - t'_{Ai})\,, \tag{9}$$

con lo cual $t'_{Ai} = -L'/(2c) = -\gamma L/(2c)$. Claramente el tiempo de emisión del haz A tiene que ser menor que el tiempo de llegada del mismo haz A y por eso t'_{Ai} es negativo. Para el haz B es análogo, sólo tenemos que prestar atención a que la velocidad de este pulso tendrá módulo c pero sentido negativo (va desde el frente del tren hacia el centro). Entonces

$$x'_{Bf} - x'_{Bi} = -c\,(t'_{Bf} - t'_{Bi})\,, \tag{10}$$

y así $t'_{Bi} = -L'/(2c) = -\gamma L/(2c)$. La simetría del problema visto desde S' hace que $t'_{Bi} = t'_{Ai}$. Así, ya completamos toda la parte S' del Cuadro 1.

Ahora nos falta encontrar cada una de las coordenadas de los eventos pero en el sistema S. Para eso usamos directamente las transformaciones de Lorentz (inversas) (5)-(6). De antemano sabemos que por cómo definimos los orígenes espacio-temporales en los sistemas S y S', las coordenadas de A_f y B_f en S serán $x = 0$ y $t = 0$. De todas formas no hace falta recordarlo, aplicando las transformaciones sale. Sin embargo, las coordenadas de A_i en S serán

$$\begin{aligned} t_{Ai} &= \gamma(t'_{Ai} + \beta x'_{Ai}/c) = -\gamma^2 L(1+\beta)/(2c), && (11)\\ x_{Ai} &= \gamma(x'_{Ai} + \beta c t'_{Ai}) = -\gamma^2 L(1+\beta)/2. && (12)\end{aligned}$$

Asimismo

$$\begin{aligned} t_{Bi} &= -\gamma^2 L(1-\beta)/(2c), && (13)\\ x_{Bi} &= \gamma^2 L(1-\beta)/2. && (14)\end{aligned}$$

Y así terminamos de completar el Cuadro 1.

En este caso, para comprobar parcialmente que nuestros resultados tienen sentido podemos aplicar la condición $V = 0$, lo cual implica $\beta = 0$ y $\gamma = 1$, en el Cuadro 1 y ver que en ambos sistemas las coordenadas convergen a los mismos valores.

Analicemos cuál es el orden temporal de los eventos en cada sistema. En S' ambos haces de luz se emiten al mismo tiempo. Por el contrario en el sistema S los tiempos

[3] El ejercicio 6.10 es similar al 6.6 pero en vez de rayos de luz con velocidad c, hay personas caminando sobre el tren a velocidad menores que c. En ese caso es necesario indicar qué velocidad tienen esas personas en algún sistema de referencia particular. Vista desde otro sistema, esa velocidad no será igual y su valor estará determinado por las transformaciones de Lorentz sobre la velocidad.

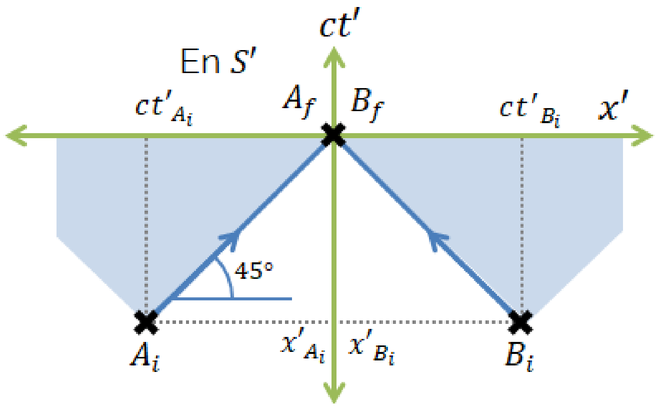

Figura 2: Diagrama de Minkowski para el inciso a) en el sistema S'. Las cruces negra marcan los eventos particulares A_i, A_f, B_i y B_f, las rectas celestes orientadas describen la trayectoria de cada pulso de luz y las zonas sombreadas corresponden con los conos de luz de los eventos A_i y B_i.

iniciales no son iguales, $t_{Ai} \neq t_{Bi}$. En particular es fácil mostrar que, como $0 < \beta < 1$, vale $t_{Ai} < t_{Bi} < 0$. Por ello, visto desde S, el haz A que parte de la cola del tren se emite antes que el haz B que parte del frente.

Mirando el Cuadro 1 observamos que en S' las coordenadas de ambos haces son simétricas porque estamos en reposo respecto del tren. La asimetría entre las coordenadas de los eventos en S se debe exclusivamente al estado de movimiento del tren respecto del andén.

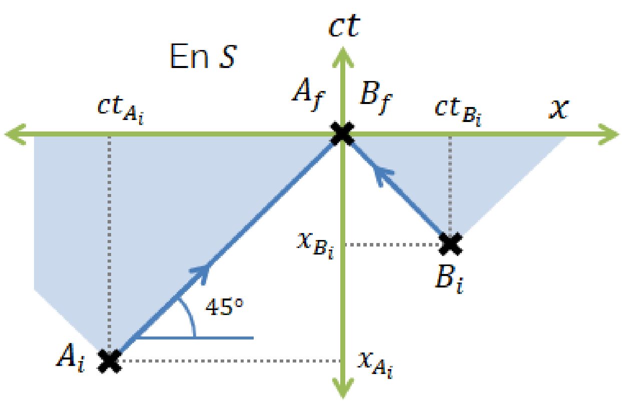

Figura 3: Diagrama de Minkowski para el inciso a) en el sistema S. Descripción idem figura 2.

En las figuras 2 y 3 presentamos los datos del problema en diagramas de Minkowski[4] tanto para S como para S'. En estos diagramas es bastante más claro interpretar las diferencias cinemáticas entre ambos sistemas de referencia. En S' las trayectorias de los rayos son simétricas y naturalmente el encuentro de los fotones se da en el centro del tren. Las trayectorias de los pulsos vistas desde S son asimétricas debido a la velocidad del tren, como nuestra condición fue que el encuentro de los pulsos se de en el mismo

[4]Los diagramas de Minkowski y temas relacionados están desarrollados en el apunte *"Invariancia del intervalo + problemas 6.5 y 6.7"* y en la solución *Problema 6.6 reversionado* ambos en la sección de Relatividad del Campus.

origen espacio-temporal, lo que varía es el tiempo de emisión de cada pulso. A su vez como la velocidad de la luz debe ser de módulo c sin importar el sistema de referencia, esa asimetría en los tiempos de emisión se compensa con un cambio en el espacio recorrido que mide un observador en S. Dado que la velocidad del tren es hacia la derecha el pulso B se emitirá posteriormente al A pero recorrá menor distancia como se ve en la figura 3. Si la velocidad del tren fuera hacia la izquierda el diagrama se invierte.

Inciso b)

Ahora nos proponen que en el instante en que el centro del tren pasa por el centro del andén, se emiten dos pulsos A y B desde los extremos del andén hacia su centro, como se muestra en la figura 4. Nos preguntan cuándo llegan estos haces al centro del tren, no del andén. En este caso los eventos relevantes serán:

- $A_i \rightarrow$ el haz de luz A, que parte del extremo izquierdo del **andén**, es emitido
- $A_f \rightarrow$ el haz de luz A llega al centro del **tren**
- $B_i \rightarrow$ el haz de luz A, que parte del extremo derecho del **andén**, es emitido
- $B_f \rightarrow$ el haz de luz B llega al centro del **tren**.

Confeccionemos el Cuadro 2 (pero vacío) y empecemos a completar cada una de las coordenadas paso a paso.

Nuevamente consideramos los orígenes de modo que $x = 0$ (centro del andén) y $x' = 0$ (centro del tren) coinciden para $t = t' = 0$, como en el inciso a). Bien, pero, ¿en qué sistema empezamos a resolver?.

Veamos, es fácil conocer las coordenadas de los eventos iniciales (A_i y B_i) en el sistema S dado que los pulsos parten desde los extremos del andén en el instante que definimos como $t = 0$. Entonces, usando que L es la longitud propia del andén (es decir, medida desde el mismo sistema del andén), las coordenadas de A_i y B_i quedan $t_{A_i} = t_{B_i} = 0$ con $x_{A_i} = -L/2$ y $x_{B_i} = L/2$.

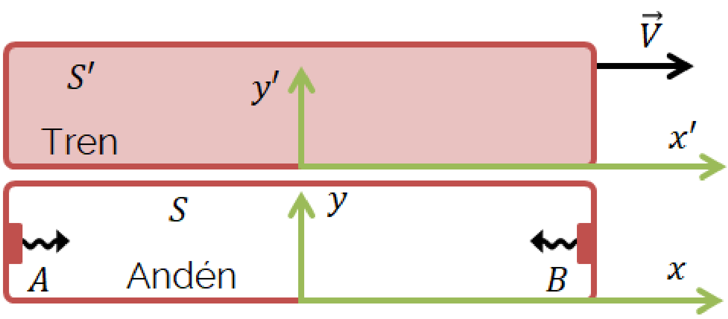

Figura 4: Esquema del inciso b) donde se definen ambos sistemas S', solidario al tren, y S, fijo al andén. En S' la posición $x' = 0$ corresponde con el centro del tren y en S la posición $x = 0$ coincide con el centro del andén.

A partir de acá tenemos dos opciones para completar todos los datos del Cuadro 2:

1) nos mantenemos en S, planteamos el encuentro de cada pulso con el centro del tren para hallar las coordenadas de los eventos finales A_f y B_f en S. Luego transformamos todas las coordenadas a S'

2) pasamos las coordenadas de los eventos iniciales A_i y B_i a S', planteamos un MRU para cada pulso hasta que llegan a $x' = 0$ (centro del tren) y obtenemos las coordenadas finales en S'. Luego las transformamos al sistema S

De cualquier forma vamos a llegar al mismo resultado. En esta ocasión optamos por la opción 1). En S sabemos que cada pulso de luz recorrerá dos trayectorias en MRU para $t > 0$ dadas por

$$x_A(t) = +c(t - t_{A_i}) + x_{A_i} = +c\,t - L/2 \tag{15}$$
$$x_B(t) = -c(t - t_{B_i}) + x_{B_i} = -c\,t + L/2. \tag{16}$$

Por otra parte para conocer la posición del centro del tren vista desde S simplemente recordamos que el tren se mueve con una velocidad relativa $\vec{V}$ y que sus orígenes espaciales ($x = x' = 0$) coinciden a tiempo cero ($t = t' = 0$), entonces

$$x_{\mathrm{CT}}(t) = V\,t. \tag{17}$$

Fíjense que esto no es más que reemplazar $x' = 0$ en la transformación de Lorentz (2).

Las coordenadas de los eventos finales A_f y B_f salen del encuentro de cada puslo A y B con el centro del tren. Es decir igualando las ecuaciones (15)↔(17) y (16)↔(17) respectivamente. Para el caso del pulso A obtenemos

$$x_A(t_{A_f}) = x_{\mathrm{CT}}(t_{A_f}) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t_{A_f} = L/(2c\,(1-\beta)) \\ x_{A_f} = x_A(t_{A_f}) = \beta L/(2\,(1-\beta)) \end{cases} . \tag{18}$$

Para B

$$x_B(t_{B_f}) = x_{\mathrm{CT}}(t_{B_f}) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t_{B_f} = L/(2c\,(1+\beta)) \\ x_{B_f} = x_B(t_{B_f}) = \beta L/(2\,(1+\beta)) \end{cases} . \tag{19}$$

	S’		S	
	t'	x'	t	x
A_i	$\gamma\beta L/(2c)$	$-\gamma L/2$	0	$-L/2$
A_f	$\gamma L(1+\beta)/(2c)$	0	$L/(2c\,(1-\beta))$	$\beta L/(2\,(1-\beta))$
B_i	$-\gamma\beta L/(2c)$	$\gamma L/2$	0	$L/2$
B_f	$\gamma L(1-\beta)/(2c)$	0	$L/(2c\,(1+\beta))$	$\beta L/(2\,(1+\beta))$

Cuadro 2: Tabla de eventos, coordenadas y sistemas de referencia para el inciso b).

Ya tenemos todas las coordenadas en el sistema S, usando las transformaciones de Lorentz directas (1)-(2) completamos todo el Cuadro 2. Hacemos la transformación de dos coordenadas a modo de ejemplo. El tiempo del evento inicial B_i será

$$t'_{B_i} = \gamma(t_{B_i} - \beta x_{B_i}/c) = -\frac{\gamma\beta L}{2c} \tag{20}$$

y la posición del evento final A_f será

$$x'_{A_f} = \gamma(x_{A_f} - \beta c t_{A_f}) = \gamma\left(\frac{\beta L}{2(1-\beta)} - \beta c \frac{L}{2c(1-\beta)}\right) = 0\,. \tag{21}$$

Intuitivamente la pregunta i) es que el pulso B llega al centro del tren antes que el pulso A. Miramos el Cuadro 2 y corroboramos que en ambos sistemas se cumple que

$$t_{B_f} < t_{A_f} \tag{22}$$
$$t'_{B_f} < t'_{A_f}, \tag{23}$$

pues $0 < \beta < 1$. Esto es razonable ya que, partiendo del centro del andén, el centro del tren se desplaza hacia la derecha alejándose del lugar de emisión de A y acercándose al de B. Es importante considerar que β es positivo porque en caso contrario el tren se desplaza hacia la izquierda y los resultados se invierten. La respuesta ii) está en el Cuadro 2.

Para la última respuesta iii) vamos volcar los datos del Cuadro 2 en un diagrama de Minkowski para el sistema S y otro para el S'. Empecemos con la figura 5 donde se muestra el diagrama según un observador en S. La trayectoria de los pulsos de luz A y B es completamente simétrica. Ambos haces se emiten en simultáneo y evolucionan hacia el centro del andén con velocidad $\pm c$. Por ello las pendientes de dichas rectas en el diagrama tienen una inclincaión de 45 grados. Los eventos finales serán posteriores a $t = 0$ y como la velocidad del tren es hacia la derecha primero ocurre B_f y luego A_f. Notemos que la pendiente de la trayectoria del centro del tren tiene una inclinación respecto de la vertical

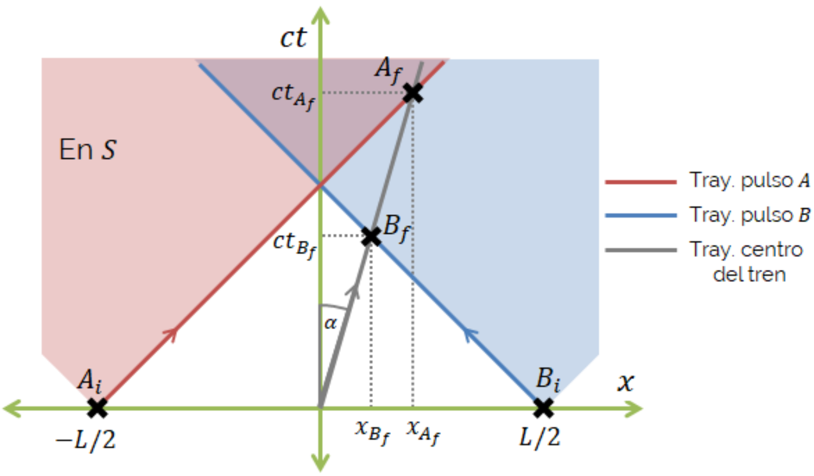

Figura 5: Diagrama de Minkowski para el inciso b) en el sistema S. Referencias de las rectas en la imagen. El ángulo $\alpha = \arctan\beta$, $\alpha \to 0$ para $\beta = V/c \to 0$ y $\alpha \to \pi/4$ para $\beta \to 1$. Las zonas sombreadas roja y azul son los conos de luz futuros de los eventos A_i y B_i respectivamente.

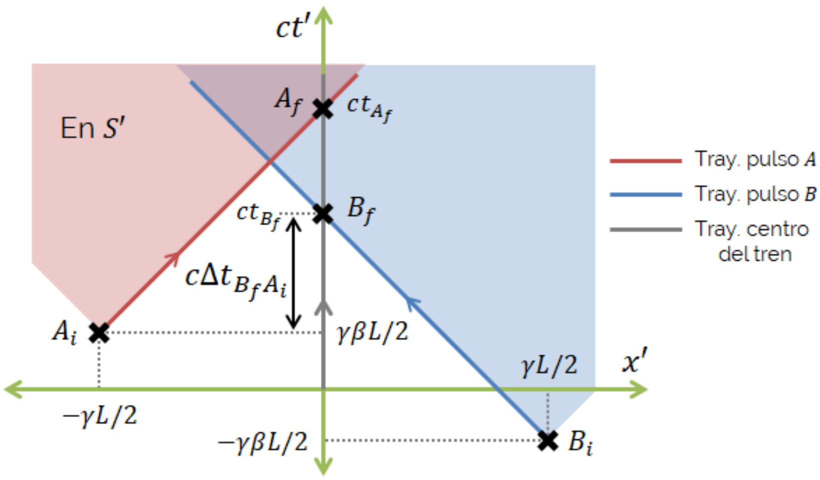

Figura 6: Diagrama de Minkowski para el inciso b) en el sistema S'. Descripción idem figura 5.

$\alpha = \arctan\beta$ con $0 \leq \beta < 1$. Si $\beta = 0$, el tren está en reposo y su centro es siempre el centro del andén. Si $\beta \to 1$ entonces vemos que el tiempo en el que ocurre B_f tiende a $L/(4c)$ y el de A_f diverge. Por otra parte si $\beta < 0$ (tren hacia la izquierda) el orden temporal de A_f y B_f se invierte.

En la figura 6 se muestra el diagrama que corresponde al sistema S'. Acá el movimiento de los pulsos no es simétrico pero la trayectoria del centro del tren es trivial $x' = 0$. Notemos que el orden temporal de los eventos aquí es un poco más intrincado. Veamos, según el esquema tal y como está ocurre B_i, A_i, B_f y luego A_f. No obstante en el diagrama se eligió algún valor de $\beta = V/c$ particular dentro del rango $0 \leq \beta < 1$. Analicemos qué podría cambiar para distintos β's en el rango mencionado (para que el tren se mueva siempre hacia la derecha). Está claro que siempre va a suceder primero B_i y luego B_f (¿seguro?, ¿por qué?), y lo mismo para A_i y A_f. A su vez como $\beta \geq 0$ B_i ocurre antes que A_i, y B_f antes que A_f (ver figura 6 y Cuadro 2). Una pregunta no trivial posible podría ser si B_f ocurre antes o después que A_i. Más concretamente la cuestión sería si el $\Delta t'_{B_f A_i} = t'_{B_f} - t'_{A_i}$ que se muestra en la figura 6 puede tomar valores tanto positivos como negativos. Hagamos la cuenta

$$t'_{B_f} - t'_{A_i} = \frac{\gamma L}{2c}(1 - 2\beta), \tag{24}$$

con lo cual vemos que la respuesta depende de β. En consecuencia, el orden temporal será

$$B_i \to A_i \to B_f \to A_f \qquad \text{si} \qquad 0 < \beta < 1/2 \tag{25}$$

$$B_i \to B_f \to A_i \to A_f \qquad \text{si} \qquad 1/2 < \beta < 1\,. \tag{26}$$

Si $\beta = 0$, A_i y B_i ocurren en simultáneo y luego A_f y B_f también son simultáneos. Si $\beta = 1/2$ primero ocurre B_i, luego A_i y B_f son simultáneos y por último A_f.

Como último comentario. Ya mencionamos que suena sensato justificar que la emisión de un pulso debe ser anterior a su llegada a cualquier sitio, en principio, para no romper la causalidad del Universo. Insisto con la pregunta, ¿hay alguna forma de saltearse este impedimento?. Tal vez podamos pedirle a alguno de los seres vivos de la imagen que nos de una pista...


$M = \frac{c^2 V_s}{2G}$
$1/4\pi\varepsilon_0$ – const
$dV = 4\pi r^2$
$G_{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$