Física 1, primer cuatrimestre de 2020: Problema 6.10

Ignacio Perito (iperito@df.uba.ar)

Acá va la resolución del problema 10 de la guía de relatividad especial. Este problema está simpático porque requiere, en más de una oportunidad, transformar velocidades entre distintos sistemas de referencia. Ahora, como todos los movimientos involucrados en este problema son rectilíneos y uniformes, esta transformación de velocidades se puede hacer *a mano*, lo cual es una buena alternativa en caso de que no recordemos la fórmula de transformación de velocidades que obtuvieron en la teórica. Para no repetir treinta veces la misma cuenta, veamos cómo es esto de obtener la transformación de velocidades para movimientos rectilíneos y uniformes una única vez y después aplicamos el resultado cuando lo necesitemos en el problema.

De nuevo, ustedes en la resolución podrían haber usado directamente la fórmula de transformación de velocidades, o hacer la derivación *a mano* en cada caso. Ambas alternativas son correctas también, pero aprovechemos estas notas para repasar ese truco.

1. Transformando las velocidades

Supongamos que tenemos un sistema inercial $\mathcal{S}$ y otro sistema, $\mathcal{S}'$ que se mueve con velocidad constante de módulo $v\hat{e}_x$ con respecto al primero. Supongamos también que el/la observadorx en $\mathcal{S}$ ve a un objeto describiendo un movimiento rectilíneo y uniforme con velocidad $u\hat{e}_x$[1]. La pregunta que nos interesa responder es cuánto vale u', es decir, la velocidad del mismo objeta pero medida por el/la observadorx en $\mathcal{S}'$.

Ahora bien, en $\mathcal{S}'$ el objeto **también** realiza un movimiento rectilíneo y uniforme[2], por lo que podemos calcular la velocidad u' simplemente como el cociente entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo entre dos puntos **cualquiera** de su trayectoria, los que nos resulten más cómodos. Si estamos lo suficientemente despiertos, nos avivamos de que resulta útil hacer coincidir el origen espacio-temporal de ambos sistemas con algún evento perteneciente a la línea de mundo del objeto. Es decir, tenemos que el objeto pasa por $(0,0,0,0)$ en ambos sistemas. Un rato después, digamos τ', el/la observadorx en $\mathcal{S}'$ verá que el objeto está en alguna posición

[1]Este tipo de ejercicios son una orgía de velocidades, así que es sano fijar alguna notación para evitar confusiones. En este caso, voy a usar siempre letras v para referirme a las velocidades **entre sistemas de referencia** y letras u para referirme a las velocidades de los objetos **con respecto a los sistemas de referencia**.

[2]¿Por qué? ¿Qué contradicción hallaríamos si este no fuese el caso?

ℓ'. Tenemos entonces que, en $\mathcal{S}'$, el objeto pasa también por $(c\tau', \ell', 0, 0)$. Si llamamos τ y ℓ a las coordenadas espacio-temporales **del mismo evento** pero medidas por el/la observadorx en $\mathcal{S}$, tenemos que las transformaciones de Lorentz vinculan ambos pares de coordenadas según:

$$\begin{aligned} c\tau' &= \gamma \left(c\tau - \beta\ell\right) \ , \\ \ell' &= \gamma \left(\ell - \beta c\tau\right) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Dado que estamos buscando $u' = \frac{\ell'}{\tau'}$, dividimos las dos ecuaciones anteriores:

$$u' = \frac{\ell'}{\tau'} = c\frac{(\ell - \beta c\tau)}{(c\tau - \beta\ell)} = c\frac{\left(\frac{\ell}{\tau} - \beta c\right)}{\left(c - \beta\frac{\ell}{\tau}\right)} = \frac{c(u - \beta c)}{c\left(1 - \frac{\beta\ell}{c\tau}\right)} \ . \tag{2}$$

Ahora bien, $\frac{\ell}{\tau}$ no es otra cosa que u (la velocidad del objeto medida desde $\mathcal{S}$) y $\beta c = v$ (la velocidad relativa entre los sistemas), entonces:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}} \ , \tag{3}$$

que es la fórmula de transformación de velocidades que ya obtuvieron en la teórica. De nuevo, es importante tener bien en claro qué significa cada ingrediente en la ecuación anterior y, sobre todo, saber diferenciar entre las velocidades relativas entre los sistemas y las velocidades de los objetos cuya física estamos intentando describir **desde** dichos sistemas de referencia.

2. Problema 6.10

Ahora sí, al ejercicio. En principio tenemos dos sistemas de referencia relevantes (pueden aparecer más): llamaremos $\mathcal{S}$ al sistema fijo al andén y $\mathcal{S}'$ al sistema fijo al tren. El tren se mueve con velocidad constante *hacia la derecha* con respecto al andén y tomaremos al eje $\hat{e}_x$ apuntando en dicha dirección. Hay dos pasajerxs en el tren, una de ellas, que llamaremos M. Bregman (o simplemente MB) se mantiene siempre en la zona izquierda del mismo y el otro, A. Olmedo (o simplemente HDP[3]), se mueve siempre desde el centro hacia la derecha.

2.1. Inciso (a)

En el sistema fijo al tren, es sencillo describir lo que está pasando en este inciso. Tenemos que las velocidades de lxs pasajeros resultan:

$$\vec{u}'_{MB} = -\frac{c}{2}\hat{e}_x \quad , \quad \vec{u}'_{HDP} = \frac{c}{2}\hat{e}_x \ . \tag{4}$$

[3]Honorable diputado del PRO... no sean mal pensadxs.

Si ponemos el origen de tiempo y espacio en el evento en el cual comienzan a caminar desde el centro, es fácil ver que las coordenadas espacio-temporales de sus respectivas llegadas a los extremos del tren son, en este sistema:

$$\mathbf{llegada}_{MB}{}' = \left(L, -\frac{L}{2}, 0, 0\right) \quad , \quad \mathbf{llegada}_{HDP}{}' = \left(L, \frac{L}{2}, 0, 0\right) , \tag{5}$$

pues recorren una distancia $L/2$ a una rapidez $c/2$ (y recordar que a la coordenada temporal siempre la multiplicamos por c). Desde luego, las llegadas de lxs pasajerxs a los respectivos extremos del tren son simultáneas en el sistema $\mathcal{S}'$.

Para responder la pregunta sobre cómo es la velocidad de ambos pasajerxs con respecto al andén, podríamos transformar Lorentz los eventos de llegada y el evento salida $(0, 0, 0, 0)$ y ver qué pasa en $\mathcal{S}$; pero esto no es otra cosa que lo que ya hicimos en el caso general en la introducción... así que vamos directo a la fórmula. Estamos transformando al sistema andén que, respecto del tren, se mueve con velocidad $-V$, así que hay que tener cuidado de cambiar el signo de la velocidad relativa en (3). Lo que queda es:

$$u_{MB} = \frac{u'_{MB} + v}{1 + \frac{vu'_{MB}}{c^2}} = \frac{-\frac{c}{2} + v}{1 - \frac{v}{2c}} \quad , \quad u_{HDP} = \frac{u'_{HDP} + v}{1 + \frac{vu'_{HDP}}{c^2}} = \frac{\frac{c}{2} + v}{1 + \frac{v}{2c}} . \tag{6}$$

Para responder la pregunta sobre los tiempos de legada en el andén, simplemente transformamos las coordenadas (ojo con el signo de β en las transformaciones, estamos escribiendo las coordenadas sin primar en términos de las primadas... si no recuerdan bien esto, a revisar el apunte anterior) y obtenemos:

$$ct_{\mathbf{llegada}(MB)} = \gamma\left(L - \frac{\beta L}{2}\right) \quad , \quad ct_{\mathbf{llegada}(HDP)} = \gamma\left(L + \frac{\beta L}{2}\right) , \tag{7}$$

y, como es de esperar, en el sistema fijo al andén, MB llega antes que el HDP.

2.2. Inciso (b)

Nos piden la velocidad de unx de lxs pasajerxs con respecto al otrx. No especifican cual, pero el problema es análogo en ambos casos. Calculemos la velocidad de MB con respecto al HDP[4]. En este punto resulta útil definir un nuevo sistema de referencia fijo al HDP, el cual llamaremos $\mathcal{S}''$. Nuestro objetivo entonces es calcular u''_{MB}. La clave está en ser ordenadxs: en este caso, tenemos la velocidad de MB con respecto a $\mathcal{S}'$ y además sabemos cómo se mueve $\mathcal{S}''$ con respecto a $\mathcal{S}'$, así que es un simple ejercicio de transformación de velocidades **entre esos**

[4]Recerden. Esta oración se lee "calculemos la velocidad de M. Bregman con respecto al honorable diputado del PRO". No quiero que me saquen de contexto después

dos sistemas. Lo importante es no hacerse lío y entender que, en este inciso, lo que pasa en el andén no juega ningún rol relevante. La velocidad relativa entre $\mathcal{S}''$ y $\mathcal{S}'$ es $\frac{c}{2}\hat{e}_x$, por lo que la fórmula de transformación de velocidades nos dice en este caso que:

$$u''_{MB} = \frac{u'_{MB} - \frac{c}{2}}{1 - \frac{u'_{MB}}{2c}} = \frac{-\frac{c}{2} - \frac{c}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{4c}{5}\,, \tag{8}$$

es decir, desde el punto de vista del HDP, MB se mueve hacia la izquierda con una velocidad que es $\frac{4}{5}$ de la velocidad de la luz. Notar la clara diferencia con el caso galileano, que nos hubiese arrojado que el módulo de la velocidad relativa entre los pasajerxs es exactamente c lo cual, como saben, sería un absurdo: si MB se moviese a la velocidad de la luz con respecto al HDP, debería moverse a la velocidad de la luz con respecto a cualquier sistema de referencia, y sabemos que no es así.

2.3. Inciso (c)

En este caso lxs pasajerxs comienzan a moverse (a $t' = 0$) desde los extremos hacia el centro. Los eventos de salida y llegada en el sistema $\mathcal{S}'$ son fáciles de escribir:

$$\begin{aligned} \textbf{salida}_{MB}{}' &= \left(0, -\frac{L}{2}, 0, 0\right) \quad , \quad \textbf{llegada}_{MB}{}' = (L, 0, 0, 0)\ , \\ \textbf{salida}_{HDP}{}' &= \left(0, +\frac{L}{2}, 0, 0\right) \quad , \quad \textbf{llegada}_{HDP}{}' = (L, 0, 0, 0)\ . \end{aligned} \tag{9}$$

Con esos eventos ya queda respondida la pregunta sobre en qué instante llegan al centro para unx observadorx fijx a $\mathcal{S}'$ y la respuesta es que llegan a $t' = L/c$. Para responder la misma pregunta desde la perspectiva de unx observadorx fijx a $\mathcal{S}$, transformamos:

$$ct_{\textbf{llegada}(MB)} = \gamma L \quad , \quad ct_{\textbf{llegada}(HDP)} = \gamma L\,, \tag{10}$$

donde vemos que, aunque el valor de la coordenada temporal cambie, el encuentro **sigue siendo simultáneo** en el sistema fijo al andén, lo cual es más que razonable, pues es justamente un encuentro. El ejercicio no lo pide, pero lo que deja de ser simultáneo en este caso para unx observadorx fijx al andén es **la salida** de lxs pasajerxs desde sus respectivos extremos del tren.

Para sacar las velocidades respecto al andén, vamos a la ya vieja y querida fórmula de transformación de velocidades en su versión *inversa*:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu}{c^2}}\,, \tag{11}$$

reemplazando las velocidades de cada pasajerx en el sistema $\mathcal{S}'$ ($u'_{MB} = \frac{c}{2}$ y $u'_{HDP} = -\frac{c}{2}$) y haciendo un poco de álgebra obtenemos:

$$u_{MB} = \frac{\frac{c}{2} + v}{1 + \frac{v}{2c}} = \frac{c}{2}\frac{(1 + 2\beta)}{\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)}\,, \tag{12}$$

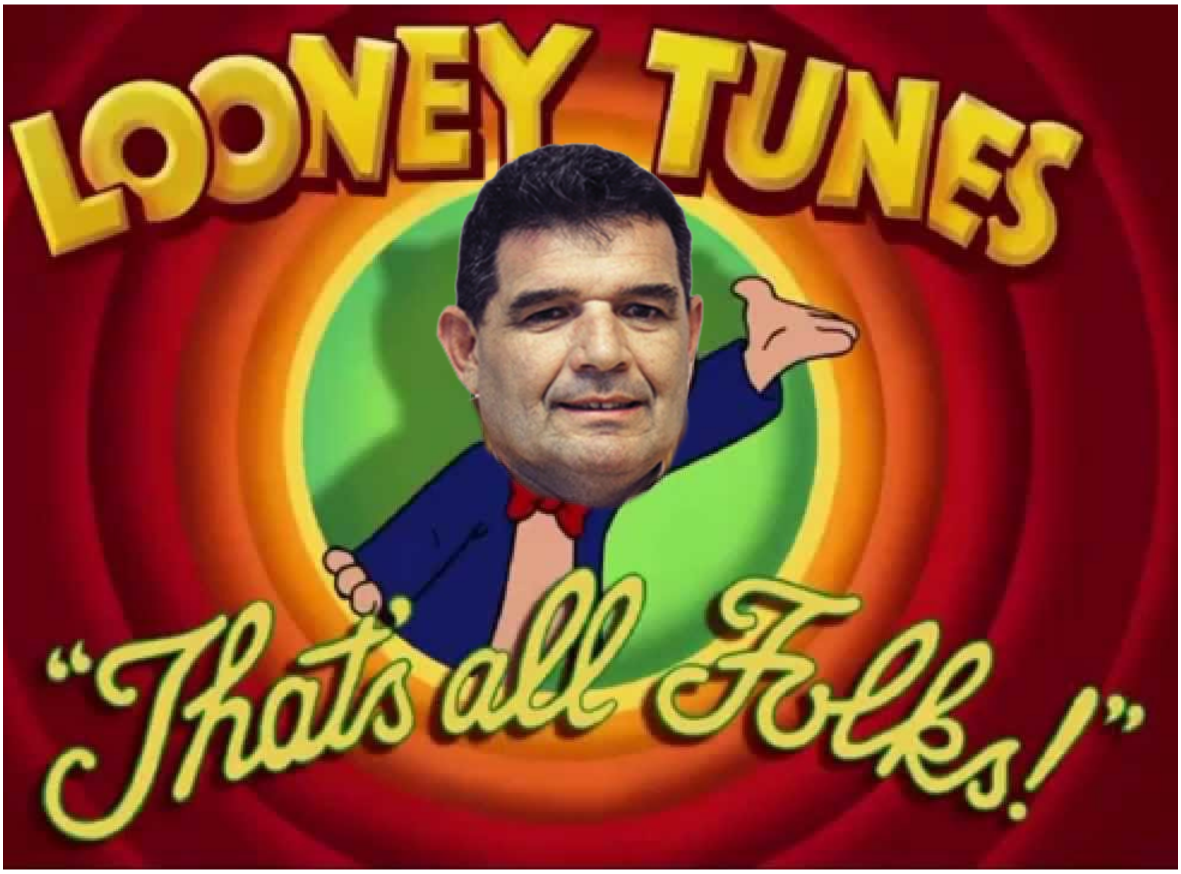
donde el último factor común lo sacamos para que sea simple ver dos casos límite: cuando $\beta \to 0$ (el tren anda despacito) tenemos que la velocidad de MB respecto al andén tiende a $\frac{c}{2}$; y cuando $\beta \to 1$ (el tren se mueve casi a la velocidad de la luz), la velocidad de MB con respecto al anden tiende a c, y todo bajo control. Para sacar u_{HDP} se procede exactamente igual, lo obviamos para no escribir tanto.

2.4. Inciso (d)

La idea de este inciso es la misma que la del inciso (b), sólo que ahora cambian los signos de las velocidades. Si llamamos nuevamente $\mathcal{S}''$ al sistema fijo al HDP, tenemos que la velocidad relativa entre $\mathcal{S}''$ y $\mathcal{S}'$ (el tren) es ahora $-\frac{c}{2}$ [5]. La velocidad de MB respecto a $\mathcal{S}'$ es ahora $\frac{c}{2}$ [6] y la fórmula de transformación nos dice en este caso:

$$u''_{MB} = \frac{u'_{MB} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{u'_{MB}}{2c}} = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4c}{5}\,, \tag{13}$$

lo cual era de esperar, puesto que la situación es exactamente la misma que en el inciso (b) pero habiendo invertido el signo de la velocidad relativa entre lxs pasajerxs.



[5] Miralo al HDP moviéndose a la izquierda, eh...
[6] Oh, no, Myriam. Yo confié en tí.