Física 1, segundo cuatrimestre de 2020. Transformaciones de Lorentz e invariancia del intervalo. Problemas 6.5 y 6.7

Ignacio Perito (iperito@df.uba.ar)

Acá va la clase de hoy pasada en limpio. Empezaremos con una pequeña comparación entre las transformaciones de Galileo y las de Lorentz; luego veremos la definición del intervalo y la demostración de que resulta invariante ante estas últimas. Finalmente resolveremos dos problemas re divertidos de la guía de relatividad especial, que además nos van a ayudar a interpretar y sacarle provecho a la noción de intervalo.

1. Invariantes galileanos e invariantes relativistas

Una buena forma de perderle el miedo a las tenebrosísimas transformaciones de Lorentz es manteniendo siempre en mente algún tipo de paralelismo con las simpatiquísimas transformaciones de Galileo. Vamos a considerar dos sistemas de referencia: $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$. Hay, básicamente, tres razones por las cuales dos sistemas de referencia **inerciales** podrían no coincidir, a saber:

- Que haya movimiento relativo entre ellos. Por ejemplo, si $\mathcal{S}$ es el kiosco de Cabildo y Juramento[1] y $\mathcal{S}'$ es el 168 pisteando por Cabildo como un campeón.
- Podría no haber movimiento relativo entre los sistemas pero que sus orígenes no coincidan. Por ejemplo, si $\mathcal{S}$ es de nuevo el kiosco del ítem anterior y $\mathcal{S}'$ la pizzería que está en frente. Notar que la diferencia entre los orígenes de ambos sistemas puede ser tanto espacial, como claramente sucede en el ejemplo mencionado, pero también temporal[2].
- No sucede ninguna de las anteriores pero los sistemas están rotados entre sí. Por ejemplo, tanto $\mathcal{S}$ como $\mathcal{S}'$ están adentro del kiosco y alinean $\hat{e}_z = \hat{e}_{z'}$ con la vertical, pero la dirección $\hat{e}_x$ apunta hacia Cramer, mientras que la/el otrx pibx eligió $\hat{e}_{x'}$ apuntando hacia la estación Barrancas.

Desde luego, dos sistemas de referencia podrían diferir no sólo en uno de esos tres items si no en cualquier combinación de ellos en simultáneo Lo importante es que en la discusión

[1] O *Jurabildo*. como algunxs seres del mal suelen referirse a dicha esquina.

[2] $\mathcal{S}$ podría haber fijado el valor de su variable temporal a cero en el nacimiento de un carpintero hace dos mil años y $\mathcal{S}'$ podría haberlo hecho en un instante más significativo, como el gol de Loeschbor a Vélez en el 2001.

que sigue nos centraremos **sólo** en el primer caso, es decir, consideraremos dos sistemas de referencia $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ cuyos orígenes espacio-temporales son los mismos (lo que uno llama $t = 0$ y $\vec{r} = \vec{0}$ coincide con lo que el otro llama $t' = 0$ y $\vec{r}' = \vec{0}$) y que no están rotados entre sí (las direcciones cartesianas de ambos sistemas coinciden). Supondremos también que la velocidad relativa entre ambos sistemas es un vector constante, puesto que nos interesa estudiar leyes de transformación de coordenadas **entre sistemas de referencia inerciales**[3]. Dado que la velocidad entre los sistemas es un vector constante y los ejes de ambos coinciden, no perdemos ninguna generalidad en asumir que la velocidad de $\mathcal{S}'$ con respecto a $\mathcal{S}$ se escribe $\vec{v} = v\hat{e}_x$[4]. La figura 1 esquematiza la situación que nos compete.

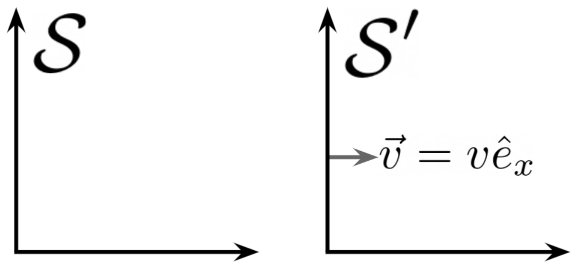


Figura 1: Esquema de la relación entre los sistemas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$.

La razón por la cual focalizaremos nuestra atención en el primer tipo de transformaciones es porque, como veremos en un ratito, son las únicas cuyo efecto sobre las coordenadas resulta sustancialmente distinto en el caso relativista y en el no relativista.

[3] Obviamente, también estamos suponiendo que uno de ellos es inercial. ¿Cómo sabemos que uno de ellos es inercial? Porque se mueve con velocidad constante con respecto a otro sistema inercial, desde luego.

[4] En Wikipedia pueden encontrar el caso en que la velocidad relativa tiene componentes no nulas en las tres direcciones. Dado que no lo vamos a usar en estas notas, lo obviamos para aligerar la notación.

1.1. Las transformaciones de Galileo y sus invariantes

Tenemos entonces un sistema $\mathcal{S}'$ que se mueve con velocidad $\vec{v} = v\hat{e}_x$ con respecto al sistema $\mathcal{S}$ y sabemos que a $t = t' = 0$ ambos orígenes coinciden. Galileo, tipo criterioso, nos dejó dicho que la ley de transformación entre las coordenadas de ambos sistemas está dada por:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt\,, \\ y' &= y\,, \\ z' &= z\,, \\ t' &= t\,, \end{aligned} \tag{1}$$

ecuaciones con las que es imposible no estar de acuerdo después de reflexionar un poco sobre la situación física que estamos describiendo: las transformaciones de Galileo no deberían sorprender a nadie. Las ecuaciones anteriores indican cómo se relacionan las coordenadas espaciales y temporales de dos sistemas de referencia cuando vale el principio de adición de velocidades de Galileo (el mismo que usamos durante toda la primera parte de la materia).

Es sencillo ver que la distancia y el intervalo de tiempo entre dos sucesos se mantienen constantes ante las transformaciones de Galileo, es decir, valen las igualdades:

$$\Delta x'^{\,2} + \Delta y'^{\,2} + \Delta z'^{\,2} = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad , \quad \Delta t' = \Delta t \tag{2}$$

para cualquier par de *eventos*[5]. Sin meternos en la matemática, es muy fácil ver que las transformaciones de los otros dos ítems de la primera carilla (traslaciones en el espacio y/o en el tiempo; y rotaciones) también mantienen invariantes estas dos cantidades. El conjunto de todas las transformaciones de Galileo (la que discutimos aquí, más las otras dos) deja entonces invariante la distancia y los intervalos de tiempo. Tal vez sin declararlo explícitamente, hicimos uso de estas dos verdades una cantidad incontable de veces en la primera mitad de la materia.

1.2. Las transformaciones de Lorentz y sus invariantes

Si aceptamos el perturbador[6] hecho de que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales, está claro que la ley de adición de velocidades de Galileo, al menos en el caso general, queda obsoleta. Como vieron en la teórica, unx puede buscar (y encontrar) un conjunto de transformaciones lineales que relacionen las coordenadas de $\mathcal{S}'$ y las

[5] Un *evento* es cualquier suceso físico que sucede en algún lugar del espacio y en un instante determinado.

[6] Bueno, no es **tan** perturbador.

de $\mathcal{S}$ respetando la invariancia de la velocidad de la luz. Estas resultan:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma\left(ct - \beta x\right) \,, \\ x' &= \gamma\left(x - \beta ct\right) \,, \\ y' &= y \,, \\ z' &= z \,, \end{aligned} \tag{3}$$

donde c es la velocidad de la luz, $\beta \equiv \frac{v}{c}$ y $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. La razón por la cual multiplicamos por c a la relación entre los tiempos es puramente estética (de esta forma, las ecuaciones quedan muy simétricas y simpáticas). Las transformaciones inversas, como también vieron, se obtienen simplemente cambiando el signo de la velocidad:

$$\begin{aligned} ct &= \gamma\left(ct' + \beta x'\right) \,, \\ x &= \gamma\left(x' + \beta ct'\right) \,, \\ y &= y' \,, \\ z &= z' \,. \end{aligned} \tag{4}$$

No hay que estar muy despiertx ni muy sobrix para detectar que si estas son las leyes de transformación, ya no hay ninguna chance de que ambos sistemas estén de acuerdo a la hora de medir distancias o intervalos de tiempo; lo cual era más que esperable, puesto que partimos de la inquietante suposición de que existe una velocidad que resulta invariante al ir de un sistema de referencia inercial a otro. Como ya vieron en la teórica, estas transformaciones coinciden con las transformaciones (1) en el límite de bajas velocidades ($\beta \to 0$); lo cual **tiene que pasar**, porque sabemos que las transformaciones de Galileo andan joya en nuestro universo cotidiano.

1.2.1. El intervalo

Que las distancias y los intervalos de tiempo no sean invariantes cuando pasamos de un sistema de referencia inercial a otro en el contexto de la relatividad especial no quiere decir que no existan nociones absolutas en el marco de esta teoría[7], como algunxs divulgadorxs poco informados en relatividad especial nos quisieron hacer creer. De hecho, **toda la maldita teoría se construye a partir de la hipótesis de que existe algo que no es relativo**: la velocidad de la luz. Si unx mira con un poco de cariño, durante un rato largo, las transformaciones de Lorentz, puede pensar en otra cantidad, *prima hermana* de la noción de distancia en el caso Galileano, que resulta invariante en este caso. En relatividad especial, definimos el intervalo

[7]No. Einstein jamás dijo que todo es relativo. Dejemos de replicar esa gilada.

entre dos eventos según[8]:

$$\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \,, \tag{5}$$

donde, para fijar ideas, podemos pensar que lo definimos usando las coordenadas en $\mathcal{S}$; aunque, como veremos enseguida, da lo mismo qué coordenadas hayamos usado. Si queremos ver cómo luce esta cantidad cuando la quiere calcular la/el pibx paradx en el sistema $\mathcal{S}\,'$, nos ayudamos con las transformaciones de Lorentz, que nos dicen que:

$$\begin{aligned} c\Delta t &= \gamma \left(c\Delta t' + \beta \Delta x' \right) \,, \\ \Delta x &= \gamma \left(\Delta x' + \beta c \Delta t' \right) \,, \\ \Delta y &= \Delta y' \,, \\ \Delta z &= \Delta z' \,, \end{aligned} \tag{6}$$

lo que nos permite escribir:

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= \gamma^2 \left(c\Delta t' + \beta \Delta x' \right)^2 - \gamma^2 \left(\Delta x' + \beta c \Delta t' \right)^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\ &= \gamma^2 \left(c^2 \Delta t'^2 + 2\beta c \Delta t' \Delta x' + \beta^2 \Delta x'^2 \right) - \gamma^2 \left(\Delta x'^2 + 2\beta c \Delta x' \Delta t' + \beta^2 c^2 \Delta t'^2 \right) - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\ &= c^2 \Delta t'^2 \gamma^2 \left(1 - \beta^2 \right) - \gamma^2 \Delta x'^2 \gamma^2 \left(1 - \beta^2 \right) - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\ &= c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = \Delta s'^2 \,, \end{aligned}$$

donde en la anteúltima igualdad hicimos uso del reconfortante (y muy útil en los problemas de relatividad especial) hecho de que $\gamma^2 \left(1 - \beta^2\right) = 1$. Lo que muestra la orgía descontrolada de símbolos matemáticos anterior es que el intervalo es una cantidad invariante ante transformaciones de Lorentz[9]; es decir, su valor es el mismo al calcularlo en cualquier sistema de referencia inercial. Aquí es importante mencionar que las otras dos transformaciones que mencionamos al principio de estas notas (traslaciones fijas y rotaciones) funcionan igual en este contexto que en el caso no relativista; es decir, no alteran distancias ni intervalos de tiempo **por separado**. Así que es muy sencillo ver que el intervalo, así como lo definimos, también se mantiene invariante ante ese tipo de transformaciones.

En resumen, el conjunto de todas las transformaciones de Galileo está compuesto por aquellas que preservan distancias e intervalos de tiempo; mientras que el conjunto de todas las transformaciones de Lorentz está dado por todas las que preservan el intervalo. Como dijimos al principio, las traslaciones y las rotaciones se tratan de la misma forma en el marco relativista y en el no relativista. Por eso es que sólo nos centramos en el caso en que los sistemas de referencia difieren debido a la existencia de movimiento relativo entre ellos.

[8] En algunos lugares van a encontrarlo definido con el signo al revés. Es una cuestión puramente convencional.

[9] Aquí lo hicimos para el caso particular en que la velocidad relativa entre los sistemas de referencia está sólo en la dirección $\hat{e}_x$ pero, como es de esperar, el resultado se extiende fácilmente al caso general.

Antes de pasar a los ejercicios, miremos un poco más de cerca a la cantidad que acabamos de definir. A diferencia de lo que usualmente entendemos por una *distancia*, el intervalo involucra una diferencia entre dos cantidades positivas, así que es fácil imaginarse situaciones en las cuales el intervalo resulta negativo y otras en las que resulta positivo. Como veremos ahora, el signo del intervalo contiene un montón de información física sobre la relación entre los dos eventos para los cuales está siendo calculado. Supongamos que calculamos el intervalo entre dos eventos y resulta **negativo**, esto quiere decir que los dos eventos son tales que:

$$c^2\Delta t^2 < \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \Rightarrow c\,|\Delta t| < \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\,, \tag{7}$$

lo cual significa que la distancia entre los dos eventos, $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, es mayor que la distancia que la luz es capaz de recorrer en el intervalo de tiempo que los separa, es decir, $c\,|\Delta t|$. Cuando esto sucede, decimos que los dos eventos están *espacialmente separados*. Dos eventos que están espacialmente separados no pueden estar conectados causalmente porque sabemos que la velocidad de la luz es una cota superior para la velocidad en la que cualquier tipo de información puede transmitirse. Como veremos en un rato, el orden temporal entre dos eventos separados espacialmente es relativo a la/el observadorx: siempre podemos encontrar sistemas de referencia donde el evento que nos apetezca suceda primero, o incluso sistemas de referencia en los cuales ambos eventos suceden simultáneamente.

Siguiendo la misma idea, cuando el intervalo es positivo tendremos que:

$$c\,|\Delta t| > \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\,, \tag{8}$$

en cuyo caso decimos que los eventos están *temporalmente separados*. Cuando este es el caso, la luz tiene tiempo suficiente para conectar ambos eventos y, por lo tanto, *podría* existir conexión causal entre los mismos. Desde luego, la palabra *podría* es muy importante en la última oración: la separación temporal es una condición necesaria pero no suficiente para que los eventos estén vinculados causalmente.

Finalmente, cuando el intervalo es igual a cero tenemos:

$$c\,|\Delta t| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\,, \tag{9}$$

y en este caso decimos que los eventos están separados por un rayo de luz, puesto que la distancia entre los mismos es exactamente la que la luz recorre en el intervalo de tiempo que los separa. Nuevamente, en este caso *podría* haber conexión causal entre los eventos.

2. Problema 6.5

En este problema nos encontramos con dos sistemas de referencia igualitos a los que estuvimos describiendo en la introducción anterior. Nos dan las coordenadas espacio-temporales de dos eventos en uno de ellos y nos preguntan cosas. Antes de avanzar, un poco de notación: dado un evento **P** cualquiera, vamos a agrupar las coordenadas espacio-temporales del mismo en un único vector de cuatro componentes según: $\mathbf{P} = (ct_{\mathbf{P}}, x_{\mathbf{P}}, y_{\mathbf{P}}, z_{\mathbf{P}})$[10], donde damos por supuesto que estamos escribiendo las coordenadas en el sistema $\mathcal{S}$. Para referirnos **al mismo** evento desde $\mathcal{S}'$, escribiremos $\mathbf{P}' = (ct'_{\mathbf{P}}, x'_{\mathbf{P}}, y'_{\mathbf{P}}, z'_{\mathbf{P}})$.

En este caso, nos dan las coordenadas espacio-temporales de dos eventos, **A** y **B**, en el sistema $\mathcal{S}$; y son: $\mathbf{A} = (0, 0, 0, 0)$ y $\mathbf{B} = (cT, L, 0, 0)$; donde T y L son parámetros fijos. El ejercicio asocia dichos eventos con *una partícula pasando por* $\vec{r} = 0$ *a* $t = 0$ *y otra partícula (o tal vez la misma) pasando por* $\vec{r} = L\hat{e}_x$ *a* $t = T$, pero creo que resulta más enriquecedor pensarlos simplemente como dos eventos arbitrarios sin asociarles, en principio, ninguna realización física concreta. En fin, vamos a las cuentas.

2.1. Inciso (a)

No hay demasiado para decir acá, simplemente tomamos las coordenadas en $\mathcal{S}$ de cada evento y averiguamos las otras usando las transformaciones de Lorentz. Para el evento **A** la situación es sencilla: dado que (6) se trata de una transformación lineal, el origen va a parar al origen; así que $\mathbf{A}' = (0, 0, 0, 0)$. Esto no tiene nada de misterioso ya que, sin importar qué sea el evento **A**, siempre podemos arreglárnosla para que dos sistemas de referencia lo tengan en el origen, tanto espacial como temporal... lo interesante aparece cuando empezamos a mirar otros eventos con coordenadas no nulas. Para el otro evento, las transformaciones de Lorentz arrojan: $\mathbf{B}' = (\gamma(cT - \beta L), \gamma(L - \beta cT), 0, 0)$.

2.2. Inciso (b)

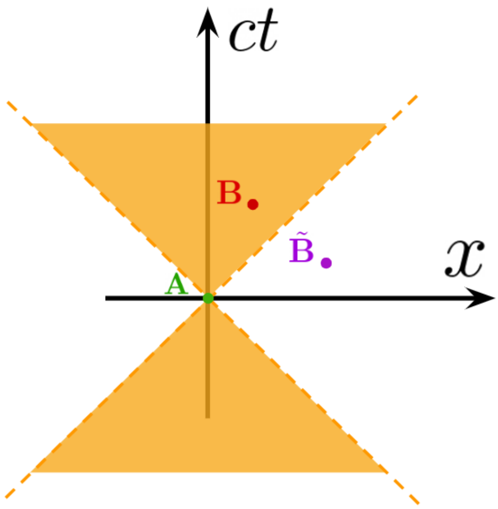
En este inciso nos interesa determinar bajo qué condiciones los dos eventos podrían estar causalmente conectados. Como vimos, el signo del intervalo está directamente relacionado con esto. Dado que es un invariante, da lo mismo en qué sistema lo calculemos, así que lo hacemos

[10] A veces, en la bibliografía, van a encontrar que se usa x_1, x_2 y x_3 para referir a las coordenadas espaciales y x_0 para referirnos al tiempo multiplicado por la velocidad de la luz. Es sólo una convención, pero trata de poner de manifiesto el hecho de que en relatividad especial el tiempo y el espacio están algo así como *en igualdad de condiciones*. Usen la que más les guste.

en el sistema $\mathcal{S}$ que es más cómodo. Si miramos las coordenadas de los eventos **A** y **B** en este sistema, tenemos que $\Delta t = T$, $\Delta x = L$ y $\Delta y = \Delta z = 0$. El intervalo es entonces:

$$\Delta s^2 = cT^2 - L^2 \,. \tag{10}$$

De la última expresión vemos que si $c\,|T| \geq |L|$, el intervalo resulta mayor o igual a cero y los eventos están separados temporalmente (o por un rayo de luz en el caso de la igualdad), en cuyo caso los eventos podrían estar conectados causalmente. Por otro lado, si $c\,|T| < |L|$, los eventos están separados espacialmente y no puede haber conexión causal entre ellos. La figura 2 muestra un diagrama espacio-tiempo (o *diagrama de Minkowski*[11]) que esquematiza esta distinción de una manera bastante simpática. Dado un evento cualquiera en el espacio-tiempo, definimos *el cono de luz* de dicho evento como el conjunto de todos los eventos que están separados temporalmente del mismo. Es decir, el cono de luz de un evento **P** está formado por todos los eventos, ya sean pasados o futuros, que podrían tener conexión causal con **P**. Asimismo, aquellos eventos que están fuera del cono de luz de **P** están, necesariamente, desconectados causalmente de este último. En un diagrama espacio-tiempo como este, la tangente a la trayectoria[12] (en este contexto se suele decir *línea de mundo*) de cualquier partícula o entidad física que porte información de cualquier tipo, **no puede** formar un ángulo menor a 45^o con la horizontal en ningún punto, pues esto significaría que la velocidad de este objeto superó a la de la luz.



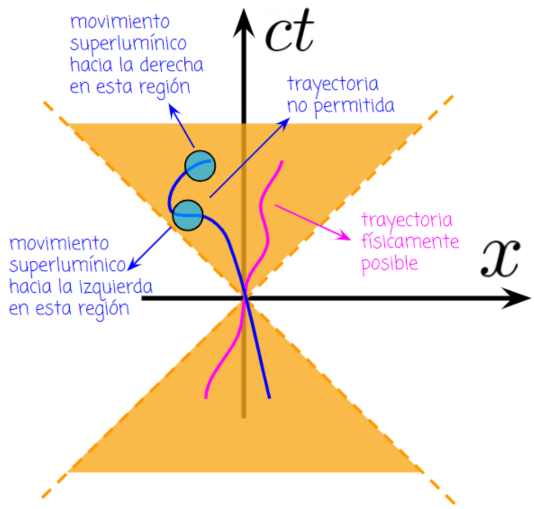


Figura 2: Diagramas de Minkowski. En el de la izquierda tenemos, en verde, el evento A y su cono de luz, cuyos bordes están dados por las rectas de pendiente ± 1. En rojo un evento **B** en **posible** relación causal con **A** y en violeta un evento $\tilde{\mathbf{B}}$ desconectado causalmente de **A**. El diagrama de la derecha ilustra la cuestión de las trayectorias que son físicamente razonables y las que no.

[11]Estoy bastante seguro de que el nombre se debe al personaje de Lost.

[12]Puede resultarles extraño que usemos la palabra *trayectoria* si estamos hablando de un diagrama que involucra al tiempo; pero no olviden que en este marco teórico, el tiempo es una coordenada y **no** un parámetro.

2.3. Inciso (c)

En este inciso tenemos que suponer que $T > 0$, lo cual es decir que en el sistema $\mathcal{S}$ tenemos que el evento **B** sucede después que el evento **A**; y la pregunta es si existen sistemas de referencia donde este orden se vea alterado. Antes de hacer cuentas, está claro que si uno de los eventos está en el cono de luz del otro, no deberíamos poder encontrar un sistema de referencia donde el orden de los eventos cambie, puesto que si **A** es la causa de **B**, sería poco serio que nuestra teoría prediga que existen sistemas de referencia donde **B** sucede antes que **A**. Ahora bien, en el caso en que los eventos están espaciados espacialmente, el orden de los mismos no tiene, en principio, nada de especial; por lo que no deberíamos alarmarnos si en este caso encontramos sistemas donde la cronología se invierta. Por comodidad en las cuentas, también supondremos que L es positivo (no se pierde nada de generalidad en esta suposición).

Si volvemos sobre las coordenadas de los eventos en el sistema $\mathcal{S}'$, vemos rápidamente que el intervalo de tiempo entre los mismos es:

$$\Delta t' = t'_{\mathbf{B}} - t'_{\mathbf{A}} = \gamma \left(T - \frac{\beta L}{c} \right) . \tag{11}$$

Si $\Delta t' > 0$, tenemos que el orden de los eventos es el mismo en el sistema $\mathcal{S}'$. Dado que γ es una cantidad positiva, para que el orden de los eventos se altere necesitamos entonces que:

$$T - \frac{\beta L}{c} \leq 0 \, . \tag{12}$$

Si vale la igualdad, tendremos que los dos eventos suceden simultáneamente en $\mathcal{S}'$, mientras que si vale el menor estricto, el orden de los eventos será inverso en dicho sistema. En la ecuación anterior, la elección del sistema de referencia está codificada en el valor de β (nos dice qué tan rápido -y en qué sentido- se está moviendo $\mathcal{S}'$ con respecto a $\mathcal{S}$), por lo que podemos decir que el orden de los eventos se verá alterado si:

$$\beta \geq \frac{cT}{L} \, . \tag{13}$$

Ahora bien, β es el cociente entre v (la velocidad relativa entre los sistemas) y la velocidad de la luz, por lo que es una cantidad menor a 1. En el caso en que los eventos están separados temporalmente, teníamos que $cT > L$, por lo que el cociente en el lado derecho de (13) es mayor a 1 y por ende no es posible hallar un sistema de referencia donde el orden de los eventos se vea alterado, como bien habíamos sospechado hace un ratito. Cuando los eventos están separados espacialmente, $\frac{cT}{L}$ es menor a 1 y podemos encontrar un β que logre el objetivo. En este caso, si la velocidad relativa entre los sistemas es tal que $\beta = \frac{cT}{L}$, entonces los eventos serán simultáneos en $\mathcal{S}'$. Si la velocidad es mayor aún que dicho valor, el/la observadorx en $\mathcal{S}'$ ¡ve que el evento

B sucede antes que el evento **A**! Pintoresco. Lo que deja en evidencia este inciso es el famoso hecho de que la simultaneidad es una noción relativa y depende del sistema de referencia.

La discusión anterior también tiene un correlato simpático en los diagramas de Minkowski. Si escribimos una versión diferencial de las transformaciones de Lorentz, tenemos:

$$cdt' = c\gamma dt - \gamma\beta dx \quad , \quad dx' = \gamma dx - \gamma\beta cdt\,, \tag{14}$$

de donde podemos obtener una expresión para las curvas de nivel de tiempos primados constantes y posiciones primadas constantes en términos de las coordenadas sin primar. Es decir:

$$\begin{aligned} cdt' = 0 \Leftrightarrow cdt = \beta dx\,, \\ dx' = 0 \Leftrightarrow dx = \beta cdt\,, \end{aligned} \tag{15}$$

por lo que las curvas de tiempos primados constantes corresponden a rectar de pendiente $1/\beta$ en el diagrama de Minkowski del sistema $\mathcal{S}$; mientras que las curvas de posiciones primadas constantes corresponden a rectas de pendiente β en dicho diagrama. La figura 3 hace uso de esta información para ilustrar cómo es posible encontrar un sistema de referencia donde los eventos sean simultáneos y otro donde el orden se invierta en el caso en el cual están separados espacialmente. También muestra por qué es imposible encontrar un sistema que altere el orden cuando los eventos tienen separación temporal.

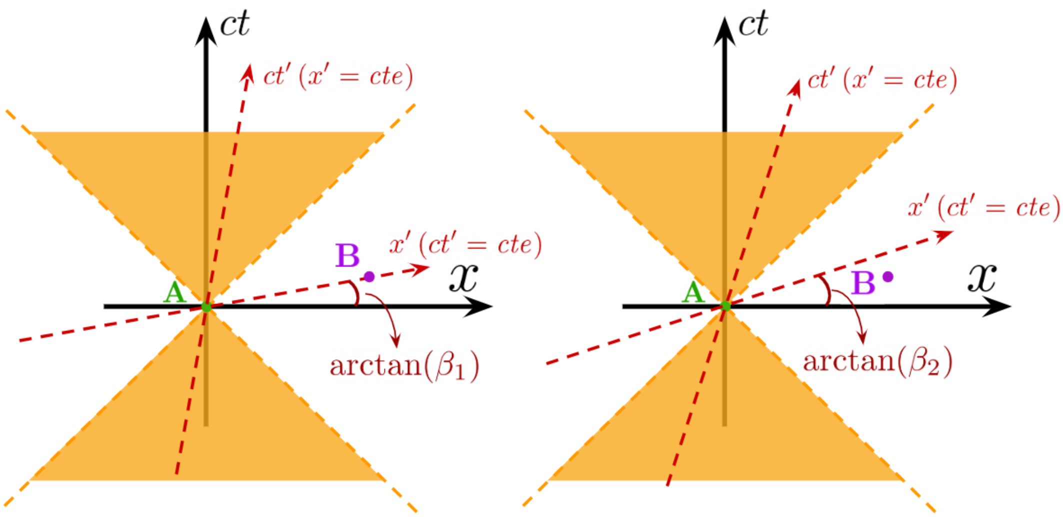


Figura 3: Diagramas de Minkowski en $\mathcal{S}$ para el caso en que los eventos **A** y **B** están causalmente desconectados. Las líneas rojas punteadas muestran cómo se ven los ejes del sistema $\mathcal{S}'$ en el sistema $\mathcal{S}$. A la izquierda, la velocidad entre los sistemas es tal que los eventos resultan simultáneos en $\mathcal{S}'$. A la derecha, la velocidad es aún mayor ($\beta_2 > \beta_1$) y lxs observadorxs en $\mathcal{S}'$ ven que el evento **B** sucede primero. En el límite en que $\beta \to 1$ (la velocidad relativa entre los sistemas tiende a c), las curvas de $t' = cte$ forman un ángulo de 45^o con la horizontal, lo cual deja claro por qué no podemos encontrar sistemas de referencia donde el orden se vea alterado cuando **B** está dentro del cono de luz de **A**.

3. Problema 6.7

En este problema tenemos un colectivo de longitud propia L acercándose en movimiento rectilíneo uniforme con velocidad de módulo $\frac{\sqrt{3}c}{2}$ (ligerito andaba el bondi) a un garage de longitud propia $\frac{L}{2}$. Nos dicen que en cada extremo del garage hay puertas pero, por motivos puramente pedagógicos, las reemplazaremos por guillotinas.

3.1. Inciso (a)

Si llamamos $\mathcal{S}$ al sistema de referencia fijo al garage, $\mathcal{S}'$ al sistema de referencia fijo al colectivo y alineamos la velocidad de este último con el eje $\hat{e}_x$, entonces este problema se ajusta perfectamente al tipo de situación que estuvimos describiendo en la introducción (y también en el problema anterior). Es decir, tenemos un colectivo ($\mathcal{S}'$) avanzando hacia *la derecha* con velocidad constante con respecto al garage ($\mathcal{S}$).

Cuando nos preguntan si el colectivo puede quedar completamente contenido dentro del garage, lo que nos están preguntando es si unx observadorx fijx con respecto al garage (es decir, en $\mathcal{S}$) puede ver al colectivo completamente contenido dentro del garage. Para ello, es importante calcular cuál es el tamaño del colectivo para dichx observadorx. Es un cálculo que ya hicieron en la teórica, pero nunca está de más repasarlo. Para ello, tengamos en cuenta que una de las transformaciones de Lorentz nos dice que:

$$x' = \gamma(x - \beta ct)\,, \tag{16}$$

donde γ y β son datos (en breve los calcularemos explícitamente). Medir el tamaño del colectivo en el sistema $\mathcal{S}$ significa calcular la separación espacial entre sus extremos **en un mismo instante de tiempo**. Esto último es importantísimo, porque en el sistema $\mathcal{S}$ el colectivo se mueve: si nos fijamos dónde está ahora su parte trasera y pasado mañana dónde está su parte delantera, la distancia entre esos puntos nada va a tener que ver con la longitud del objeto. Llamemos x_{cola} a la posición de la cola del colectivo y x_{trompa} a la posición de la trompa del colectivo. Si escribimos la relación (16) para cada una de estas posiciones **en un instante dado** y las restamos, obtenemos:

$$x'_{trompa} - x'_{cola} = \gamma(x_{trompa} - x_{cola})\,, \tag{17}$$

donde los términos con el tiempo se cancelaron en la resta por ser iguales. El miembro izquierdo no es otra cosa que la longitud del colectivo medida en $\mathcal{S}'$ (en este caso, no es importante si medimos las posiciones de la cola y la trompa en distintos instantes, puesto que el colectivo está en reposo en dicho sistema). Tenemos entonces:

$$\Delta x'_{bondi} = \gamma \Delta x_{bondi} \,, \tag{18}$$

donde $\Delta x'_{bondi}$ y Δx_{bondi} son las longitudes del colectivo en el sistema $\mathcal{S}'$ y $\mathcal{S}$ respectivamente. La expresión anterior no es otra cosa que la fórmula de contracción de longitudes que ya derivaron en la teórica. Ahora bien, el lado izquierdo de la última expresión es la longitud propia del colectivo, que es un dato del problema y vale L. Además, sabemos que $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo que $\gamma = 2$. Concluímos finalmente que:

$$\frac{L}{2} = \Delta x_{bondi} \,, \tag{19}$$

es decir, la longitud del colectivo, medida por el/la pibx que está mirando el espectáculo sentadx en el garage, es $\frac{L}{2}$. Dado que el garage mide exactamente eso, esta persona verá, en un momento dado, que el colectivo cabe perfectamente en el mismo.

3.2. Inciso (b)

Este inciso, más que una consigna a resolver, es una invitación a pensar. El quilombo que aparecerá en estos párrafos lo vamos a resolver recién en el último inciso del problema.

Recién vimos que, desde el punto de vista de unx observadorx en el garage, el colectvio cabe perfectamente en el mismo. Ahora bien, no es necesario hacer ninguna cuenta para saber que alguien que está arriba del colectivo jamás podría estar de acuerdo con tal afirmación. Si somos pasajerxs del colectivo, estamos en $\mathcal{S}'$ y el largo del colectivo es L (su longitud propia); y nos estamos acercando a un garage cuya longitud propia es $\frac{L}{2}$. Debido a que el garage se mueve con respecto a nosotrxs (lxs pasajerxs), tenemos que considerar la correspondiente contracción de Lorentz, por lo que la longitud del garage, desde nuestro punto de vista, es **aún menor** que $\frac{L}{2}$. De hecho, repitiendo un argumento similar al del inciso anterior, es fácil ver que la longitud del garage, visto desde el sistema fijo al colectivo resulta:

$$\Delta x'_{garage} = \frac{1}{\gamma} \Delta x_{garage} = \frac{L}{4} \,. \tag{20}$$

donde hemos usado el dato de que $\Delta x_{garage} = \frac{L}{2}$, es decir, la longitud propia del garage es $\frac{L}{2}$.

Tenemos entonces que lxs pasajerxs se acercan a un garage que mide la cuarta parte que el colectivo en el que se encuentran viajando. La supuesta paradoja empieza asomarse y la mencionamos hace un ratito: desde el punto de vista de lxs pasajerxs, no hay ninguna chance de que el colectivo quepa en el garage. Es posible que muchxs no encuentren demasiado paradójica esta situación... y acá es cuando las guillotinas vienen a exhibir toda su importancia pedagógica.

Supongamos que la persona que está en reposo en el garage tiene acceso a un botón que le permite bajar ambas guillotinas cuando le apetezca. Imaginemos también que las guillotinas son lo suficientemente pulentas como para destrozar todo a su paso y que el bondi está hasta las manos de gente. **Esto se va a descontrolar.**

A la persona que está en el garage le gusta la adrenalina pero no quiere lastimar a nadie. Hizo las cuentas y sabe que que en un dado instante, el colectivo estará perfectamente contenido en el garage... así que apretará el botón en ese preciso momento y nadie debería salir lastimadx... ¿o sí? Si en el sistema $\mathcal{S}'$ el colectivo no entra en el garage, ¿cómo es posible que nadie termine descuartizadx? ¿La gente sobrevive en $\mathcal{S}$ pero muere en $\mathcal{S}'$? ¿Por qué será, por qué será... que, estando la vaca atada, el ternero no se va?

Ahora en serio, si nuestra teoría predice que alguien sale muerto del garage en un sistema de referencia pero ileso en el otro: nuestra teoría es una falopeada. La relatividad especial no es ninguna falopa[13] y, como veremos en el próximo inciso, no existe tal paradoja: todxs sobreviven en ambos sistemas de referencia. Antes de hacer ninguna cuenta, vale recordar que la simultaneidad es una noción relativa y, por ende, si la bajada de las guillotinas es simultánea en el garage, es de esperar que no lo sea en el sistema de referencia fijo al colectivo... la solución a la aparente paradoja vendrá por ahí.

3.3. Inciso (c)

Para tratar de entender la situación traumática por la que pasan lxs pasajerxs del bondi, conviene primero determinar los eventos relevantes de este problema en el sistema fijo al garage y luego usar las transformaciones de Lorentz para ver cómo se describen dichos eventos en $\mathcal{S}'$.

Tomaremos el origen espacial del sistema $\mathcal{S}$ (o sea, $x = 0$) en la puerta de entrada al garage y fijaremos $t = 0$ en el instante en el/la maniáticx activa el sistema de guillotinas. La figura 4 esquematiza esta situación. Tenemos entonces dos eventos relevantes: un evento **A** que corresponde a la llegada de la trompa del colectivo a la salida del garage y un evento **B** que corresponde a la llegada de la cola del colectivo a la entrada del garage. En $\mathcal{S}$, ambos eventos

[13]Podrá ser difícil, bizarra, falopa... pero nunca pseudociencia.

suceden a $t = 0$ y las coordenadas espaciales son $x_{\mathbf{A}} = \frac{L}{2}$ y $x_{\mathbf{B}} = 0$. En dicho instante, el colectivo queda perfectamente contenido entre ambas guillotinas y todxs están a salvo.

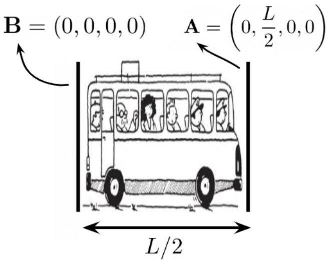


Figura 4: Instante de la bajada simultánea de ambas guillotinas en el sistema $\mathcal{S}$ fijo al garage.

Usando las transformaciones de Lorentz, podemos averiguar las coordenadas de los eventos $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$ (es decir, los mismos eventos de recién pero descritos desde el colectivo). El evento $\mathbf{B}$ tiene todas sus coordenadas nulas así que, al transformar via Lorentz, obtenemos $\mathbf{B}' = (0,0,0,0)$. Para el otro, tenemos:

$$ct'_{\mathbf{A}} = -\gamma\beta\frac{L}{2} = -\frac{\sqrt{3}L}{2} \quad , \quad x'_{\mathbf{A}} = \gamma\frac{L}{2} = L\,, \tag{21}$$

donde ya vemos que, como esperábamos, $t'_{\mathbf{A}} \neq t'_{\mathbf{B}}$ y por ende la bajada de las guillotinas no es simultánea en $\mathbf{S}'$. En efecto, lo que tenemos es que a $t' = -\frac{\sqrt{3}L}{2c}$, la trompa del colectivo llega a la salida del garage (y se baja la correspondiente guillotina) y, un rato después, a $t'_{\mathbf{B}} = 0$, la cola del colectivo termina de entrar en el garage. Esta situación está ilustrada en la figura 5.

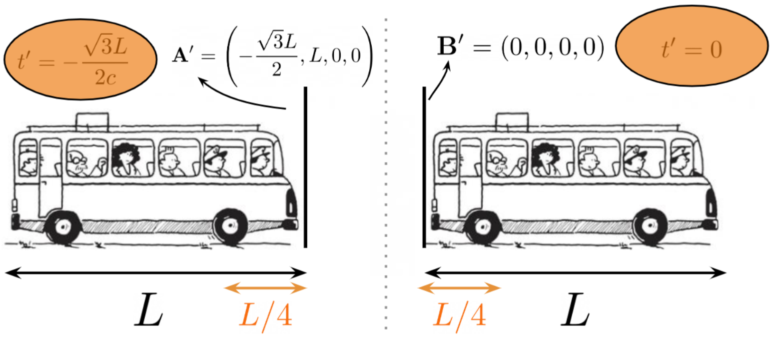


Figura 5: Situación en el sistema fijo al bondi. A la izquierda, el instante en el que se baja la primera guillotina y, a la derecha, la otra. En naranja las dimensiones del garage y la hora en el sistema $\mathcal{S}'$.

A modo de cierre, notar que lo que sucede en el sistema fijo al colectivo, una vez calculada la contracción del garage, lo podríamos haber obtenido fácilmente usando argumentos de cinemática: tenemos un objeto de longitud L (el colectivo) en reposo y otro objeto de longitud $L/4$ (el garage) que se aproxima hacia el primero con velocidad $-\frac{\sqrt{3}c}{2}\hat{e}_x$: a partir de acá, sacar el intervalo de tiempo entre la bajada de las guillotinas resulta un problema cualunque de movimiento rectilíneo uniforme. Les queda a ustedes chequear esto.