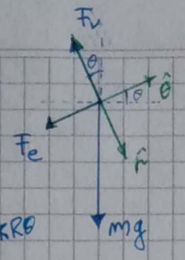
Problema 1

DCL



$\hat{r}$) $mg\cos\theta - F_v = -mR\dot{\theta}^2$

$\hat{\theta}$) $-mg\,\text{sen}\,\theta - KR\theta = mR\ddot{\theta}$

a)

$F_e = -K\left(R\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) - l_0\right)$

$F_e = -K\left(\frac{R\pi}{2} + R\theta - \frac{R\pi}{2}\right) = -KR\theta$

b) $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) + \theta_{eq} \Rightarrow \theta(t) - \theta_{eq} = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

$\dot{\theta}(t) = -\omega\,\theta_0\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$

$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\theta}(t) = -\omega^2\left[\theta(t) - \theta_{eq}\right]$

θ_{eq} donde $\ddot{\theta} = 0$ y como $\theta_0 = \pi/20 \ll 1 \Rightarrow \text{sen}\,\theta \simeq \theta$

$\dot{\theta}(t=0) = 0 \Rightarrow -\omega\,\theta_0\,\text{sen}(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$\theta(t=0) = \theta_0 \Rightarrow \theta(t=0) = \theta_0 \cos(\varphi) + \theta_{eq}$

de $-mg\,\text{sen}\,\theta - KR\theta = mR\ddot{\theta}$ sale que

$\ddot{\theta} = 0$ solo si $-mg\,\text{sen}\,\theta = KR\theta$ y se cumple en $\theta = 0$

luego $\theta_{eq} = 0$ y $\theta_0 = \pi/20$

Busco ω^2 a partir de $mR\ddot{\theta} + mg\,\text{sen}\,\theta + KR\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\,\text{sen}\,\theta + \frac{K}{m}\,\theta = 0$ uso que $\text{sen}\,\theta \simeq \theta$

$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} + \frac{K}{m}\right)\theta = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{R} + \frac{K}{m}$

y queda $\theta(t) = \pi/20 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R} + \frac{K}{m}}\; t\right)$

c) En un sistema no inercial, aparece $F^* = mA$ en $\hat{x}$

$F^*_\theta = F^* \cos\theta = mA\cos\theta$

$F^*_r = F^*\,\text{sen}\,\theta = mA\,\text{sen}\,\theta$

La nueva ecuación de movimiento será:

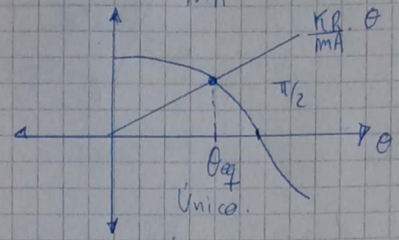
$mR\ddot{\theta} + mg\,\text{sen}\,\theta + KR\theta - mA\cos\theta = 0$ divido por mA

$\frac{R}{A}\ddot{\theta} + \frac{g}{A}\,\text{sen}\,\theta + \frac{KR}{mA}\,\theta - \cos\theta = 0$ uso que $\frac{g}{A} \simeq 0$

$\frac{R}{A}\ddot{\theta} = \cos\theta - \frac{KR}{mA}\,\theta$

Los puntos de equilibrio son aquellos donde $\ddot{\theta}(\theta_{eq}) = 0$
es decir, donde $\cos\theta = \frac{KR}{mA}\theta$

Gráficamente:



$f(\theta) = \frac{R}{A}\ddot{\theta}$

$f(\theta) = \cos\theta - \frac{KR}{mA}\theta$

$f'(\theta) = -\operatorname{sen}\theta - \frac{KR}{mA} \Rightarrow f'(\theta_{eq}) < 0$ porque $\operatorname{sen}\theta \geq 0 \;\forall\, \theta \in [0, \pi/2]$

por lo tanto hay un único θ_{eq} y es estable.