Física 1 - Turno A - 1erC 2020 - DF-FCEyN, UBA

Luciano Andrés Masullo

lmasullo@df.uba.ar

Problema 13.1: Polea real o Máquina de Atwood

En este problema vamos a resolver el caso de la polea *real* o mejor dicho más realista en comparación con la polea *ideal* que vimos en la Guía 2. También se la llama *Máquina de Atwood*[1] Vamos a ver cómo en el límite en el que la masa de la polea tiende a cero recuperamos los resultados de la polea de masa despreciable (por ejemplo Problema 2.4).

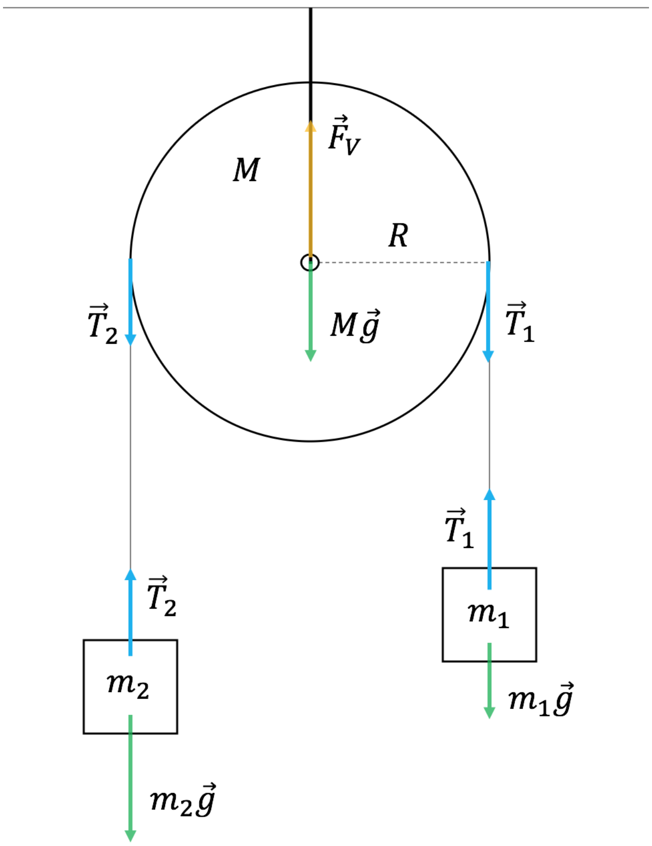

Figura 1: Esquema de la polea real y su diagrama de fuerzas y torques.

Primero vamos a empezar planteando el DCL del sistema (Figura 1). Luego escribiremos las ecuaciones de Newton de **traslación** y de **rotación**. Empecemos por las ecuaciones de traslación.

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i^{ext} = M\vec{A}_{CM}} \tag{1}$$

[1]Se la llama así en honor a George Atwood que diseñó este experimento para enseñar las Leyes de Newton en Inglaterra en el siglo XVIII.

Para la polea es fácil, ya que no se traslada su centro de masa CM porque está sostenida y agarrada al techo:

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}_v + M\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = M\vec{A}_{CM} = 0 \tag{2}$$

y su movimiento será rotación pura respecto del CM. Para las masas, como son masas puntuales es todo calcado de la Guía 2, las ecuaciones resultan:

$$1)\ T_1 - m_1 g = m_1 a \tag{3a}$$

$$2)\ -T_2 + m_2 g = m_2 a \tag{3b}$$

donde a es la aceleración del sistema y de cada una de las masas, el signo va a depender de $m1$ y $m2$, vamos a ver más adelante cómo es esta dependencia. Pero ahora, a difernecia de lo que hacíamos antes, no podemos sumar las ecuaciones y usar que $T_1 - T_2 = 0$; ahora eso no vale, de hecho esa diferencia en las tensiones es lo que hace girar a la polea. Para hallar cuánto vale $T_1 - T_2$ vamos a plantear la ecuación de Newton de **rotación**:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{(CM)}}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{T}}_{i(CM)}^{ext}} \tag{4}$$

donde el subíndice con paréntesis indica que estoy calculando momento angular L y torques $\vec{\mathcal{T}}_i$ desde el centro de masas CM. Las fuerzas que van a ejercer torques son las tensiones aplicadas en los puntos de contacto (Figura 1) entonces podemos escribir

$$I_{CM}\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{T}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{T}_2 + 0 \times \vec{F}_v + 0 \times M\vec{g} = -RT_1\hat{z} + RT_2\hat{z} \tag{5}$$

Pero además sabemos que para un disco de masa M y radio R, se tiene $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ y para la rotación de este problema $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\omega}\hat{z}$ luego

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} = (T_2 - T_1)R \tag{6}$$

Pero recordemos que la cuerda **no desliza**, o sea la velocidad de un punto de contacto de la polea con la cuerda con respecto a la cuerda es 0, luego $a = R\dot{\omega}$, entonces:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}Ma \tag{7}$$

Y con esto ya tenemos lo que necesitábamos para terminar el problema. Restando las ecauciones (3a) y (3b) y usando (7) y despejando un poco llegamos a

$$\boxed{a = \frac{m_2 - m_1}{\frac{1}{2}M + m_1 + m_2}g} \tag{8}$$

Hay varias cosas para analizar de esta ecuación. Primero vemos que la aceleración del sistema depende, como esperábamos, de cuál es la masa más grande, si $m_1 > m_2$ se mueve para un lado y si $m_1 < m_2$ para el otro, si $m_1 = m_2$ se queda en equilibrio. Por otro lado para $M << m_1, m_2$ recuperamos el resultado para la polea ideal. Finalmente vemos que el resultado **no depende del radio** de la polea, sí aparece un factor $\frac{1}{2}$ que viene del momento de inercia del disco.

Y así quedó resuelto este problema en apariencia corto y sencillo. Pero ¡Cuidado! ¿Qué pasa con los torques qué planteamos? Analizalos en detalle... ¿Está todo bien? ¿Encontrás alguna contradicción? ¿Algún problema? Si bien es correcto, no es tan sencillo justificar el planteo de la Figura 1 como parece, ¿Ves por qué?