Física 1, segundo cuatrimestre de 2020

Problemas 13.9, 13.9 bis y 13.13

Ignacio Perito (iperito@df.uba.ar)

Acá va la clase de hoy. Resolvimos el problema 13 de la guía de dinámica del cuerpo rígido pero en el canal de Youtube del DF pueden encontrar la clase del primer cuatrimestre con una explicación del problema 9 y el problema del pingüino realista[1].

1. Problema 13.9

Tenemos un rígido con simetría axial[2] que rueda sin deslizar, respecto de su eje de simetría, dentro de una rampa semiesférica. En la figura tenemos el diagrama de cuerpo libre (notar que estamos tomando los ejes cartesianos, que poca utilidad tendrán, pero la tendrán, con distinto nombre respecto de cómo aparecen en la guía).

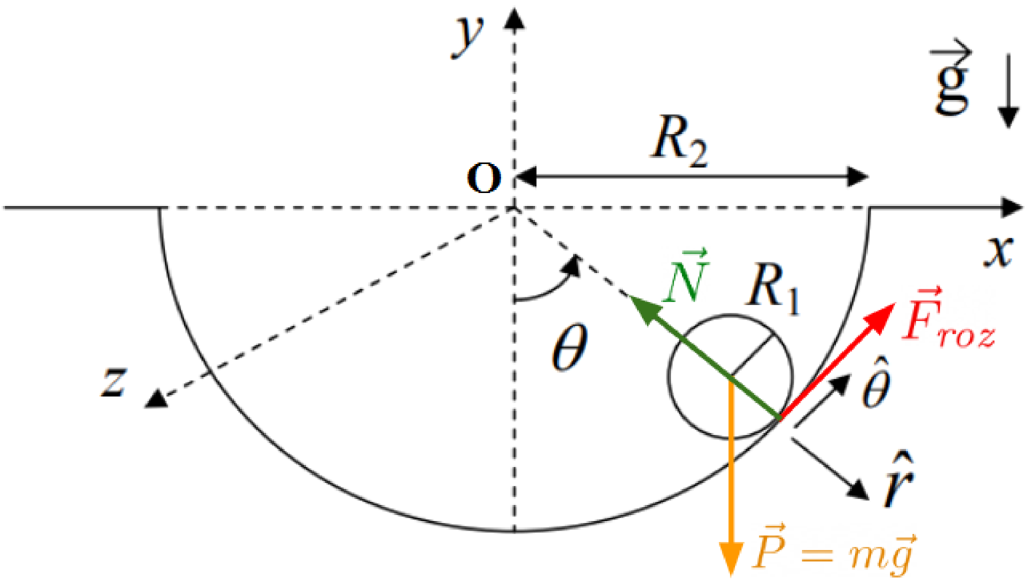

Figura 1: Esquema del problema y diagrama de cuerpo libre.

La intuición indica que, debido a la condición de rodadura, un único grado de libertad es

[1]Es nomenclatura que heredamos del primer cuatrimestre... en realidad, el pingüino cayéndose del iglú era un buen ejemplo para el problema de la guía 2 porque en ese caso no había rozamiento... pero bueno, quedó.

[2]El problema habla, concretamente, de un cilindro, pero seamos más generales porque es divertido. Podría ser un cilindro, un aro, una esfera, un pingüino embalsamado adentro de un barril, etc.

suficiente para describir el movimiento del rígido. Los primeros dos incisos se tratan de hacer explícito este hecho usando las coordenadas sugeridas por el enunciado del problema.

1.1. Inciso (a)

El ángulo θ que se define en la figura del problema es el que subtiende, respecto de la vertical, el segmento que une el centro de la semiesfera con el centro de masa del rígido. Escribir la velocidad del centro de masa del rígido es entonces trivial usando el sistema de coordenadas polares correspondiente, ya que el mismo realiza un movimiento circular de radio $R_2 - R_1$:

$$\vec{v}_{CM} = (R_2 - R_1)\dot{\theta}\hat{e}_\theta \, , \tag{1}$$

mientras que la aceleración del centro de masa se obtiene derivando la expresión anterior[3]:

$$\vec{a}_{CM} = -(R_2 - R_1)\dot{\theta}^2\hat{e}_r + (R_2 - R_1)\ddot{\theta}\hat{e}_\theta \, . \tag{2}$$

Las dos expresiones anteriores es todo lo que nos pedían en este inciso. Como vemos, al menos para describir la cinemática del centro de masa (es decir, la parte traslatoria del movimiento), es suficiente conocer la evolución de la variable θ. En el inciso que este también es el caso a la hora de describir la parte rotatoria del movimiento del rígido.

1.2. Inciso (b)

Si, en un dado instante, llamamos $\mathbf{Q}$ al punto de contacto del rígido con la superficie, la condición de rigidez nos permite escribir:

$$\vec{v}_{\mathbf{CM}} - \vec{v}_{\mathbf{Q}} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{r}_{\mathbf{CM}} - \vec{r}_{\mathbf{Q}}) \, . \tag{3}$$

La expresión anterior se puede escribir de una manera más simpática (y más útil) una vez que entran en consideración los vínculos del problema, a saber:

- el rígido rueda sin deslizar $\Rightarrow \vec{v}_{\mathbf{Q}} = \vec{0}$ y
- el rígido rueda en el plano xy (el plano de la hoja) $\Rightarrow \vec{\Omega} = \Omega\hat{e}_z$.

Teniendo en cuenta lo anterior y que la posición relativa entre el centro de masa y el punto $\mathbf{Q}$ es simplemente $\vec{r}_{\mathbf{CM}} - \vec{r}_{\mathbf{Q}} = -R_1\hat{e}_r$; la condición de rigidez (3) resulta:

$$\vec{v}_{\mathbf{CM}} = -\Omega R_1 \hat{e}_z \wedge \hat{e}_r = -\Omega R_1 \hat{e}_\theta \, , \tag{4}$$

[3] O usando la fórmula de aceleración en polares que ya deberíamos saber de memoria.

igualando con la velocidad del centro de masa escrita según (1), despejamos Ω como función de $\dot{\theta}$ y, luego, el vector velocidad angular del rígido resulta:

$$\vec{\Omega} = -\frac{(R_2 - R_1)}{R_1}\dot{\theta}\hat{e}_z\,, \tag{5}$$

y, derivando con respecto al tiempo la expresión anterior, obtenemos:

$$\dot{\vec{\Omega}} = -\frac{(R_2 - R_1)}{R_1}\ddot{\theta}\hat{e}_z\,. \tag{6}$$

Tenemos entonces que, como habíamos sospechado al principio, tanto la velocidad angular como la aceleración angular también quedan determinadas una vez que conocemos $\dot{\theta}$. Como esto también era cierto para la velocidad y la aceleración del centro de masa, tenemos que la única variable cinemática relevante del problema es θ.

1.3. Inciso (c)

El diagrama de cuerpo libre ya lo presentamos al principio, así que vamos directo a los bifes: empecemos por las ecuaciones de Newton para el centro de masa. Desde luego, lo más cómodo es seguir trabajando en polares. La normal actúa en la dirección radial y hacia adentro de la rampa, así que podemos escribir directamente $\vec{N} = -N\hat{e}_r$ donde N es **el módulo** de la normal; la fuerza de rozamiento actúa en la tangencial y la escribimos $\vec{F}_{roz} = F_{roz}\hat{e}_\theta$ (F_{roz} puede ser una cantidad tanto positiva como negativa, dependiendo de qué esté haciendo el rígido). La única que necesita ser descompuesta es el peso y resulta: $\vec{P} = mg\,(\cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta)$. La aceleración del centro de masa la tenemos escrita en (2), así que simplemente multiplicamos por m e igualamos a las fuerzas, obteniendo las ecuaciones de Newton en la dirección radial y tangencial para el centro de masa del rígido:

$$\begin{aligned} -m(R_2 - R_1)\dot{\theta}^2 &= mg\cos\theta - N\,, \\ m(R_2 - R_1)\ddot{\theta} &= -mg\sin\theta + F_{roz}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Por otro lado, en la dirección $\hat{e}_z$ no pasa nada relevante en términos de la dinámica del centro de masa del rígido. Si frenamos acá, vemos que tenemos dos ecuaciones diferenciales para tres incógnitas: θ, N y F_{roz}. Las dos ecuaciones anteriores rigen la dinámica de la traslación del cuerpo rígido y la ecuación que nos está faltando es la que rige la dinámica de la rotación intrínseca del mismo, es decir, la ecuación de torques. **Es importante** siempre mantener en mente que la ecuación de torques no es otra cosa que la ley de variación del momento angular para un sistema de muchos puntos en el caso particular en el cual esos puntos se comportan como un rígido. Y la ecuación para la variación del momento angular no es otra cosa que un parafraseo conveniente de la segunda ley de Newton. **En resumen, como siempre, lo que estamos haciendo no es otra cosa que escribir las ecuaciones de Newton para el sistema de partículas, usando una parametrización conveniente**. Hecha esta aclaración, pasemos a la ecuación de torques. Vieron en la teórica que la ecuación de la variación del momento angular (medido desde el centro de masa) de un rígido adquiere una forma particularmente simple:

$$I_{\mathbf{CM}}\dot{\vec{\Omega}} = \sum \vec{\tau}_{\mathbf{CM}} \,, \tag{8}$$

donde $I_{\mathbf{CM}}$ es el momento de inercia en el eje de rotación del rígido con respecto al centro de masa y el miembro derecho es la suma de torques externos actuando sobre el sistema, también medidos desde el centro de masa. También vieron en la teórica que la ecuación se escribe igual si uno se para en un punto fijo del rígido. En este caso, por ejemplo, podríamos trabajar con el eje instantáneo de rotación que no es otra cosa que el punto de contacto **Q** entre el rígido y la rampa. Es decir, también es cierto que:

$$I_{\mathbf{Q}}\dot{\vec{\Omega}} = \sum \vec{\tau}_{\mathbf{Q}} \,, \tag{9}$$

ahora $I_{\mathbf{Q}}$ es el momento de inercia respecto de Q (el cual pueden averiguar fácilmente usando el teorema de Steiner, dado que $I_{\mathbf{CM}}$ es dato) y en el miembro derecho ahora tenemos los torques externos respecto del punto **Q**. Con cuál de las dos se trabaja es una cuestión de practicidad. En este caso iremos con la del centro de masa, les queda a ustedes de ejercicio ver que trabajando con la otra se llega a las mismas conclusiones.

Cuando nos paramos en el centro de masa, la única fuerza capaz de realizar torque es la de rozamiento (el peso, como vieron en la teórica, actúa sobre el centro de masa[4] y la normal es colineal con el vector posición de su punto de aplicación). Para un rígido como el que estamos considerando, el momento de inercia respecto del centro de masa siempre se escribe:

$$I_{\mathbf{CM}} = \alpha m R_1^2 \,, \tag{10}$$

donde α es algún factor adimensional que depende de la geometría del objeto. Por ejemplo:

- para un cilindro, $\alpha = \frac{1}{2}$
- para una esfera, $\alpha = \frac{2}{5}$
- para un aro, $\alpha = 1$.

[4]Desde luego, esto es una patraña. El peso actúa sobre cada elemento de masa del rígido. Pero cuando hacen la cuenta ven que, en términos netos, la suma es equivalente a una única fuerza actuando sobre el centro de gravedad que, dado que el campo gravitatorio en este problema es uniforme, es lo mismo que el centro de masa.

Volviendo a lo que nos compete, y recordando que $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\Omega}\hat{e}_z$, la ecuación de torques desde el centro de masa resulta entonces:

$$\alpha m R_1^2 \dot{\Omega}\hat{e}_z = (R_1\hat{e}_r) \wedge (F_{roz}\hat{e}_\theta) = R_1 F_{roz}\hat{e}_z \,, \tag{11}$$

de donde se desprende que:

$$\alpha m R_1 \dot{\Omega} = F_{roz} \,, \tag{12}$$

y, usando la relación (6), esto último se puede reescribir como:

$$-\alpha m (R_2 - R_1)\ddot{\theta} = F_{roz} \,, \tag{13}$$

que es la ecuación que nos andaba faltando. Con esta y las dos ecuaciones en (7), tenemos completamente determinado el problema. Si queremos la ecuación de movimiento para θ, reemplazamos la expresión para F_{roz} de la ecuación anterior y la metemos en la segunda línea de (7). Con un poquito de álgebra, esto resulta en:

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{(1+\alpha)}\frac{g\sin\theta}{(R_2 - R_1)} \,. \tag{14}$$

Antes de avanzar con la discusión alrededor de la ecuación anterior, que es mucha, vale notar que si reemplazamos la expresión para $\ddot{\theta}$ en función de θ en la ecuación (13), obtenemos:

$$F_{roz} = \frac{m g \alpha \sin\theta}{(1+\alpha)} \,, \tag{15}$$

lo cual (si conocemos el coeficiente de rozamiento estático= nos permitiría ver el rango de valores del ángulo θ para el cual la condición de rodadura es posible, puesto que en esta situación el rozamiento es estático y por ende el módulo de F_{roz} está acotado. No nos lo piden explícitamente en este ejercicio pero es saludable tener en cuenta que puede hacerse.

Ahora sí, volviendo a la ecuación (14), una primera mirada deja claro que se trata de una ecuación matemáticamente análoga a la de un péndulo simple, pero con un par de modificaciones. La parte fácil de interpretar es el factor $(R_2 - R_1)$, que proviene del hecho de que esta es la distancia del centro de masa al centro de la rampa **O**. Ahora bien, hay algo más curioso y es que la ecuación (14) no es la misma que la de un péndulo simple de longitud $(R_2 - R_1)$, sino que difiere de esto último en un factor $\frac{1}{1+\alpha}$. De hecho, ¡este factor está presente independientemente de la relación entre los radios! Aún en el límite $R_1 \ll R_2$ (¿masa puntual?) en el que unx, en principio, podría llegar a esperar que reaparezca el péndulo simple, la ecuación de movimiento sigue teniendo el factor $\frac{1}{1+\alpha}$. ¿Qué es lo que pasa acá?

Para intentar resolver el misterio, es esclarecedor pensar el problema desde un punto de vista energético. Dado que ninguna de las fuerzas no conservativas presentes realizan trabajo, la energía mecánica del sistema se conserva. Como habrán visto en la teórica, la energía cinética de un cuerpo rígido puede escribirse de una forma simpática:

$$T = T_{trasl} + T_{rot} \,, \tag{16}$$

donde $T_{trasl} \equiv \frac{m}{2}\|\vec{v}_{\mathbf{CM}}\|^2$ es la energía cinética asociada a la traslación del centro de masa del rígido y $T_{rot} \equiv \frac{I_{\mathbf{CM}}}{2}\|\vec{\Omega}\|^2$ es la energía cinética asociada a la rotación del rígido alrededor de su centro de masa. En nuestro caso particular, tenemos:

$$\|\vec{v}_{\mathbf{CM}}\| = (R_2 - R_1)\dot{\theta} \Rightarrow T_{trasl} = \frac{m}{2}(R_2 - R_1)^2\dot{\theta}^2 \,, \tag{17}$$

y, para la energía cinética de rotación:

$$\|\vec{\Omega}\| = \frac{(R_2 - R_1)}{R_1}\dot{\theta} \Rightarrow T_{rot} = \frac{\alpha m}{2}(R_2 - R_1)^2\dot{\theta}^2 \,. \tag{18}$$

De las dos líneas anteriores, vemos que la condición de rodadura establece (como es esperable) un vínculo muy estrecho entre la energía cinética de traslación y la de rotación:

$$T_{rot} = \alpha T_{trasl} \,, \tag{19}$$

lo cual no depende de las dimensiones ni de la masa del rígido; sólo depende de la forma del cuerpo a través del factor α.

Como la energía se conserva, la evolución del sistema está gobernada por el intercambio entre energía potencial y energía cinética. Es decir, cuando el potencial gravitatorio cambie en una magnitud ΔV, tendremos:

$$-\Delta V = \Delta T = \Delta T_{trasl} + \Delta T_{rot} \,, \tag{20}$$

y, haciendo un poquito de álgebra con la relación anterior y (19); se tiene:

$$\Delta T_{trasl} = \frac{-\Delta V}{1+\alpha} \quad , \quad \Delta T_{rot} = \frac{-\Delta V}{1 + 1/\alpha} \,, \tag{21}$$

es decir, una fracción $\frac{1}{1+\alpha}$ de la energía potencial gravitatoria se transforma en energía cinética de traslación y la fracción complementaria $\frac{1}{1+1/\alpha}$ se transforma en energía cinética de rotación. Tenemos entonces que, independientemente de la relación entre los radios, preservar la rodadura requiere que la energía potencial vaya a parar a cada una de las componentes de la energía cinética respetando las proporciones anteriores. En particular, la primera relación en (21) puede pensarse como la ecuación de balance de una partícula puntual sometida a un campo gravitatorio de magnitud $\frac{g}{1+\alpha}$. Misterio resuelto.

Como último comentario, notar que el límite de masa puntual se obtiene tomando $\alpha \to 0$ (momento de inercia nulo), en cuyo caso toda la energía cinética es de traslación.

2. El pingüino rígido y rodante

El problema del pingüino es bastante similar al anterior, la diferencia es que ahora el rígido rueda sobre una superficie semiesférica pero con la concavidad invertida, como se ve en la figura.

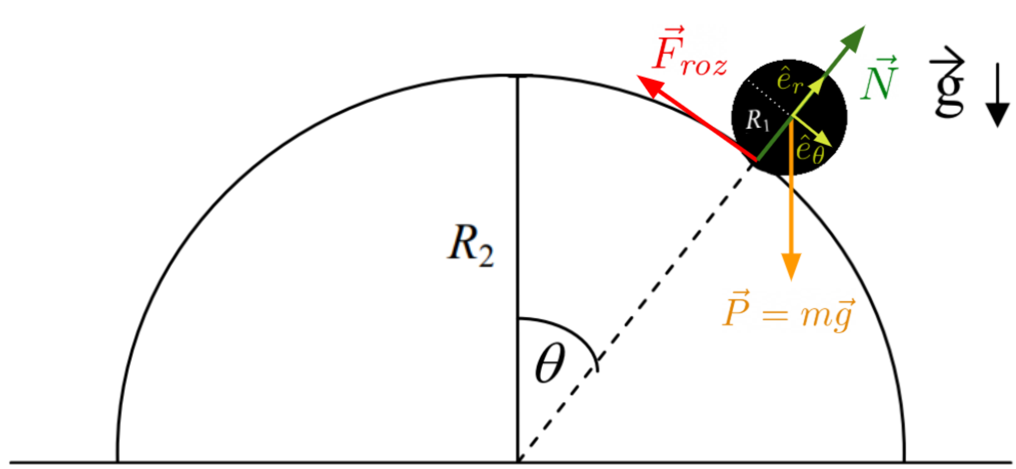

Figura 2: Esquema del problema y diagrama de cuerpo libre para el pingüino. Notar que ahora el eje $\hat{e}_z$ **entra** al plano de la pantalla.

Nuestro objetivo, igual que en la guía de dinámica, es intentar averiguar dónde se despega el pingüino de la superficie si lo soltamos en reposo desde el punto más alto de la misma. Ya sabemos que el truco está en hallar el valor de la normal como función del ángulo, así que hacia eso vamos. Definiendo el ángulo θ como en la figura, la velocidad y la aceleración del centro de masa del pingüino toman una forma análoga a la del ejercicio anterior, salvo porque en este caso la distancia al centro de giro está dada por la suma de los radios en lugar de la resta. La velocidad queda:

$$\vec{v}_{CM} = (R_1 + R_2)\dot{\theta}\hat{e}_\theta \,, \tag{22}$$

y la aceleración:

$$\vec{a}_{CM} = -(R_1 + R_2)\dot{\theta}^2\hat{e}_r + (R_1 + R_2)\ddot{\theta}\hat{e}_\theta \,. \tag{23}$$

La condición de rodadura se trata de manera análoga al caso anterior y ahora resulta en:

$$\dot{\vec{\Omega}} = \frac{(R_1 + R_2)}{R_1}\ddot{\theta}\hat{e}_z \,, \tag{24}$$

donde el cambio en el signo, respecto al caso anterior, es consistente con la nueva dirección del eje $\hat{e}_z$. Las ecuaciones de Newton también son casi iguales, salvo por algún que otro signo que cambia:

$$\begin{aligned} -m(R_1 + R_2)\dot{\theta}^2 &= -mg\cos\theta + N \,, \\ m(R_1 + R_2)\ddot{\theta} &= mg\sin\theta + F_{roz} \,. \end{aligned} \tag{25}$$

donde, de nuevo, no le imponemos ningún signo *ad hoc* a la fuerza de rozamiento porque puede apuntar hacia donde le plazca. La ecuación de torques queda:

$$-\alpha m(R_1 + R_2)\ddot{\theta} = F_{roz} \,. \tag{26}$$

Como antes, reemplazando la fuerza de rozamiento en función de θ en segunda ecuación de Newton, obtenemos la ecuación de movimiento para el centro de masa del pingüino:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{(1+\alpha)}\frac{g\sin\theta}{(R_1 + R_2)} \,, \tag{27}$$

y, al igual que cuando resolvimos el problema del pingüino puntual, de la ecuación anterior podemos inferir $\dot{\theta}(\theta)$ para reemplazar en la primera ecuación de Newton y tener así la normal como función del ángulo. **Chain rule intensifies:**

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta} \Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{g}{(1+\alpha)(R_1 + R_2)} \int_0^{\theta} \sin\theta d\theta \tag{28}$$

donde hemos usado las condiciones iniciales $\dot{\theta} = 0$ cuando $\theta = 0$ en los límites inferiores de las integrales y no nos tomamos el trabajo de cambiarle el nombre a las variables de integración porque ya estamos grandes y no nos importa. De lo anterior sale:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g\left[1 - \cos\theta\right]}{(1+\alpha)(R_1 + R_2)} \,, \tag{29}$$

y reemplazando en la ecuación de Newton radial:

$$N(\theta) = mg\cos\theta - \frac{2mg\left[1 - \cos\theta\right]}{(1+\alpha)} \,, \tag{30}$$

lo cual se puede volver un poquito más simpático sacando algún que otro factor común:

$$N(\theta) = \frac{mg}{1+\alpha}\left[(3+\alpha)\cos\theta - 2\right] \,, \tag{31}$$

que, en el límite de masa puntual $\alpha \to 0$, se corresponde con la expresión que habíamos hallado en el problema de la guía 2. Ya vemos que el ángulo de separación θ_{sep} para el cual $N(\theta_{sep}) = 0$ no depende de nada salvo el factor geométrico α. Despejando, tenemos:

$$\theta_{sep} = \arccos\left(\frac{2}{3+\alpha}\right) \,. \tag{32}$$

Como $\arccos$ es una función decreciente, vemos que cuanto mayor es el factor geométrico α, mayor será el ángulo de separación. El pingüino puntual se despega antes que el pingüino esférico, que se despega antes que el pingüino cilíndrico, que se despega antes que el pingüino con forma de aro. En todas las afirmaciones anteriores, la palabra *antes* tiene que interpretarse como *en un ángulo menor*, ya que del tiempo no sabemos nada en este análisis.

3. Problema 13.13

En la figura se muestra el origen de coordenadas que vamos a usar: cartesianas con un origen fijo a algún punto de la Tierra. El enunciado no lo dice pero vamos a suponer que el tablón tiene altura despreciable (no cambia nada si tuviese una altura finita, pero es más incómodo escribir las cosas). Un detalle crucial de este ejercicio que es muy fácil pasar por alto es que, luego de chocar elásticamente con el tablón, la partícula de masa M queda en reposo. Sin meternos con las cuentas (lo hacemos después), es importante ser conscientes de que eso impone una relación entre M, v_0 y m. Dicho de otra forma, no todos esos parámetros son independientes (si lo fueran, la partícula no tiene por qué quedar en reposo luego del choque elástico). Dicho esto, pasemos a resolver el problema.

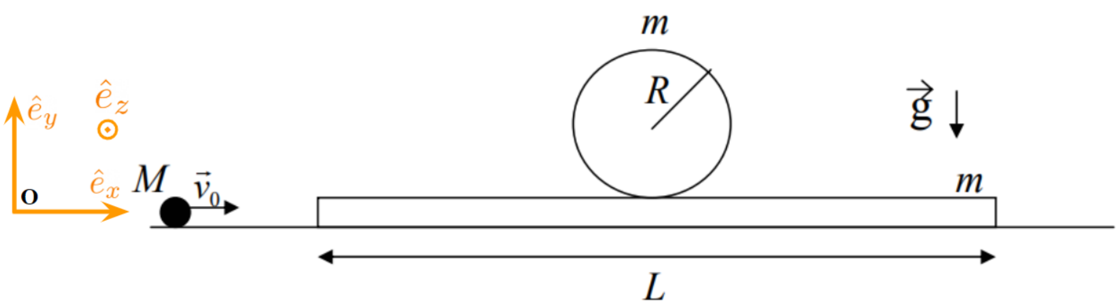

Figura 3: Esquema del problema..

3.1. Inciso (a)

Consideraremos como sistema a la partícula, el tablón y el cilindro. Es sencillo ver que, a pesar de que hay varias fuerzas externas, la suma de todas ellas es nula, por lo que el momento lineal del sistema es una cantidad conservada. Para la conservación del momento angular con respecto al origen **O**, las fuerzas de rozamiento que sienten el tablón y el punto más bajo del cilindro son colineales a su punto de aplicación, por lo que no realizan torque alguno (igual, si lo realizaran, se cancelarían entre sí); el torque del peso del cilindro se cancela con el torque de la normal que le ejerce el tablón; y el torque del peso del tablón y de la normal que el cilindro ejerce sobre el mismo se cancelan con los torques de las respectivas normales que el suelo ejerce sobre el tablón. Sobre la partícula, desde luego, no hay torques externos. Concluímos entonces que $\vec{L}_{\mathbf{O}}$ es también una cantidad conservada del problema.

Con respecto a la energía, uno podría verse tentado a apresurarse y decir que se conserva (y estaría en lo cierto), pero no es tan obvio: recuerden que las fuerzas internas no conservativas podrían alterar la energía mecánica del sistema (problema 7 de la guía de trabajo y energía), por lo que hay que tener un poco de cuidado. En efecto, la fuerza de rozamiento estática sobre el cilindro **realiza trabajo** y lo mismo es cierto para el tablón, lo cual es evidente, puesto que cada uno de esos cuerpos está inicialmente en reposo y luego del choque estará moviéndose... por lo que habrá adquirido energía cinética, ¿de dónde la sacaron? del trabajo del rozamiento. Ahora bien, como las fuerzas de rozamiento son iguales y opuestas y el punto de contacto es el mismo, los trabajos son iguales y opuestos, así que cuando miramos a todo el sistema, el trabajo neto de las fuerzas no conservativas resulta nulo y la energía mecánica se conserva.

3.2. Inciso (b)

Ya sabemos que las tres cantidades de interés se conservan, veamos cuánto valen antes del choque. En esta situación, lo único que tenemos es la partícula de masa M realizando un MRU con velocidad $v_0\hat{e}_x$. El momento lineal del sistema es entonces:

$$\vec{p}_{antes} = Mv_0\hat{e}_x\,. \tag{33}$$

Luego del choque, la partícula se queda quieta y las otras dos cosas se mueven. El tablón realiza un movimiento puramente traslatorio así que llamaremos simplemente $v_{\mathbf{T}}\hat{e}_x$ a su velocidad justo después del choque. Para el cilindro será importante ponerle nombre propio a la velocidad del centro de masa, porque realiza un movimiento roto-traslatorio y no todos sus puntos se mueven a igual velocidad. Llamaremos entonces $v_{\mathbf{CM}}$ a la velocidad del centro de masa del cilindro justo después del choque. El momento lineal de todo el sistema uin instante después del choque es, entonces:

$$\vec{p}_{despues} = (mv_{\mathbf{T}} + mv_{\mathbf{CM}})\hat{e}_x\,, \tag{34}$$

e igualando las dos expresiones anteriores obtenemos:

$$Mv_0 = m(v_{\mathbf{T}} + v_{\mathbf{CM}})\,. \tag{35}$$

Pasemos ahora a la energía. Antes del choque tenemos la energía cinética de la partícula:

$$E_{antes} = \frac{Mv_0^2}{2}\,, \tag{36}$$

y, justo después, la energía cinética del tablón y la energía cinética del cilindro (recordar, del problema anterior, cómo se descompone la energía cinética de un movimiento roto-traslatorio):

$$E_{despues} = \frac{mv_{\mathbf{T}}^2}{2} + \frac{mv_{\mathbf{CM}}^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{4}\,, \tag{37}$$

donde ω es la velocidad angular de rotación del cilindro justo después del choque y hemos usado que $I_{\mathbf{CM}} = \frac{mR^2}{2}$. Igualando las energías antes y después del choque obtenemos:

$$Mv_0^2 = m\left[v_{\mathbf{T}}^2 + v_{\mathbf{CM}}^2 + \frac{R^2\omega^2}{2}\right] . \tag{38}$$

Veamos ahora qué información podemos sacar de la conservación del momento angular. Antes del choque, sólo se mueve la partícula y está claro que su momento angular con respecto a **O** es nulo, así que:

$$\vec{L}^{(\mathbf{O})}_{antes} = \vec{0} . \tag{39}$$

Después del choque, la partícula está quieta y el tablón se mueve en la misma dirección que apunta su vector posición para todo tiempo, por lo que sólo debemos considerar el momento angular del cilindro que, como sabemos, se puede descomponer según:

$$\vec{L}^{(\mathbf{O})}_{cilindro} = \vec{L}^{(\mathbf{O})}_{\mathbf{CM}} + \vec{L}^{(\mathbf{CM})} , \tag{40}$$

donde el primer término es el momento angular orbital (es decir, el momento angular del centro de masa con respecto a **O**) y el segundo término es el momento angular intrínseco $\vec{L}^{(\mathbf{CM})} = I_{\mathbf{CM}}\vec{\omega}$. Para el primer término, tenemos que justo después del choque vale:

$$\vec{L}^{(\mathbf{O})}_{\mathbf{CM}} = \vec{r}_{\mathbf{CM}} \wedge (m\vec{v}_{\mathbf{CM}}) = m(x_{\mathbf{CM}}\hat{e}_x + R\hat{e}_y) \wedge (v_{\mathbf{CM}}\hat{e}_x) = -mRv_{\mathbf{CM}}\hat{e}_z , \tag{41}$$

y el término de momento angular intrínseco, usando que $I_{\mathbf{CM}} = \frac{mR^2}{2}$ y que $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$, resulta:

$$\vec{L}^{(\mathbf{CM})} = \frac{mR^2\omega}{2}\hat{e}_z , \tag{42}$$

por lo que el momento angular del sistema, justo después del choque, se escribe:

$$\vec{L}^{(\mathbf{O})}_{despues} = \left(\frac{mR^2\omega}{2} - -mRv_{\mathbf{CM}}\right)\hat{e}_z . \tag{43}$$

Igualando el momento angular total del sistema antes y justo después del choque, obtenemos:

$$v_{\mathbf{CM}} = \frac{R\omega}{2} . \tag{44}$$

Por último, notemos que tenemos una condición adicional que vincula las variables cinemáticas del problema y es el hecho de que el cilindro rueda sin deslizar **respecto** del tablón. Si llamamos **Q** al punto de contacto entre el cilindro y el tablón, tenemos entonces que $\vec{v}_{\mathbf{Q}} = \vec{v}_{\mathbf{T}}$ y la condición de rigidez nos permite escribir:

$$\vec{v}_{\mathbf{CM}} - \vec{v}_{\mathbf{T}} = \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_{\mathbf{CM}} - \vec{r}_{\mathbf{Q}}) , \tag{45}$$

que puede escribirse:

$$(v_{\mathbf{CM}} - v_{\mathbf{T}})\hat{e}_x = \omega\hat{e}_z \wedge (R\hat{e}_y) = -\omega R\hat{e}_x \,, \tag{46}$$

de donde obtenemos una relación bastante razonable entre la velocidad del tablón, la velocidad del centro de masa del cilindro y la frecuencia angular del mismo:

$$v_{\mathbf{T}} = v_{\mathbf{CM}} + \omega R \,. \tag{47}$$

En resumen, las tres conservaciones y la condición de rodadura dan lugar al sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} Mv_0 &= m(v_{\mathbf{T}} + v_{\mathbf{CM}}) \,, \\ Mv_0^2 &= m\left[v_{\mathbf{T}}^2 + v_{\mathbf{CM}}^2 + \frac{R^2\omega^2}{2}\right] \,, \\ v_{\mathbf{CM}} &= \frac{R\omega}{2} \,, \\ v_{\mathbf{T}} &= v_{\mathbf{CM}} + \omega R \,. \end{aligned} \tag{48}$$

Como discutimos en la clase y en este apunte hace unas carillas, está bien que haya cuatro ecuaciones porque no tenemos sólo tres incógnitas ($v_{\mathbf{CM}}$, $v_{\mathbf{T}}$ y ω). El hecho de que la partícula se quede quieta luego del choque es una restricción adicional y eso requiere que no todos los datos del problema sean independientes. Dicho de otra forma, podemos pensar que m, R y v_0 son datos pero M es otra incógnita, que tendrá que valer lo que tenga que valer para que sea posible que la partícula se quede quieta luego del impacto[5]. Usando la estrategia de despeje que más les simpatice, pueden pelearse un rato con el sistema anterior y obtener:

$$M = \frac{4m}{3} \;,\; v_{\mathbf{T}} = v_0 \;,\; v_{\mathbf{CM}} = \frac{v_0}{3} \;,\; \omega = \frac{2v_0}{3R} \,. \tag{49}$$

3.3. Inciso (c)

De los resultados anteriores, vemos que ω es positivo y por ende el cilindro girará en sentido anti-horario con respecto al eje que sale de la pantalla; lo cual es razonable.

[5]Si M fuera un dato, entonces no tenemos derecho a suponer que la partícula se quedará quieta luego del impacto y será necesario considerar una incógnita adicional que es la velocidad final de la partícula y que aparecerá en el sistema de ecuaciones anteriores.