Dinámica del cuerpo rígido

Problema 13.8

En la primera parte del problema vamos a resolver un ejercicio típico de dinámica del rígido para el cual plantearemos todas las ecuaciones fundamentales que lo describen. En la segunda parte vamos a trabajar con algunos conceptos de energía del rígido.

Recuerden que las ecuaciones básicas para todo ejercicio de dinámica del rígido son: las **ecuaciones de traslación** (determinan el movimiento del centro de masa del cuerpo), las **ecuaciones de rotación** (determinan la velocidad angular) y la **condición de rigidez** (que define qué es un cuerpo rígido y cómo relacionan las velocidades en sus diferentes puntos).

Nos plantean que un cilindro rígido se desplaza sobre un plano cuya superficie tiene distintas propiedaes. En el tramos BA el rígido desliza sin rotar (sin girar), al llegar al punto A la superficie de contacto se convierte en áspera y aparece una fuerza de rozamiento. En consecuencia el cilindro empieza a rotar (gira, todavía no rueda) pero sigue deslizando. Finalmente en algún momento el cilindro deja de deslizar y entra en rodadura (es decir rueda, gira sin deslizar). En la figura 1 se encuentra representado cualitativamente el movimiento. En lo que queda del ejercicio vamos a hacer todas las cuentas para ver que esto efectivamente es así.

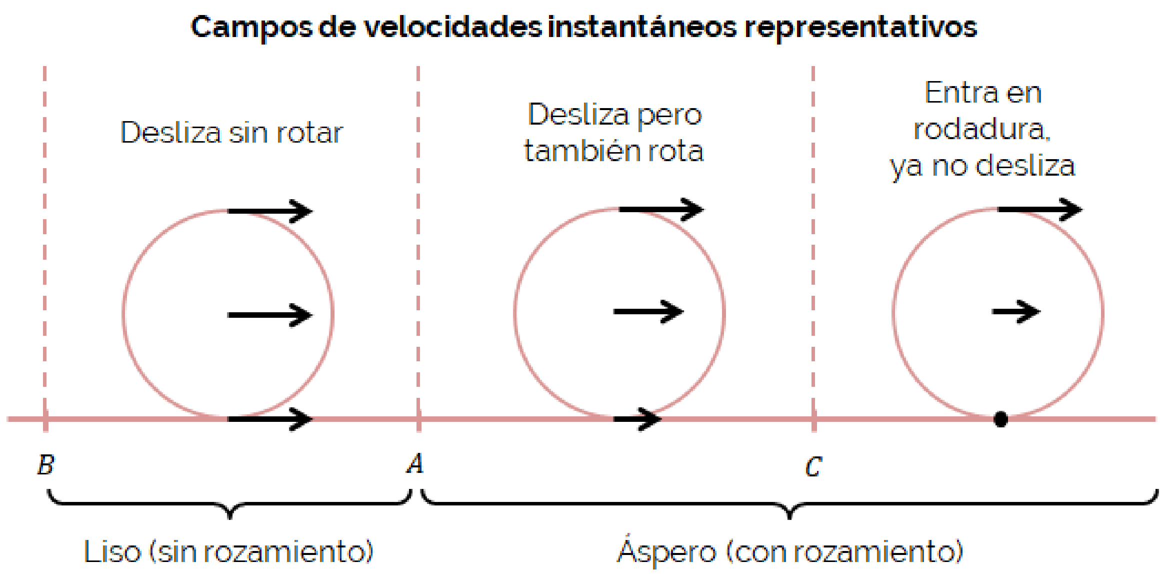

Figura 1: Esquema de los campos de velocidades instantáneos de cada tramo. El gráfico es cualitativo y pretende mostrar cómo evoluciona el estado de movimiento del cilindro, particularmente cómo se diferencian los tramos en que deslizar totalmente, desliza y rota, y finalmente rueda.

Inciso a

Vamos a plantear las ecuaciones para los tres tramos BA, AC y C en adelante. Para BA sólo tenemos el peso ejercido sobre el centro de masa y la normal ejercida sobre el punto de contacto entre el cilindro y el piso. Para el tramo AC tendremos lo mismo pero además se suma una fuerza de rozamiento también aplicada sobre el punto de contacto entre superficies. Como en este caso el cuerpo está deslizando el rozamiento será dinámico. Para el tramo C en adelante es igual que el anterior pero ahora como ya NO desliza, sino rueda, el rozamiento será estático. Veamos en la figura 2 los DCLs.

En el tramo BA sólo desliza sin rotar de modo que no vamos a plantear las ecuaciones aunque podrían hacerlo sin problemas. Básicamente este tramo nos dice cuáles son las condiciones iniciales del movimiento para el siguiente tramo AC. Asumamos que en $t = 0$ el cilindro pasa por A, entonces la velocidad del centro de masa será $\vec{v}_{\rm CM}(t = 0) = \vec{v}_1$ y como no estaba rotando $\vec{\omega}(t = 0) = 0$.

Vamos a las ecuaciones de traslación para el tramo AC. La suma de fuerzas es

$$\sum \vec{F}_{\rm ext} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{rd}\,, \tag{1}$$

con $\vec{N} = N\,\hat{y}$, $\vec{P} = -Mg\,\hat{y}$ y $\vec{F}_{rd} = -F_{rd}\,\hat{x}$. Como el rozamiento es dinámico podemos decir a su vez que $F_{rd} = \mu_d N$. Las ecuaciones en coordenadas son

$$\begin{cases} \hat{y} \qquad M\ddot{y}_{\rm CM} = N - Mg \\ \hat{x} \qquad M\ddot{x}_{\rm CM} = -F_{rd} \end{cases} . \tag{2}$$

Dado el vínculo $y_{\rm CM} = \text{cte} \to \ddot{y}_{\rm CM} = 0$, obtenemos $N = Mg$ y así

$$\ddot{x}_{\rm CM} = -\mu_d g. \tag{3}$$

Con esta información más la condición inicial $\vec{v}_{\rm CM} = \dot{x}_{\rm CM}\,\hat{x} = \vec{v}_1 = v_1\,\hat{x}$, ya podemos calcular la velocidad del centro de masa integrando la ecuación (3). Nos queda

$$\dot{x}_{\rm CM} = v_1 - \mu_d g\,t. \tag{4}$$

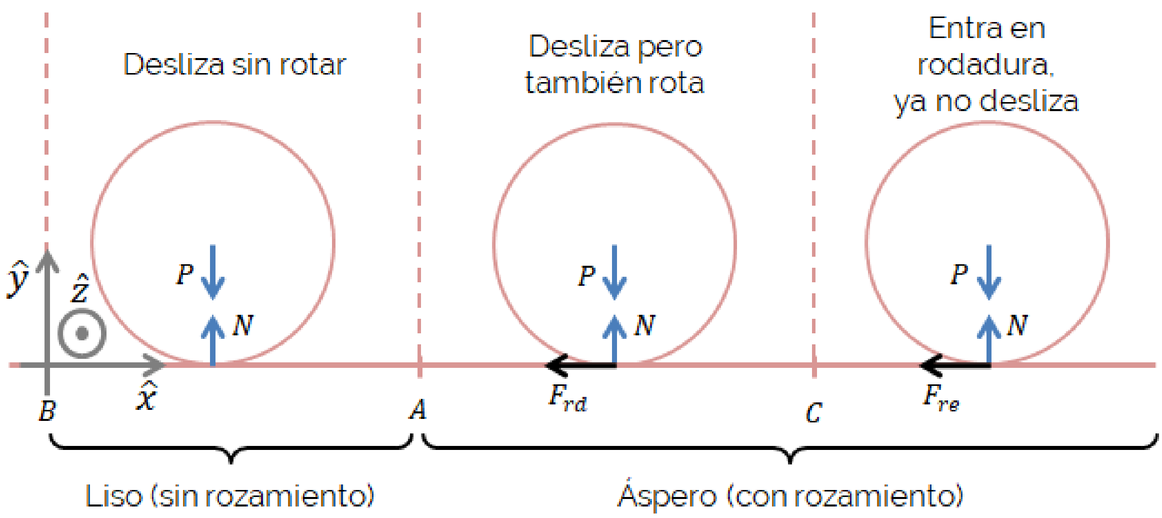

Figura 2: Esquema del problema con los DCLs por tramos.

A su vez si definimos que $x_A = 0$, integrando una vez más tenemos la posición del centro de masa

$$x_{\text{CM}} = v_1 t - \frac{\mu_d g}{2} t^2 \,, \tag{5}$$

como podemos observar el centro de masa realiza un MRUV.

Vamos con la ecuación de rotación. Para ello tomaremos el centro de momento en el centro de masa, es decir vamos a calcular los torques y el momento angular respecto del centro de masa. La ecuación dinámica de rotación nos dice que[1]

$$\sum \vec{M}^{(\text{CM})}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}^{(\text{CM})}}{dt}. \tag{6}$$

Visto desde el centro de masa la única fuerza que hace torque es la fuerza de rozamiento. La normal apunta en dirección hacia el CM, con lo cual $\vec{r}_N \parallel \vec{N}$ y entonces el torque es nulo, y el peso actúa sobre el CM con lo cual $\vec{r}_P = 0$ y nuevamente el torque es nulo. De este modo nos queda

$$\sum \vec{M}^{(\text{CM})}_{\text{ext}} = -R\,\hat{y} \times (-F_{rd})\,\hat{x} = -F_{rd} R\,\hat{z} \tag{7}$$

Podríamos haber intuido que el torque apunta en $-\hat{z}$ por la regla de la mano derecha.

Bien, ahora nos toca el otro lado de la ecuación (6). Lo primero es vincular $\vec{L}^{(\text{CM})}$ con la velocidad angular y el momento de inercia. Para el caso más general tenemos una relación tensorial (matricial) de esta pinta

$$\vec{L}^{(\text{CM})} = \mathbf{I}^{(\text{CM})}\,\vec{\omega}, \tag{8}$$

con $\mathbf{I}^{(\text{CM})}$ un tensor (matriz) de 3×3 y $\vec{\omega}$ el vector velocidad angular. La cuestión es la siguiente, cuando un cuerpo rígido rota sobre uno de sus ejes principales de inercia (si el cuerpo es homogéneo corresponden con sus ejes de simetría) la velocidad angular $\vec{\omega}$ es paralela a ese eje principal. En ese caso el momento angular también será paralelo a ese eje y lo más importante es que podemos escribir

$$\vec{L}^{(\text{CM})} = I^{\text{CM}}\vec{\omega}, \tag{9}$$

con $I^{(\text{CM})}$ el tensor de inercia del cuerpo rígido **sobre ese eje principal**, que será un numerito. Todos los cuerpos tienen 3 ejes principales de inercia y el momento de inercia en cada uno de esos ejes puede ser distinto (ver ejercicio 13.6). Del mismo modo podemos calcular la derivada del momento angular a partir de (9) y obtener

$$\frac{d\vec{L}^{(\text{CM})}}{dt} = I^{(\text{CM})}\dot{\vec{\omega}}. \tag{10}$$

Las ecuaciones (9) y (10) son las que utilizaremos en esta materia. Quienes hagan Mecánica Clásica ..., bueno, es Mecánica Clásica, ya verán.

En nuestro caso el cilindro gira entorno al eje z, es decir que $\vec{\omega} = \omega\,\hat{z}$. A su vez este eje es un eje principal de inercia (y de simetría ya que el cilindro es homogéneo) de modo que el momento angular será

$$\vec{L}^{(\text{CM})} = I^{\text{CM}}\omega\,\hat{z} = \frac{MR^2}{2}\omega\,\hat{z}\,, \tag{11}$$

[1] En esta expresión estamos asumiendo la ley de interacción en su versión fuerte. Toda fuerza de interacción, además de cumplir $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, se ejerce en la misma dirección que la recta que une a los cuerpos y por eso sólo aportan los torques externos.

donde $I^{(\mathrm{CM})}$ representa el momento de inercia del cilindro a lo largo del eje z, que es $I^{(\mathrm{CM})} = MR^2/2$. Derivando la ecuación (11) o utilizando directamente la ecuación (10) hallamos la variación temporal del momento angular

$$\frac{d\vec{L}^{(\mathrm{CM})}}{dt} = \frac{MR^2}{2}\dot{\omega}\,\hat{z}\,. \tag{12}$$

Juntando (7) y (12) encontramos la ecuación de rotación

$$-F_{rd}R\,\hat{z} = \frac{MR^2}{2}\dot{\omega}\,\hat{z}\,, \tag{13}$$

y así, usando que $F_{rd} = \mu_d M g$,

$$\dot{\omega} = -\frac{2\mu_d g}{R}\,. \tag{14}$$

Si integramos y usamos la condición inicial $\omega(t=0) = 0$ llegamos a

$$\vec{\omega} = -\frac{2\mu_d g\,t}{R}\,\hat{z}\,, \tag{15}$$

que es una rotación en sentido horario, como esperábamos.

Las ecuaciones (4) y (15) definen la cinemática completa del rígido. Si ahora queremos analizar cuándo entra en rodadura hacemos lo que sigue. Definimos el punto Q como el punto de contacto entre el cilindro y el piso, además este es el punto en el cual se aplica tanto la normal como la fuerza de rozamiento. La condición de rodadura nos dice que el cuerpo rodará cuando la velocidad de Q sea cero, entonces planteamos la condición de rigidez para vincular $\vec{v}_Q$ con $\vec{v}_{\mathrm{CM}}$ y $\vec{\omega}$ y luego proponemos que $\vec{v}_Q = 0$. La condición de rigidez es

$$\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{\mathrm{CM}} - \vec{r}_Q). \tag{16}$$

Sabemos que $\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \dot{x}_{\mathrm{CM}}\,\hat{x}$ con $\dot{x}_{\mathrm{CM}}$ dada en la ecuación (4) y que $\vec{\omega}$ está en la ecuación (15). El vector $\vec{r}_{\mathrm{CM}} - \vec{r}_Q$ es un vector que va desde Q hasta CM con lo cual $\vec{r}_{\mathrm{CM}} - \vec{r}_Q = R\,\hat{y}$. Reemplazando todo lo anterior más $\vec{v}_Q = 0$ en (16) obtenemos una relación para el tiempo t_c en el que el cilindro entra en rodadura. A saber

$$t_c = \frac{v_1}{3\mu_d g}\,. \tag{17}$$

Para hallar la posición del punto C, vamos a hacer $x_C = x_{\mathrm{CM}}(t = t_c)$ y así

$$x_C = x_{\mathrm{CM}}(t = t_c) = v_1 t_c - \frac{\mu_d g t_c^2}{2} = \frac{5}{18}\frac{v_1^2}{\mu_d g}\,. \tag{18}$$

Es decir que la distancia entre A y C es

$$d_{CA} = x_C - x_A = \frac{5}{18}\frac{v_1^2}{\mu_d g}\,. \tag{19}$$

Al llegar al punto C el cilindro entra en rodadura, calculemos la velocidad del centro de masa y la velocidad angular en ese momento. De (4) obtenemos

$$\vec{v}_{\mathrm{CM}}(t = t_c) = \frac{2}{3}v_1\,\hat{x}\,, \tag{20}$$

y de (15) hallamos

$$\vec{\omega}(t = t_c) = -\frac{2}{3}\frac{v_1}{R}\,\hat{z}\,. \tag{21}$$

Inciso b

¿Qué sucede una vez que el cilindro entra en rodadura? Bueno, planteemos las ecuaciones una vez más. Serán iguales a las anteriores (2) y (13) pero ahora el rozamiento es estático, porque no hay deslizamiento, y por ende ya no sabemos cuánto vale dicha fuerza.

Las ecuaciones son

$$\begin{cases} M\ddot{x}_{\mathrm{CM}} = -F_{re} \\ \dfrac{MR^2}{2}\dot{\omega} = -F_{re}R \end{cases}, \tag{22}$$

donde tenemos tres incógnitas $\ddot{x}_{\mathrm{CM}}$, $\dot{\omega}$ y F_{re}. De (22) concluimos que

$$\ddot{x}_{\mathrm{CM}} = \frac{R\dot{\omega}}{2}\,, \tag{23}$$

pero nos falta una ecuación para poder determinar todas las cantidades. Sí, es la condición de rigidez

$$\vec{v}_{\mathrm{CM}} = v_Q + \omega \times (r_{\mathrm{CM}} - \vec{r}_Q)\,, \tag{24}$$

sobre la cual impondremos además la condición de rodadura que nos dice que $\vec{v}_Q = 0$. Entonces

$$\dot{x}_{\mathrm{CM}}\hat{x} = 0 + \omega\hat{z} \times (R\hat{y}) \tag{25}$$

y en consecuencia

$$\dot{x}_{\mathrm{CM}} = -\omega R \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x}_{\mathrm{CM}} = -\dot{\omega}R\,. \tag{26}$$

De (23) y (26) sale que

$$\ddot{x}_{\mathrm{CM}} = 0 \tag{27}$$

$$\dot{\omega} = 0 \tag{28}$$

y volviendo a (22) tenemos

$$F_{re} = 0\,. \tag{29}$$

Esto quiere decir que el centro de masa va a realizar un MRU y que la velocidad angular del rígido será constante. Por otro lado no dice que una vez que entró en rodadura, si no actúan nuevas fuerzas, el cilindro seguirá en rodadura independientemente del rozamiento. Podríamos cambiar los coeficientes o incluso volver a un región sin rozamiento y el cilindro seguirá en rodadura. El caso del ejercicio 7, cilindro en un plano inclinado, es una situación diferente porque tenemos una fuerza en la misma dirección del rozamiento, la proyección del peso sobre el plano, ¿qué cambia?. Si no lo hicieron, una buena idea es hacerlo.

Inciso c y energía

Para finalizar veamos qué sucede con la energía. Durante todo el trayecto la altura del centro de masa permanece constante de modo que el potencial gravitatorio no varía y en particular puedo elegir $V = 0$. La energía total del sistema será en cualquier caso[2]

$$T = T_{\mathrm{T}} + T_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}I^{(\mathrm{CM})}\omega^2 \tag{30}$$

[2] El caso general de rotaciones en cualquier dirección independiente de los ejes principales ya lo verán quienes hagan Mecánica Clásica

con T_T la energía cinética de traslación y T_R la energía cinética de rotación.

En el tramo BA la única fuerza no conservativa es la normal aplicada sore el punto Q, como el punto Q se desplaza en dirección horizontal y la normal es vertical, el trabajo es nulo. Por lo tanto la energía se conserva. En el tramo AC tenemos el rozamiento dinámico, calculemos la variación de energía

$$\Delta H_{CA} = H_C - H_A = \frac{1}{2} M \left[v_\mathrm{CM}(t_c)\right]^2 + \frac{1}{2} I^{(\mathrm{CM})} \left[\omega(t_c)\right]^2 - \frac{1}{2} M v_1^2 . \tag{31}$$

A partir de (20) y (21) llegamos a

$$\Delta H_{CA} = -\frac{M v_1^2}{6} . \tag{32}$$

Esta disminución de energía se debe al trabajo de las fuerzas no conservativas. En el tramo AC las fuerzas no conservativas son la normal y el rozamiento dinámico. Ya sabemos que el trabajo de la normal es nulo pero qué pasa con el rozamiento. Calculemos, el trabajo será la integral de la fuerza a lo largo de **la trayectoria que recorre su punto de aplicación**, entonces si $d\vec{r}_Q$ es el diferencial de trayectoria del punto de contacto Q tenemos que

$$W_{F_{rd}} = \int_A^C \vec{F}_{rd} \cdot d\vec{r}_Q . \tag{33}$$

Sabemos que $\vec{F}_{rd} = -\mu_d M g\, \hat{x}$, pero ¿cómo se calcula $d\vec{r}_Q$ =?. En principio parece muy simple ya que uno podría argumentar que el punto Q recorre **todo** el trayecto AC cubriendo una distancia d_{CA} (ec. (19)). Esto NO es cierto porque el punto Q durante el tramo AC no sólo desliza sino que también rota. La cinemática de dicho punto está determinada por la condición de rigidez. Lo que hay que hacer en general es lo siguiente. Como

$$\vec{v}_Q = \frac{d\vec{r}_Q}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad d\vec{r}_Q = \vec{v}_Q dt . \tag{34}$$

Ahora está claro que para obtener $d\vec{r}_Q$ debemos conocer v_Q y para ello usaremos la condición de rigidez. Noten en la figura 1 que la velocidad del punto de contacto será:

$$\begin{cases} \vec{v}_Q = v_1\, \hat{x} = \text{cte} & \text{tramo BA} \\ \vec{v}_Q = ?\, (\neq 0) & \text{tramo AC} \\ \vec{v}_Q = 0 & \text{tramo C en adelante} \end{cases} . \tag{35}$$

Vemos que en el tramo BA $d\vec{r}_Q = v_1 dt\, \hat{x}$ con $v_1 = \text{cte}$ y en el tramo C en adelante el desplazamiento del punto Q es nulo porque su velocidad instantánea es nula por estar en rodadura[3]. Para hallar v_Q (y luego $d\vec{r}_Q$) en el tramo AC usamos la condición de rigidez

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_\mathrm{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_\mathrm{CM}) , \tag{36}$$

junto con las ecuaciones (4) y (15). Obtenemos

$$\vec{v}_Q = (v_1 - 3\mu_d g t)\hat{x} \tag{37}$$

[3]Por este motivo el trabajo de cualquier fuerza aplicada sobre el punto de contacto, estando en rodadura, es nulo.

y entonces

$$d\vec{r}_Q = dx_Q\,\hat{x} = v_Q dt\,\hat{x} = (v_1 - 3\mu_d g t)dt\,\hat{x}\,. \tag{38}$$

Ahora sí ya tenemos todo para calcular

$$\begin{aligned} W_{F_{rd}} &= \int_A^C (-F_{rd}\,\hat{x})\cdot(dx_Q\,\hat{x}) = -(\mu_d M g)\int_A^C dx_Q = & (39)\\ &= -(\mu_d M g)\Delta x_Q\,, & (40)\end{aligned}$$

con

$$\Delta x_Q = \int_A^C dx_Q = \int_0^{t_c} v_Q dt = \int_0^{t_c} (v_1 - 3\mu_d g t)dt = \frac{v_1^2}{6\mu_d g}\,. \tag{41}$$

Finalmente

$$W_{F_{rd}} = -\frac{M v_1^2}{6} = \Delta H_{CA}\,. \tag{42}$$

Lo interesante es que Δx_Q es menor a la distancia recorrida por el centro de masa entre en el tramo AC (d_{CA} ec. (19)). De hecho si hubiéremos supuesto que el desplazamiento total del punto Q era d_{CA}, habríamos llegado a que la energía perdida no es igual al trabajo del rozamiento, lo cual representaría un problema importante.

Por último un comentario sobre el tramo C en adelante. Acá la energía se conserva. Sea cual sea la fuerza de rozamiento, la velocidad del punto de contacto en rodadura es nula con lo cual $d\vec{r}_Q = 0$ y así el trabajo es cero. Dinámicamente ya habíamos calculado que en este tramo tanto $\vec{v}_{\mathrm{CM}}$ como $\vec{\omega}$ son constantes y por ende la energía cinética no puede cambiar.

En la siguiente página van a encontrar ..., mentira, terminamos jaja.