Física 1 - Turno A - 1erC 2020 - DF-FCEyN, UBA

Luciano Andrés Masullo

lmasullo@df.uba.ar

Problema 13.4: Péndulo físico.

En este problema revisitamos el sistema del péndulo y estudiamos el caso más realista o *físico* usando conceptos de dinámica cuerpo rígido. Vamos a resolver el caso general de un objeto con una forma genérica y veremos que para ciertos valores de los parámetros se reduce al problema de la barra de largo L del enunciado. Finalmente veremos como se conecta de manera consistente con el modelo de péndulo *simple* de dinámica de masas puntuales que vimos en la Guía 2.

1. Inciso (a)

Consideremos un objeto de forma arbitraria como el de la Figura 1. Sabemos, sin embargo, dónde está su centro de masa CM y que es un cuerpo rígido con un vínculo. Este vínculo es que el cuerpo rígido gira alrededor de un punto P. El eje que pasa por el punto P será entonces un eje **permanente** de rotación y esa juntura (pensemos en algún eje real, una varilla metálica, etc) hará la fuerza de vínculo $\vec{F}_v$ necesaria para que el cuerpo rígido gire alrededor del punto P en el plano perpendicular a ese eje.

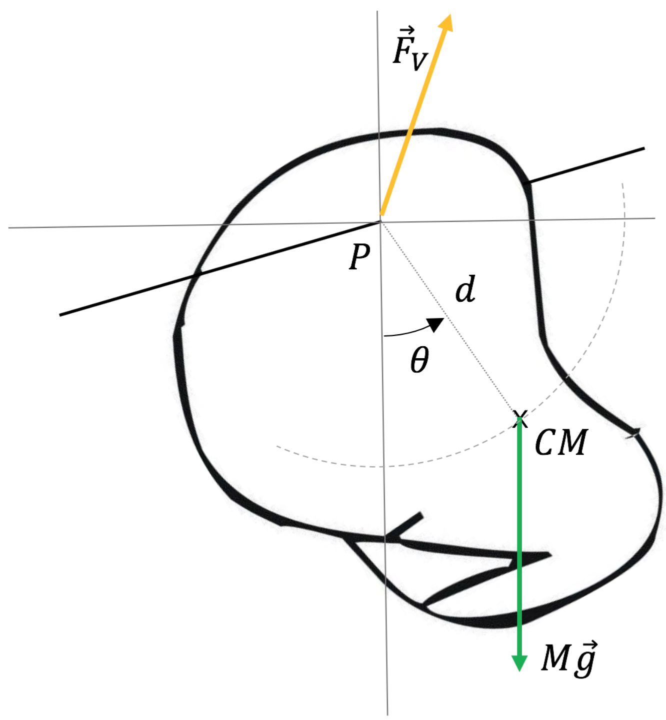

Figura 1: Esquema del péndulo físico. La forma del objeto es totalmente arbitraria, sólo vamos a asumir que conocemos la posición de su centro de masa, que su masa total M y su eje de rotación es el que pasa por el punto P.

Hecho este planteo podemos escribir las fuerzas que actúan sobre nuestro objeto y los puntos dónde actúan (Figura 1). Luego ahora podemos escribir dos conjuntos de ecuaciones: las ecuaciones de Newton de **traslación** y de **rotación**. Veamos las ecuaciones de traslación que describen el movimiento de CM del objeto:

$$\boxed{M\vec{A}_{cm} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}} \tag{1}$$

Para nuestro problema resulta:

$$M\vec{A}_{cm} = M\vec{g} + \vec{F}_v \tag{2}$$

y si elegimos un sistema de coordenadas polares (Figura 1), resulta:

$$\hat{r})\ -Md\,\dot{\theta}^2 = Mg\cos\theta - F_v^r \tag{3a}$$

$$\hat{\theta})\ Md\,\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta + F_v^\theta \tag{3b}$$

Nótese que, a diferencia del caso del péndulo simple la $\vec{F}_v$ podría tener una componente en la dirección $\hat{\theta}$. Veamos ahora las ecuaciones de Newton de rotación. Es muy importante resaltar que en este problema vamos a considerar el momento angular L y los torques $\mathcal{T}$ desde el punto de P por donde pasa el eje permanente de rotación. Queda como tarea resolver el problema respecto del CM (se puede pero involucra pasos extra). Luego, desde el punto P, tenemos:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{(P)}}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{T}}_{i(P)}^{ext}} \tag{4}$$

¿Por qué es conveniente resolverlo respecto del punto P? Vamos a calcular los torques respecto del punto P porque es lo más natural para un sistema que gira alrededor de ese eje: conocemos el valor de $M\vec{g}$ para cada ángulo θ pero no el de F_v^θ. Los torques resultan:

$$\sum_i \vec{\mathcal{T}}_{i(P)}^{ext} = \vec{r}_{CM(P)} \times M\vec{g} + \vec{r}_{P(P)} \times \vec{F}_v \tag{5}$$

donde $\vec{r}_{CM(P)}$ es la posición del CM respecto de P y $\vec{r}_{P(P)}$ es la posición del punto P respecto de sí mismo, que es obviamente $\vec{r}_{P(P)} = 0$. Por otro lado $\vec{r}_{CM(P)} = d\hat{r}$. Donde d es justamente la distancia de P al CM que asumiremos dato (recordemos que dijimos que sabíamos la posición del CM). Luego resulta:

$$\sum_i \vec{\mathcal{T}}_{i(P)}^{ext} = d\hat{r} \times M\vec{g} + 0 \times \vec{F}_v = -Mgd\sin\theta\hat{z} \tag{6}$$

donde usé que $M\vec{g} = Mg\cos\theta\ \hat{r} - Mg\,\text{sen}\,\theta\ \hat{\theta}$. Veamos ahora el término a la izquierda de la ecuación (4). Primero recordemos que, en general, vale que

$$\boxed{\vec{L}_{(P)} = \vec{L}_{CM(P)} + \vec{L}_{(CM)}} \tag{7}$$

luego calculemos el momento angular del CM respecto de P

$$\vec{L}_{CM(P)} = Md\ \hat{r} \times d\dot{\theta}\ \hat{\theta} = Md^2\dot{\theta}\ \hat{z} \tag{8}$$

y también sabemos que $\vec{L}_{(CM)} = I_{CM}\vec{\omega}$ donde $I_{(CM)}$ es el *momento de inercia* del objeto respecto del CM y asociado a la rotación en el plano de este problema. Por otro lado notemos que para nuestro problema $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{z}$, usando (4) y (7) podemos escribir

$$\frac{d\vec{L}_{(P)}}{dt} = Md^2\ddot{\theta}\hat{z} + I_{CM}\ddot{\theta}\hat{z} \tag{9}$$

y usando (6) resulta

$$Md^2\ddot{\theta}\hat{z} + I_{CM}\ddot{\theta}\hat{z} = -Mgd\sin\theta\hat{z} \tag{10}$$

y cancelando los versores $\hat{z}$ y despejando se obtiene

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgd}{I_{CM} + d^2M}\sin\theta \tag{11}$$

¿Les recuerda a algo? ¡Tiene la misma forma que la ecuación del *péndulo simple*! (ver Problema 2.10). Por otro lado vale aclarar que si queremos volver al problema original del enunciado (una barra de largo L) solamente hace falta especificar $d = L/2$ y $I_{CM} = \frac{ML^2}{12}$ que son, respectivamente, la posición radial del CM y el I_{CM} de una barra delgada de largo L.

Analicemos la ecuación (11), si llamamos

$$\frac{1}{l_{eq}} \equiv \frac{Md}{I_{CM} + d^2M} \tag{12}$$

llegamos a

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l_{eq}}\sin\theta} \tag{13}$$

que no es ni más ni menos que la expresión para un péndulo simple de masa M y largo l_{eq} o sea el largo para el cual los resultados del péndulo simple van a ser equivalentes a los del péndulo físico con momento de inercia I_{CM} y distancia del eje de rotación al centro de masa d. Por otro lado, nótese que si concentramos toda la masa del objeto en su centro de masa (aproximación masa puntual y barra sin masa), obtenemos $I_{CM} = 0$ y luego

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgd}{0 + d^2 M} \sin\theta = -\frac{g}{d} \sin\theta \tag{14}$$

y recuperamos la ecuación del péndulo simple con $d \equiv l$. A partir de ahora es evidente que podemos aplicar todas las herramientas que ya conocemos para resolver el problema del péndulo: integrar la ecuación para obtener la velocidad, hacer la aproximación de pequeñas oscilaciones y resolver el oscilador armónico, etc.

Bueno, ahora respondamos lo que concretamente nos pedía el inciso, es decir la velocidad cuando la barra (o nuestro objeto genérico) pasa por $\theta = 0$. Hay que usar el truco de integrar la ecuación (11) sabiendo que $\ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}' d\dot{\theta}' = \int_{\theta_0}^{\theta} -\frac{g}{l_{eq}} \sin\theta' d\theta' \tag{15}$$

y resulta

$$\dot{\theta}^2(\theta) = 2\frac{g}{l_{eq}}(\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{16}$$

En particular para $\theta = 0$ y teniendo en cuenta el sentido del movimiento, resulta

$$\boxed{\dot{\theta}(0) = -\sqrt{\frac{2g}{l_{eq}}(1 - \cos\theta_0)}} \tag{17}$$

Aclaración

Hay otra manera alternativa de resolver el problema usando el *momento de inercia desde P*

$$I_P = I_{CM} + d^2 M \tag{18}$$

donde usé el Teorema de Steiner. Con ese método nos ahorramos[1] usar la ecuación (7). Queda de tarea. Lo importante es ser consistente y no mezclar los razonamientos.

2. Inciso (b)

Hay que encontrar $\vec{F}_v(0) = F_v^r(0)\ \hat{r} + F_v^\theta(0)\ \hat{\theta}$. De las ecuaciones (11) y (3b) se puede ver directamente que $F_v^\theta(0) = 0$ porque en $\theta = 0$ se anulan la acelaración del sistema y la componente en $\hat{\theta}$ del peso. Veamos $F_v^r(0)$ usando la ecuación (3a):

$$F_v^r(0) = Md\dot{\theta}^2(0) + Mg\cos 0 = \frac{Md}{l_{eq}} 2g(1 - \cos\theta_0) + Mg \tag{19}$$

si usamos la expresión explícita de l_{eq} resulta

[1]En realidad los pasos que hicimos antes son la demostración del Teorema de Steiner.

$$\boxed{F_v^r(0) = \frac{M^2 d^2}{I_{CM} + d^2 M} 2g(1 - \cos\theta_0) + Mg} \tag{20}$$

queda de tarea evaluar para el caso concreto de la barra y chequear que se recupera el resultado para la masa puntual ($I_{CM} = 0$).

3. Inciso (c)

Una manera alternativa de resolver el inciso (a) es usando un análisis de la energía del cuerpo rígido. Recordemos que para un campo gravitatorio constante la variación de energía potencial de un cuerpo rígido que sube una altura Δh es

$$\Delta V = \sum_i \delta m_i g \Delta h \tag{21}$$

porque cada parte infinitesimal del rígido δm_i va a subir h sin importar cuál era su posición inicial. Luego si en particular defino $V(y_{CM} = 0) = 0$ y recordando que $\sum_i \delta m_i = M$ entonces

$$V = Mgh \tag{22}$$

donde h es la altura del CM respecto del origen de coordenadas elegido. En particular para nuestro problema vamos a tomar como $y_{CM} = h = 0$ la posición del CM cuando $\theta = 0$

De la Figura 1 es fácil ver con un poquito de trigonometría que la altura inicial del CM es $h = d(1 - \cos\theta_0)$. Por otro lado para la energía cinética T, vamos a tener que $T_i = 0$ y cuando pasa por el punto $\theta = 0$

$$T = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = \frac{1}{2} M (d\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \dot{\theta}^2 \tag{23}$$

Por otro lado sabemos que la energía se conserva porque el trabajo de la fuerzas no conservativas sobre el sistema es nulo (ver Apéndice). Luego podemos usar la conservación de la energía y plantear

$$T_f + V_f = T_i + V_i \tag{24}$$

y luego obtenemos

$$\frac{1}{2}(Md^2 + I_{CM})\dot{\theta}^2(0) = Mgd(1 - \cos\theta_0) \tag{25}$$

de lo cual despejamos

$$\boxed{\dot{\theta}^2(\theta) = \frac{2Mgd}{Md^2 + I_{CM}}(1 - \cos\theta_0) = \frac{2g}{l_{eq}}(1 - \cos\theta_0)} \tag{26}$$

que es lo mismo que habíamos obtenido en el inciso (a). Para conocer el signo de la velocidad, necesitamos nuevamente agregar alguna información extra al análisis energético: el sentido del movimiento.

4. Apéndice

Para ver si la energía de un cuerpo rígido se conserva lo que hay que calcular es, como siempre, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, W_{nc}. Para calcular el trabajo es necesario considerar las fuerzas no conservativas aplicadas en el cuerpo rígido y **el desplazamiento de los puntos donde se aplican las fuerzas**. La fórmula general para un sistema que se mueve de una posición genérica A a otra B, resulta:

$$\boxed{W_{nc} = \sum_i (W_{nc}^i)_{A\to B} = \sum_i \int_{\vec{r}_{iA}}^{\vec{r}_{iB}} \vec{F}_i.d\vec{r}_i} \tag{27}$$

donde el índice i indica cada una de las fuerzas no conservativas actuando y sus respectivos puntos de aplicación. Para el caso de este problema (y cualquiera de la guía) van a tener una o dos fuerzas conservativas y los desplazamientos de los puntos de aplicación asociados. En el caso de este problema el punto de aplicación de $\vec{F}_v$ está fijo, luego $d\vec{r} = 0$, entonces $W_{nc} = 0$ y entonces $\Delta H = 0$