

Guía 9: Ejercicio 4

Gabriel F. Rodríguez Ruiz

gabrielrr96@gmail.com

10 de diciembre de 2020

A continuación va la resolución del péndulo simple de la guía de Trabajo y Energía (ejercicio 4). En el siguiente [enlace](#) hay un applet para poder visualizar el problema. Se puede usar en cualquier navegador web de computadora o celular sin necesidad de saber programar.

1. Motivación

Vamos a revisitarse el problema del péndulo simple resolviéndolo mediante la conservación de la energía. En la guía de dinámica lo resolvimos a partir de las ecuaciones de Newton. Ellas son ecuaciones diferenciales de segundo grado, es decir, contienen derivadas segundas en el tiempo, como por ejemplo:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta. \quad (1)$$

Esto implicaba que se necesitaban dos condiciones iniciales para que quede definido el problema: $\theta(t=0) = \theta_0$ y $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$. Mirando un buen rato la ecuación 1, uno se convencía que no va ser posible conocer la amplitud $\theta(t)$. Entonces había dos posibles caminos a seguir. El primero era restringir el movimiento a pequeñas oscilaciones. El otro camino era no ser tan ambicioso y olvidarse de pretender conocer $\theta(t)$. Aún así, uno podía conocer los puntos de equilibrio, los puntos de retorno, los posibles movimientos, etc. Si uno decidía tomar el segundo camino, uno debía integrar la ecuación 1 para obtener $\dot{\theta}(\theta)$.

¿Pero entonces, por qué partir de ecuaciones de segundo orden, si lo que uno primero hace es integrarlas? El método de la clase de hoy va a partir de una integral de movimiento, es decir, una magnitud que se conserva (la energía mecánica). ¿Qué ventajas tiene este método? Es más directo, porque no se necesitan integrar las ecuaciones de movimiento. Es más sencillo, porque se trabaja con ecuaciones diferenciales de primer orden. Es más general, porque se necesita un sólo dato del problema: el valor de la energía mecánica.

Sin embargo, el método es inútil, si uno quiere estudiar un péndulo amortiguado, como el péndulo de la guía de oscilador armónico. Principalmente, por la presencia de la fuerza de rozamiento viscoso. Es una fuerza no conservativa que realiza trabajo, por lo cual la energía mecánica no se conserva. La energía mecánica se transforma en otras formas de energía, como por ejemplo calor.

a)

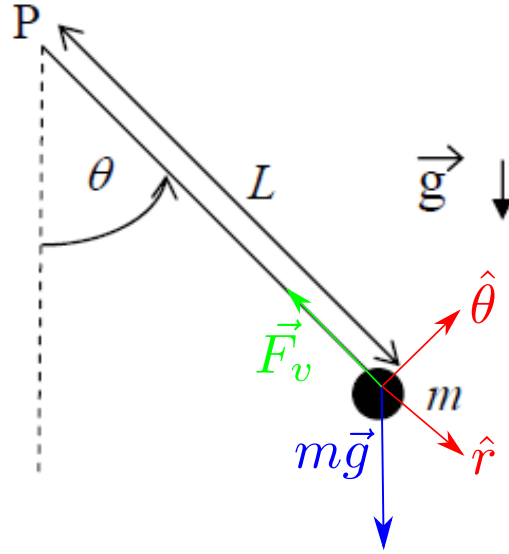


Figura 1: Péndulo simple.

En el péndulo simple (despreciando cualquier tipo de rozamiento) las fuerzas involucradas son la fuerza de vínculo $\mathbf{F}_v$,

$$\mathbf{F}_v = F_v \hat{r}, \quad (2)$$

y el peso,

$$\mathbf{P} = mg(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}). \quad (3)$$

La fuerza de vínculo no realiza trabajo porque es perpendicular a la trayectoria en todo momento. Veamos eso calculando el trabajo entre dos puntos, A y B, de la trayectoria,

$$W_{AB}^{F_v} = \int_A^B \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B (F_v \hat{r}) \cdot (L d\theta \hat{\theta}) = 0, \quad (4)$$

donde se usó el diferencial de trayectoria $d\mathbf{r} = L d\theta \hat{\theta}$.

La fuerza peso, es una fuerza conservativa y realiza trabajo.

$$\begin{aligned} W_{AB}^P &= \int_A^B \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B (mg(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})) \cdot (L d\theta \hat{\theta}) \\ &= \int_0^\theta -mg \sin \theta' L d\theta' = Lmg(\cos \theta - 1). \end{aligned} \quad (5)$$

Como el trabajo de las fuerzas conservativas es la variación de la energía potencial cambiada de signo,

$$W_{AB}^P = -\Delta V = -(V(B) - V(A)) \quad (6)$$

resulta que

$$W_{AB}^P = Lmg(\cos \theta - 1) = -(V(\theta) - V(0)). \quad (7)$$

Como la energía potencial está definido a menos de una constante, podemos elegir el cero de potencial donde nos guste. Por ejemplo si $V(\frac{\pi}{2}) = 0$.

$$V(\theta) = -Lmg \cos \theta \quad (8)$$

La forma de verificar la ecuación anterior es recordar que cuando suben los objetos ganan energía potencial. Es decir si $\theta > 0$ y aumenta, $V(\theta)$ también debe aumentar.

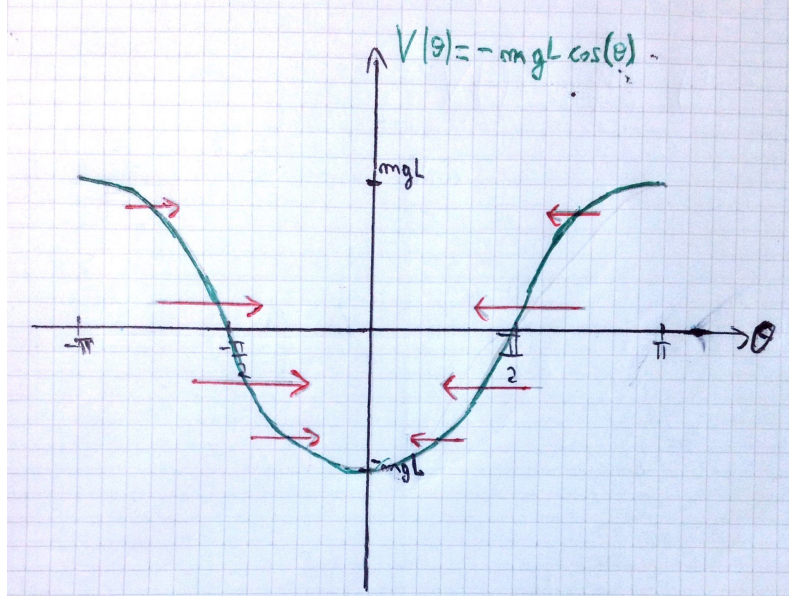


Figura 2: Energía potencial para un péndulo simple. Las flechas indican el sentido de la fuerza sobre la masa.

Se pueden reconocer el valor máximo $V_{m\acute{a}x} = mgl$ y mínimo $V_{m\acute{i}n} = -mgl$ como los valores que toma el potencial cuando se anula su derivada. Recordando que en general para una fuerza conservativa $\mathbf{F}$ en una dimensión (o cuando el problema depende de una sóla variable)

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}, \quad (9)$$

los puntos de equilibrio corresponderán a los extremos del potencial. En particular en nuestro problema $x \equiv \theta$,

$$F(\theta_{eq}) = 0 \implies \frac{dV}{d\theta}(\theta_{eq}) = 0. \quad (10)$$

Luego $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ son posiciones de equilibrio. Para analizar su estabilidad podemos traducir lo que ya sabemos para la fuerza

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF}{d\theta}(\theta_{eq}) > 0 \implies -\frac{d^2V}{d\theta^2}(\theta_{eq}) > 0 \implies \text{equilibrio inestable} \\ \frac{dF}{d\theta}(\theta_{eq}) < 0 \implies -\frac{d^2V}{d\theta^2}(\theta_{eq}) < 0 \implies \text{equilibrio estable} \end{array} \right. \quad (11)$$

Luego $\theta_{eq} = 0$ es estable y $\theta_{eq} = \pi$ es inestable.

b)

En este ítem nos dan el dato del valor de la energía mecánica E . Con ese dato y conociendo la forma del potencial se pueden sacar conclusiones sobre los posibles movimientos. Para ello recordemos que

$$E = T + V \quad (12)$$

con

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0. \quad (13)$$

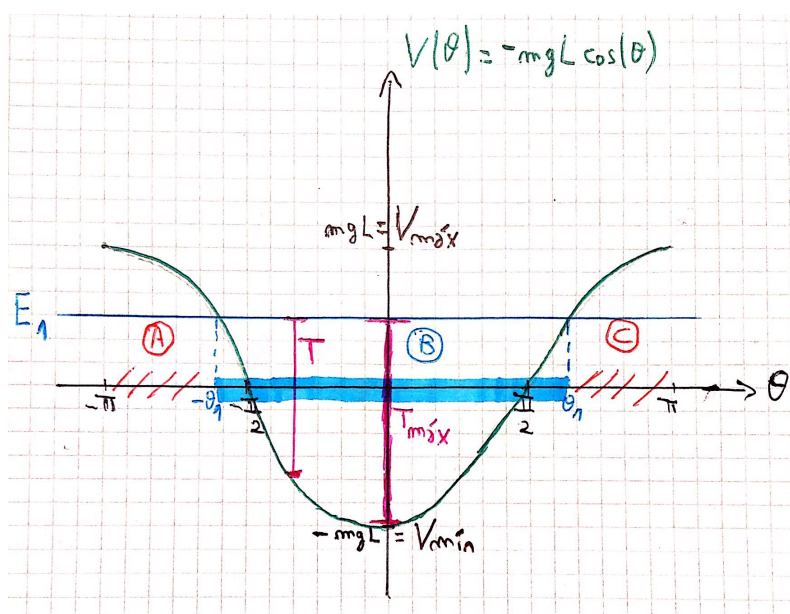


Figura 3: Movimiento del cuerpo para $E_1 < V_{\max}$.

Por ejemplo, si nos dicen que $E = E_1 < V_{\max}$, se pueden reconocer tres regiones en el eje θ . La región A está prohibida para la masa porque en ella, si $\theta \in (-\pi, -\theta_1)$:

$$T = E_1 - V(\theta) < 0 \quad (14)$$

lo cual es imposible. De la misma manera, en la región C tampoco vamos a poder encontrar a la masa, porque eso implicaría tener una energía cinética negativa. Luego, vamos a estar seguros que todo el movimiento estará restringido a la región B, en la que $\theta \in (-\theta_1, \theta_1)$. Más aún, la energía cinética es máxima en $\theta = 0$ por lo que allí la velocidad es máxima. Además podemos identificar los puntos de retorno en los extremos de la región B, es decir cuando toda la energía mecánica es energía potencial y por ende la velocidad es nula. En definitiva, la masa oscila en la región B.

¿Cómo se haría en la práctica para obtener un movimiento con energía mecánica E_1 ? Como la energía mecánica se conserva basta ver qué condiciones iniciales son necesarias para que inicialmente el sistema tenga energía E_1 . Esa energía será constante en todo el movimiento y está dada por su definición:

$$E_1 = T + V = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL \cos \theta. \quad (15)$$

Una opción sería que inicialmente toda la energía mecánica sea toda energía potencial $E_1 = V = -mgL \cos \theta_1$, lo cual equivale a $\theta(t = 0) = \theta_1$ y $\dot{\theta}(t = 0) = 0$. Otra opción sería que toda la energía mecánica sea inicialmente energía cinética $E_1 = T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_1^2$. ¿Hay más opciones? Toda combinación de energía cinética y potencial que cumpla con la ecuación 15 resultará en el mismo movimiento.

El módulo de la velocidad angular $|\dot{\theta}(\theta)|$ se puede graficar cualitativamente de la siguiente manera.

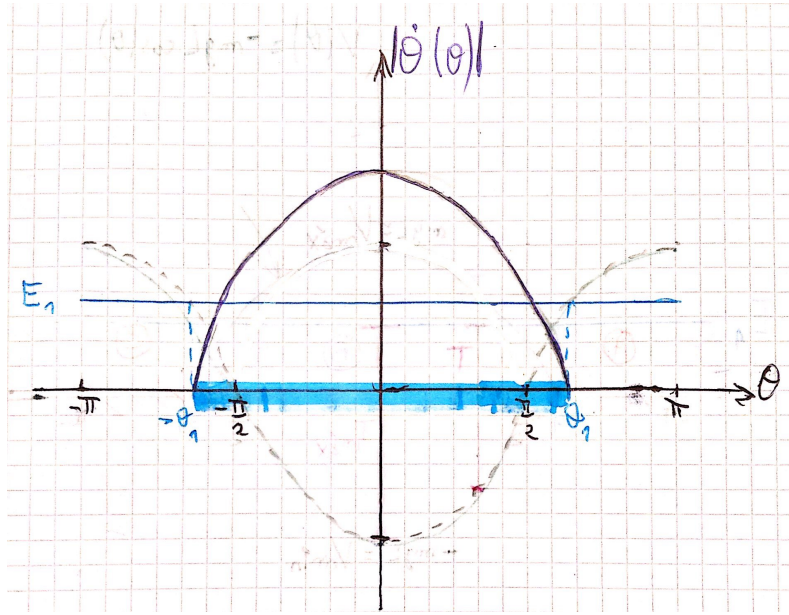


Figura 4: Velocidad angular para una energía $E_1 < V_{\text{máx}}$.

También podemos encontrar su expresión de la siguiente manera.

$$E = T + V = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL \cos \theta \quad (16)$$

$$E + mgL \cos \theta = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \implies |\dot{\theta}(\theta)| = \sqrt{\frac{2}{mL^2} (E + mgL \cos \theta)} \quad (17)$$

Veamos el caso en que la energía mecánica es $E_2 = V_{\text{máx}}$.

Del gráfico vemos que el movimiento está restringido a $\theta \in (-\pi, \pi]$. Una forma para preparar el sistema con energía $E_2 = V_{\text{máx}}$ es que inicialmente toda la energía mecánica sea potencial, en ese caso la masa se queda indefinidamente en su posición de equilibrio inestable en $\theta = \pi$. Sin embargo, no es muy realista considerar que esto sea posible. Probablemente soltemos al péndulo con una amplitud inicial $\theta_0 = \theta + \delta\theta$ con $\delta\theta \ll 1$. ¿Qué sucedería en ese caso? El péndulo se va alejar del punto de equilibrio inestable. ¿Pero en cuánto tiempo?

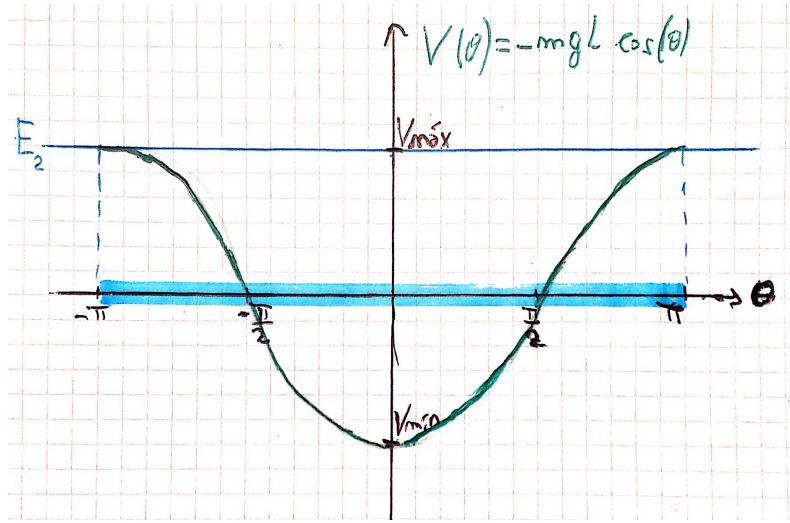


Figura 5: Movimiento del cuerpo para $E_1 = V_{máx}$.

Busquemos entonces expresar el período de oscilación en función de la energía. Para ello, invertimos la ecuación 17

$$\left| \frac{dt}{d\theta} \right| = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{mL^2} (E + mgL \cos \theta)}} \quad (18)$$

y la integramos en una oscilación entera, o lo que es lo mismo, integrar cuatro veces en un cuarto de ciclo,

$$\tau = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{mL^2} (E + mgL \cos \theta)}} d\theta = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{mL^2} (mgL + mgL \cos \theta)}} d\theta. \quad (19)$$

$$\tau = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{\sqrt{\frac{L}{2g}}}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta = \sqrt{\frac{L}{g}} f(\theta_0) \quad (20)$$

con $f(\theta_0)$ una función adimensional. Luego, vemos que el integrando diverge en la medida que la amplitud inicial $\theta_0 \rightarrow \pi$. ¿Divergerá también la integral? Numéricamente se puede probar que sí (usando WolframAlpha ([enlace](#)))

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow \pi} \tau = +\infty \quad (21)$$

Es decir, un péndulo con la energía mecánica justa para llegar a $\theta = \pi$ no llega nunca. De la misma manera, un péndulo que empieza cerca de la posición de equilibrio inestable puede tardar mucho tiempo hasta que caiga.

En el caso que $E_3 > V_{m\acute{a}x}$, se puede ver en la figura que la energía cinética no se anula nunca. Eso quiere decir que el péndulo se mantendrá en rotación. Con la particularidad de disminuir su velocidad cuando se acerca a $\theta = \pi$ y se acelera al alejarse.

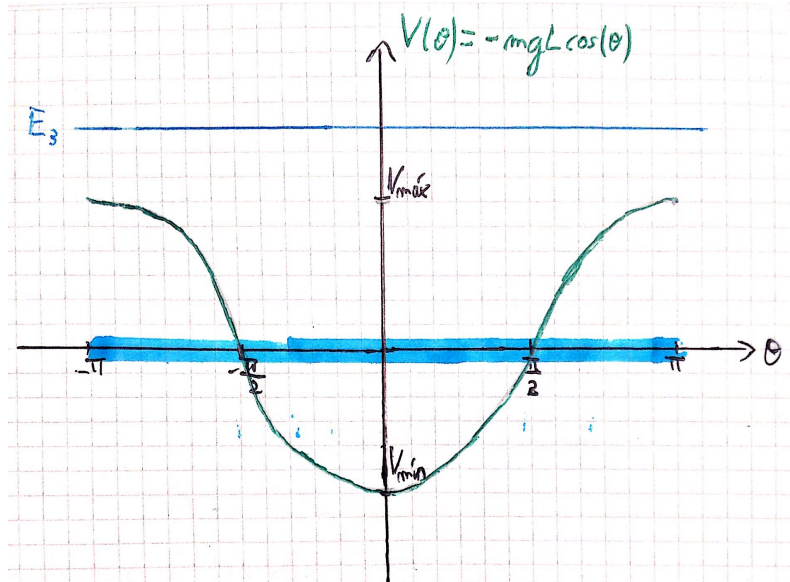


Figura 6: Movimiento del cuerpo para $E_3 > V_{m\acute{a}x}$.