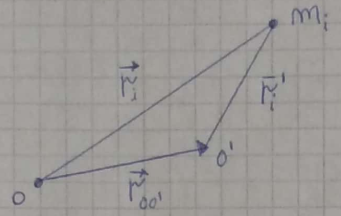
Ecuación de los torques desde un origen arbitrario



O: Origen de un sistema de referencia inercial

O': Origen arbitrario que podría estar acelerado

$\vec{r}_i = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}_i'$; $\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_{OO'} + \dot{\vec{r}}_i'$ $\qquad \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_i)$

$$\vec{\tau}_{O'} = \sum_{i=1}^{m} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i' \times \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_i) = \sum \vec{r}_i' \times \frac{d}{dt}\left[m_i(\dot{\vec{r}}_{OO'} + \dot{\vec{r}}_i')\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \vec{r}_i' \times \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_{OO'}) + \vec{r}_i' \times \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_i')$$

$$= \sum_{i=1}^{m} m_i \vec{r}_i' \times \ddot{\vec{r}}_{OO'} + \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{r}}_i'\right)$$

donde usé que $\dot{\vec{r}}_i' \times m \dot{\vec{r}}_i' = 0$ para reescribir el segundo término

$$\tau_{O'} = -\ddot{\vec{r}}_{OO'} \times \sum_{i=1}^{m} m_i \vec{r}_i' + \frac{d}{dt}\vec{L}_{O'}$$

por lo tanto $\vec{\tau}_{O'} = \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt}$ si $+\ddot{\vec{r}}_{OO'} \times \sum_{i=1}^{m} m_i \vec{r}_i' = 0$

y esto sucede en tres situaciones posibles:

1) $\ddot{\vec{r}}_{OO'} = 0$, es decir, O' no se acelera respecto de O

2) $\sum_{i=1}^{m} m_i \vec{r}_i' = 0$, es decir, O' es el centro de masa.

3) $\sum_{i=1}^{m} m_i \vec{r}_i' = M \vec{r}_c'$ con $\vec{r}_c'$ un vector que apunta al CM siempre, $\Rightarrow$ Si $\sum_{i=1}^{m} m_i \vec{r}_i'$ es paralelo a $\ddot{\vec{r}}_{OO'}$, el producto vectorial se anula, y esto ocurre entonces siempre que $\ddot{\vec{r}}_{OO'}$ es un vector dirigido hacia el CM.