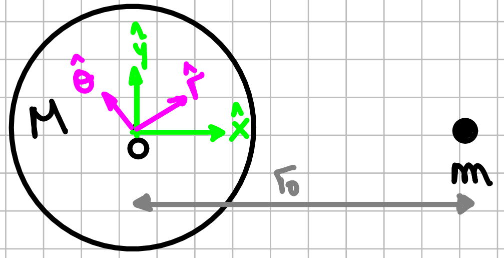
2




a) $\Sigma \bar{F}^{ext} = \bar{F}_g \neq 0 \Rightarrow \bar{P}$ no se conserva.

$\Sigma \bar{\tau}_O^{ext} = \bar{\tau}_O^{F_g} = r\hat{r} \times F_g \hat{r} = 0 \Rightarrow \bar{L}_O$ se conserva.

$W_{NC} = 0$ pues la única fuerza involucrada es conservativa
$\Rightarrow$ E se conserva.

b) $E = T + V = \frac{1}{2} m |\bar{v}|^2 + V_g = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r}$

Por otro lado,

$$\bar{L}_O^i = \bar{r}_0 \times (m \bar{v}_i) = m r_0 \hat{r} \times v_0 \hat{\theta} = m r_0 v_0 \hat{z}$$

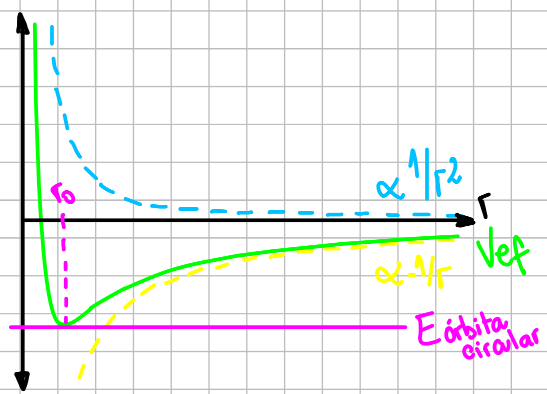
$$\bar{L}_O = \bar{r} \times (m \bar{v}) = m r \hat{r} \times (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}) = m r^2 \dot{\theta} \hat{z}$$

Como $\bar{L}_O$ se conserva, $m r_0 v_0 = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{r^2}$

Reemplazando en la energía,

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{r_0 v_0}{r^2}\right)^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{m r_0^2 v_0^2}{2 r^2} - \frac{GMm}{r}}_{\text{Potencial Efectivo } V_{ef}(r)}$$

c) Gráfico Vef(r) (no se pide pero sirve para entender).




Queremos averiguar $v_0$ / la partícula haga una órbita circular en $r = r_0$.

Para esto necesitamos $\left.\frac{\partial V_{ef}}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0$

$$\left.\frac{\partial V_{ef}}{\partial r}\right|_{r_0} = \left.\left(-\frac{m r_0^2 v_0^2}{r^3} + \frac{GMm}{r^2}\right)\right|_{r_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0} \Leftrightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}}$$

d) Ocurre una explosión, la masa se parte en dos pedazos iguales y uno cae radialmente con $v_2 = 2v_0$

En la explosión se pierden las conservaciones que teníamos hasta ahora, pero el tiempo en el que ocurre la explosión es infinitesimalmente pequeño, entonces:

$\Delta \bar{P} = \bar{F} \cdot \Delta t \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$ $\Rightarrow$ Podemos igualar el impulso lineal JUSTO ANTES de la explosión al de JUSTO DESPUÉS

$\rightarrow \bar{P}_a = m v_0 \hat{\theta} = \bar{P}_d = \frac{m}{2} \bar{v}_1 + \frac{m}{2}(-2v_0 \hat{r})$

$\bar{v}_1 = v_{1r} \hat{r} + v_{1\theta} \hat{\theta}$ $\Rightarrow$ $m v_0 \hat{\theta} = \left(\frac{m}{2} v_{1r} - m v_0\right) \hat{r} + \frac{m}{2} v_{1\theta} \hat{\theta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m v_0 = \frac{m}{2} v_{1\theta} \Rightarrow v_{1\theta} = 2v_0 \\ 0 = \frac{m}{2} v_{1r} - m v_0 \Rightarrow v_{1r} = 2v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{v}_1 = 2v_0 \hat{r} + 2v_0 \hat{\theta}}$$

Además, queremos saber si la masa que NO CAE (1) tendrá un mov. ligado. Como la nueva partícula tendrá un potencial efectivo con la misma forma que la anterior, hará un mov. LIGADO si su Energía inicial es menor a cero.

Entonces, $E_1^i = \frac{1}{2}\frac{m}{2} v_1^2 - \frac{GM(m/2)}{r_0} = \frac{m}{4}(4v_0^2 + 4v_0^2) - \frac{GMm}{2r_0}$

$$= 4mv_0^2 - \frac{GMm}{2r_0} = 4\frac{GMm}{r_0} - \frac{GMm}{2r_0} = \frac{3}{2}\frac{GMm}{r_0} > 0$$

$\uparrow$ $v_0^2 = \frac{GM}{r_0}$

$\Rightarrow$ El movimiento no es ligado.

(¿Cuál es su movimiento?)