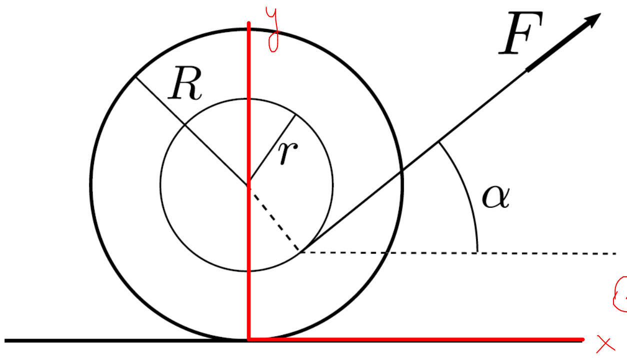
# Ejercicio 3




Como todo ejercicio de cuerpo rígido las ec. dinámicas son

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \ddot{\vec{X}}_{cm} \quad \dot{\vec{v}}_{cm}$$

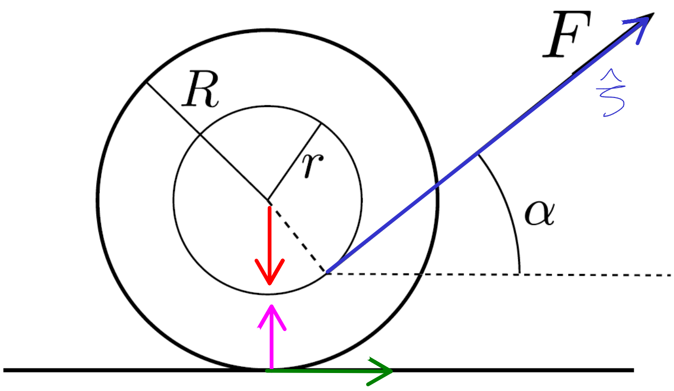
$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \bar{\bar{I}}\, \dot{\vec{\Omega}}$$

Como suponemos un mov. contenido en el plano $\vec{\Omega} = \omega \hat{z}$

→ $\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\omega} \hat{z}$. Además, el tensor de inercia se reduce

a $\bar{\bar{I}} \to I = \frac{1}{2} M R^2$

Las fuerzas externas son:




$$\vec{P} = -Mg\,\hat{y}$$

$$\vec{F}_R = F_R\,\hat{x}$$

$$\vec{N} = N\,\hat{y}$$

$$\vec{F} = F\,\hat{s}$$

En donde $\hat{s} = \cos\alpha\,\hat{x} + \sin\alpha\,\hat{y}$. Luego, tomando $\vec{v}_{cm} = v\,\hat{x}$

→ $M\dot{v} = F\cos\alpha + F_R \quad (\hat{x})$ Ec. de Newton

$0 = N + F\sin\alpha - Mg \quad (\hat{y})$

Veamos los torques:

$$I\dot{\omega}\hat{z} = (-R\,\hat{y}) \times (F_R\,\hat{x}) + r\,\hat{r} \times (F\,\hat{s})$$

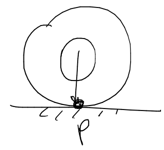
Versor que une el centro del cilindro con el punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}$

Usando que: $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$ y $\hat{r} \perp \hat{s} \Rightarrow \hat{r} \times \hat{s} = \hat{z}$

$$\Rightarrow \quad I\dot{\omega} = RF_R + rF$$

Ec. de Torques.

Si se cumple la cond. de rodadura $\vec{v}_p = 0$



y $F_R \rightarrow F_{Re}$ "estático"

La cond. de rigidez impone $\vec{v}_{CM} = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_p)$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{CM} = \vec{\Omega} \times (R\hat{y}) \Rightarrow v\hat{x} = -\omega R\,\hat{x}$$

$$\Rightarrow \quad v = -\omega R \rightarrow \dot{v} = -\dot{\omega} R$$

Juntando las ec. se obtiene:

$$I\dot{\omega} = RF_{Re} + rF \quad (1)$$

$$-MR\dot{\omega} = F\cos\alpha + F_{Re} \quad (2) \rightarrow -MR^2\dot{\omega} = RF\cos\alpha + RF_{Re}$$

$$0 = N + F\sin\alpha - Mg \quad (3) \rightarrow N = Mg - F\sin\alpha$$

Restando $(1) - R(2) \Rightarrow (I + MR^2)\dot{\omega} = (r - R\cos\alpha)F$

$$\rightarrow \quad \boxed{\dot{\omega} = \left(r/R - \cos\alpha\right)\frac{FR}{I + MR^2}}$$

Según lo planteado, si $\begin{cases} \omega > 0 \Rightarrow v < 0 \\ \omega < 0 \Rightarrow v > 0 \end{cases}$

Por lo tanto, si

$\cos\alpha > r/R \Rightarrow$ El cilindro avanza hacia la derecha!

Una vez encontrado $\dot{\omega}$ podemos hallar $F_{Re}$ necesaria para mantener la rodadura.

$$\rightarrow F_{Re} = -F\cos\alpha - MR\dot{\omega}$$

$$= -F\cos\alpha + \frac{MR^2}{I+MR^2}\left(\cos\alpha - r/R\right)F$$

$$F_{Re} = -\frac{MR^2}{I+MR^2}\left[\frac{I\cos\alpha}{MR^2} + \frac{r}{R}\right]F$$

Como sabemos $|F_{Re}| \leq \mu_e N$ y $N = Mg - F\sin\alpha$

Dado que $F \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{MR^2}{I+MR^2}\left[\frac{I\cos\alpha}{MR^2} + \frac{r}{R}\right]F \leq \mu_e Mg - \mu_e F\sin\alpha$$

$$\rightarrow F \leq \mu_e Mg \frac{(I+MR^2)}{\left[I(\cos\alpha + \mu_e\sin\alpha) + \mu_e MR^2\sin\alpha + MRr\right]}$$

Si $\alpha = 0$ $\Rightarrow F \leq \mu_e Mg \dfrac{I+MR^2}{I+MRr}$

Preguntas que quedan colgando...

¿Que pasa si pongo la $F_{Re}$ para el otro lado?

¿Para un ángulo $\alpha$ arbitrario, $F$ sólo está acotada por el rozamiento?

¿Que ocurre si $\cos\alpha = r/R$? ¿No se mueve?