Dinámica de cuerpo rígido, clase 3.

Energía

Vimos en clases anteriores que para un sistema cualquiera de partículas, $\boxed{K = K_{CM} + \frac{1}{2} M V^2}$, donde:

→ K = energía cinética total

→ $K_{CM} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2$ = energía desde el C.M.

→ M = masa total

→ $V = \dot{R}$ = velocidad del C.M.

→ $\frac{1}{2} MV^2$ = energía cinética del C.M.

Para un cuerpo rígido, la única forma en que las partículas que lo componen se pueden mover alrededor del C.M. sin violar la condición de rigidez es si su distancia relativa al C.M. no cambia con el tiempo, es decir, en una rotación.

Eso quiere decir que $\vec{v}_i' = \vec{\Omega} \times \vec{r}_i' \Rightarrow v_i' = \Omega d_i$

(d_i = distancia al eje de rotación)

$$\Rightarrow K_{CM} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i d_i^2 \Omega^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_i m_i d_i^2\right)}_{I}\Omega^2$$

[redacted] Entonces,

$$K = \underbrace{\frac{1}{2} I \Omega^2}_{\text{E. cinética de rotación (C.M)}} + \underbrace{\frac{1}{2} M V^2}_{\text{E. cinética de traslación (C.M.)}}$$

Si además la rotación ocurre alrededor de un eje principal, como son todos los casos que vamos a ver en la materia, entonces $\mathbf{L} = I\Omega$, luego

$$\frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$ y la energía cinética K_{CM} se puede escribir en términos de L.

Vimos también que para un sistema de partículas,

$$U_{int} = \sum_{\substack{\text{pares} \\ i>j}} U_{ij}(|r_i - r_j|)$$, que depende de la distancia relativa entre todos los pares de partículas.

Como en un cuerpo rígido estas distancias relativas son constantes, la energía potencial interna U_{int} es constante. (Ésto no es necesariamente válido para un cuerpo deformable).

Si las únicas fuerzas F^{ext} que actúan son conservativas, entonces $E = K + U$ es constante.

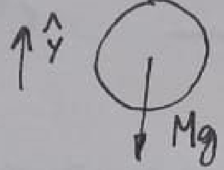
$$\Rightarrow E = K_{CM} + \frac{1}{2} M V^2 + \boxed{\cancel{U_{int}}} + U_{ext}$$

Esto es constante así que no lo tengo que tener en cuenta (desaparece en ΔE)

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} I \Omega^2 + \frac{1}{2} M V^2 + U_{ext}$$

U_{ext} es la energía potencial asociada a las $\vec{F}^{ext}$ conservativas.

Por ejemplo

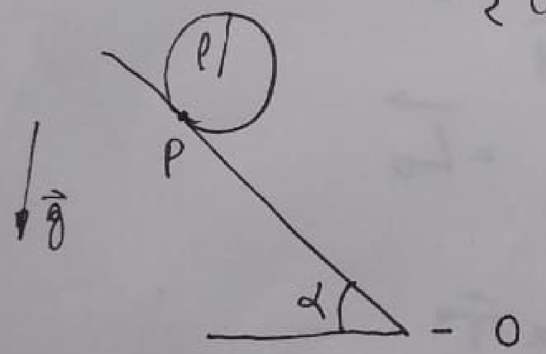


$\vec{F}_{ext} = -Mg\hat{y} \Rightarrow$

$U_{ext} = Mgy$

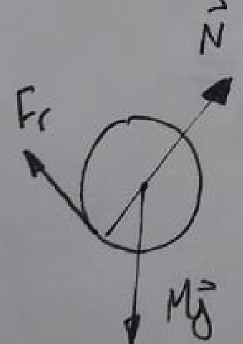
coordenada y del C.M.

Veamos de nuevo el caso de un cuerpo rígido rodando sin deslizar por un plano inclinado:



¿Con que velocidad llega a 0?

Podemos resolverlo como en la clase anterior calculando $\ddot{R}$. Vamos a resolverlo usando la conservación de la e. mecánica



$W_N = 0$ ($\perp$ a la dirección de movimiento)

$W_{F_r} = 0$ (porque en rodadura, $\vec{v}_P = 0$ y por lo tanto no hay desplazamiento del punto donde está aplicada)

$\Rightarrow$ E conserva.

$V = \rho\Omega$ (rodadura)

$$\boxed{E_i = E_f}$$

$$E = \frac{MV^2}{2} + \frac{I\Omega^2}{2} + Mgy = \frac{MV^2}{2} + \frac{IV^2}{2\rho^2} + Mgy$$

Si inicialmente, $V=0$, $\Omega=0$ entonces

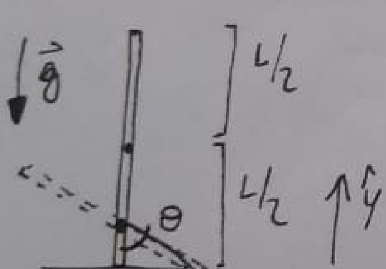
$$Mgy_0 = \frac{MV^2}{2} + \frac{IV^2}{2\rho^2} = \left(M + \frac{I}{\rho^2}\right)\frac{V^2}{2}$$

$$V = \sqrt{\frac{2Mgy_0}{M + \frac{I}{\rho^2}}}$$

Para el caso de un disco sólido, $I = \frac{M\rho^2}{2}$, entonces

$$V = \sqrt{\frac{2Mgy_0}{M + \frac{M\cancel{\rho^2}}{2\cancel{\rho^2}}}} = \sqrt{\frac{4gy_0}{3}} = \boxed{2\sqrt{\frac{gy_0}{3}}}$$

Ejemplo 2: Un palito que cae.



Tenemos un palo apoyado verticalmente. Lo apartamos muy poquito de la vertical. En alguna clase pasada, vimos que como no hay fuerzas horizontales, el C.M. únicamente puede seguir una trayectoria recta hacia el piso.

Pregunta: ¿ Velocidad del C.M. como función de θ ?

Rta: Claramente no podemos tratar al problema como una caída libre del C.M., porque sí hay fuerzas horizontales (fuerza normal de la mesa)

Ahora, el punto del palito en contacto con la mesa se mueve siempre horizontal y $\perp$ a $\vec{N}$. Luego, $W_{\vec{N}} = 0$.

$E = cte.$, $E_i = E_f$

La energía inicial $E_i = K_i + U_i = Mg\frac{L}{2}$ (L = longitud del palito)

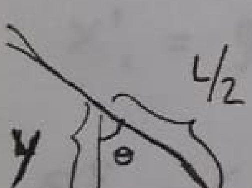
En un momento arbitrario posterior,

Mgy

$$E = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M\dot{y}^2 + \text{[redacted]}$$

Entonces, $Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M\dot{y}^2 + Mgy$

Pero, existe una relación entre θ, y :



$$\cos\theta = \frac{y}{L/2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{L}{2}\cos\theta}$$

derivo respecto de t de ambos lados

$$\dot{y} = -\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{2\dot{y}}{L\operatorname{sen}\theta}$$

Entonces,

$$\frac{MgL}{2} = \frac{1}{2} I\left(\frac{2\dot{y}}{L\operatorname{sen}\theta}\right)^2 + \frac{1}{2} M\dot{y}^2 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

De acá puedo despejar $\dot{y}(\theta)$

$$\frac{MgL}{2} = \left[\frac{2I}{L^2 \operatorname{sen}^2\theta} + \frac{M}{2}\right]\dot{y}^2 + \frac{MgL\cos\theta}{2}$$

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{\frac{MgL(1-\cos\theta)}{2}}{\frac{2I}{L^2 \operatorname{sen}^2\theta} + \frac{M}{2}}}$$

PROCESO

① Escribimos la energía cinética [redacted] de forma más general

[redacted]

$$K = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{M\dot{y}^2}{2}$$ [redacted]

② Escribimos la energía potencial de forma más general

$$U = Mgy$$

③ Escribimos el vínculo entre las variables,

$$y = \frac{L}{2}\cos\theta$$

④ Metimos todo en la energía E, y despejamos $\dot{y}(\theta)$. Como siempre, el tiempo desapareció.

Si queremos $y(t)$, $\theta(t)$ tendríamos que escribir las ecuaciones de movimiento, con los vínculos, etc.

Ahora, ¿qué son exactamente las fuerzas de vínculo?

Son fuerzas que valen lo que tienen que valer para que se cumpla un vínculo entre las variables.

En este caso, $y = \frac{L}{2}\cos\theta$.

Pero entonces, ¿por qué tengo que molestarme en escribir las fuerzas de vínculo? ¿si yo ya dije que $y = \frac{L}{2}\cos\theta$? Una vez que ya identifiqué cual es el vínculo, ¿ya no es superfluo preocuparme por las fuerzas de vínculo?

Idea Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813)
William Rowan Hamilton (1805 - 1865)

Definamos $\mathcal{L}$, el Lagrangiano, como

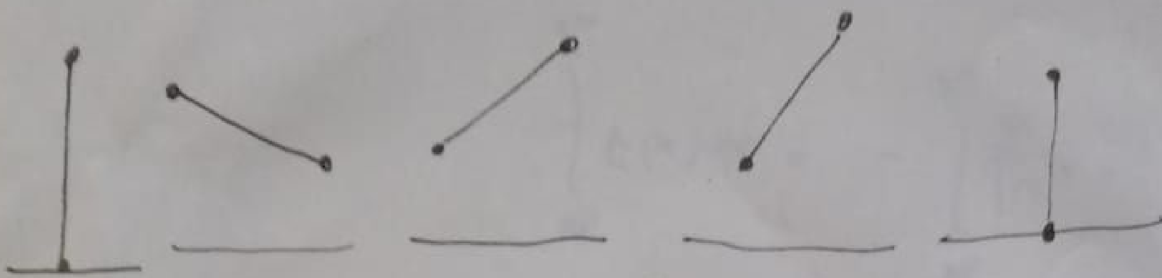
$$\mathcal{L} = K - U$$

$$\left.\begin{matrix} y, \dot{y} \\ \theta, \dot{\theta} \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} \text{pero} \\ y = \frac{L}{2}\cos\theta \\ \\ \dot{y} = -\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} \end{matrix}$$

Entonces puedo expresar todo en términos de $\theta, \dot{\theta}$

$$\mathcal{L} = \overbrace{\frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{L^2}{8}M\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\theta}^2}^{K} - \overbrace{\frac{Mg}{2}L\cos\theta}^{U} = \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta})$$

Nosotros no sabemos cómo es realmente $\theta(t)$



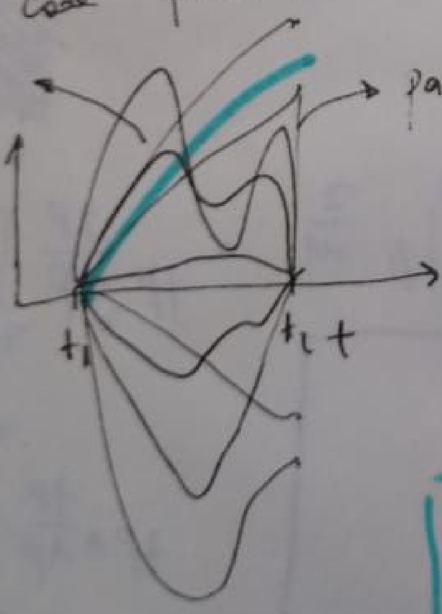
esto es una trayectoria posible consistente con el vínculo.

Pero no importa, supongamos que sabemos cuál es, entonces podríamos calcular

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\theta(t),\dot{\theta}(t))\,dt = \int_{t_1}^{t_2} K(\theta(t),\dot{\theta}(t)) - U(\theta(t),\dot{\theta}(t))\,dt$$

Para cada función $\theta(t)$ posible, tenemos S

Camino real



para cada curva puedo calcular S.

Pero el movimiento no sigue cualquier curva.

El movimiento real sigue una única curva.

El camino real es el que minimiza S

(Hamilton)

(Más generalmente, es S estacionario)
Si yo cambio un poquito el camino real, S cambia muy poquito.

Feynmann: Esta idea se puede aplicar en mecánica cuantica relativista

---

Si uno pide que esto valga, entonces, al calcular

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

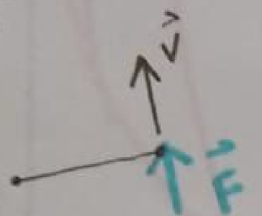
Ecuaciones de Euler-Lagrange

Si uno computa esto, salen las ecuaciones de movimiento para θ con los vínculos ya eliminados

(Mecánica Clásica en adelante).

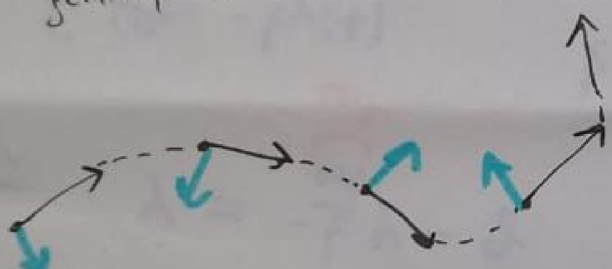
Precesión giroscópica

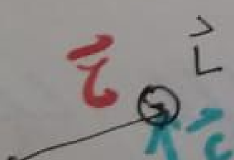
El movimiento de los giroscópos se considera generalmente anti-intuitivo porque $\vec{L}$ se modifica mediante torques, y los torques son perpendiculares a las fuerzas que hacemos. Para entender mejor, tenemos que pasar al "mundo del producto vectorial"



en el $\boxed{\text{mundo "real"}}$, si aplicamos una fuerza sobre un objeto quieto, $\vec{v} \parallel \vec{F}$.

En general, la velocidad "pesigue" a la fuerza

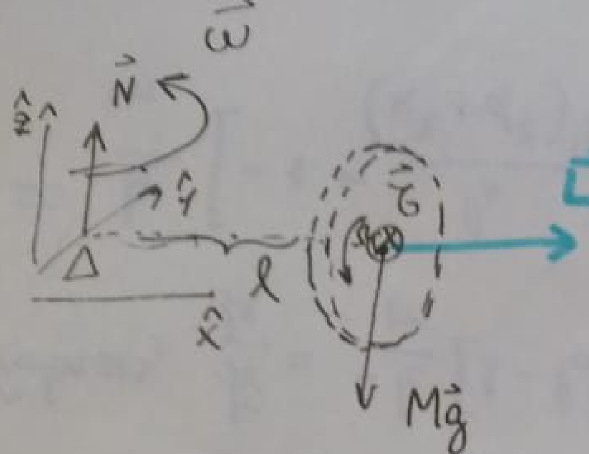




en el "mundo del producto vectorial", si aplicamos una fuerza, $\vec{L}$ no se desplaza // a $\vec{F}$, sino que sigue al torque. Y el torque está a $\perp$ de la F.

El momento angular "persigue" al torque.

¡Lo anti-intuitivo es que aplicamos fuerzas... pero las cosas se mueven como si esas fuerzas estuviesen aplicadas a 90°!



el τ va a hacer girar el eje hacia el centro de la hoja.

En ese momento, el L_{Tot} pasa a ser:

$$\vec{L}_{Tot} = \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}}_{\text{orbital}} + \underbrace{\vec{L}}_{\text{spin}}$$

Supongamos que la precesión es lenta, o sea $L >> R \times P$.

En ese caso, prácticamente todo el momento angular es de spin.

Ocurre precesión con $\vec{\omega} \,//\, \hat{z}$.

El vector $\vec{L}$ rota entonces como: $\dot{\vec{L}} = \vec{\omega} \times \vec{L}$

(recordemos la analogía, $\dot{\vec{r}} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$). Acá estoy despreciando la parte orbital del momento angular.

$\dot{L} = \omega L$.

El $\vec{\tau} = l\hat{x} \times (-Mg)\hat{z} = Mgl\,\hat{y} \Rightarrow \tau = Mgl$

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} \Rightarrow \tau = \dot{L} \Rightarrow \boxed{Mgl = \omega L}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{Mgl}{L} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{Mgl}{I\Omega}}$$

Algunas observaciones

Obs: 1) Si aumento M_g, aumenta la frecuencia de precesión

12/12

2) Ω típicamente es grande, por eso vale la hipótesis de despreciar el momento angular orbital.

3) Si Ω se hace chico, ω crece.

Pareciera que en el límite $\Omega \to 0$, $\omega \to \infty$.

Pero esto no es cierto, porque a medida que $\Omega \to 0$, deja de ser válido despreciar el momento angular orbital, y la expresión para ω pierde validez.