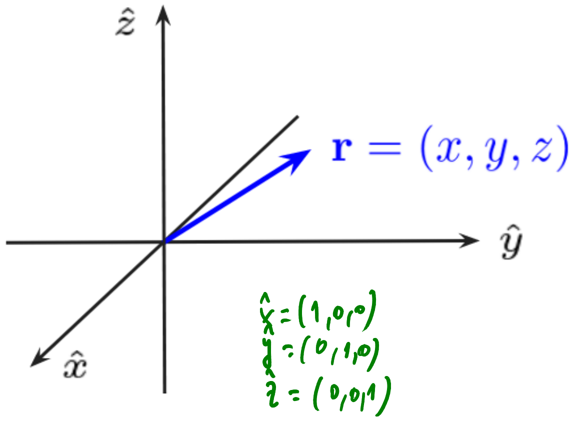
cinemática: descripción matemática del movimiento.

Trabajaremos con partículas puntuales.

Dado un sistema de referencia:



$$\vec r = (x,y,z) = x\hat x + y\hat y + z\hat z$$

$$r \equiv |\vec r| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

Si un cuerpo se mueve en el tiempo:

$$\vec r(t) = x(t)\,\hat x + y(t)\,\hat y + z(t)\,\hat z$$

$$\dot{\vec r}(t) = \dot x(t)\,\hat x + \dot y(t)\,\hat y + \dot z(t)\,\hat z \equiv \vec v(t)$$

$$\ddot{\vec r}(t) = \ddot x(t)\,\hat x + \ddot y(t)\,\hat y + \ddot z(t)\,\hat z = \vec a(t)$$

Luego, si conocemos la velocidad es posible hallar la posición:

$$v(t') = \dot x(t') = \frac{dx(t')}{dt'} \Rightarrow \dot x(t')\,dt' = dx'$$

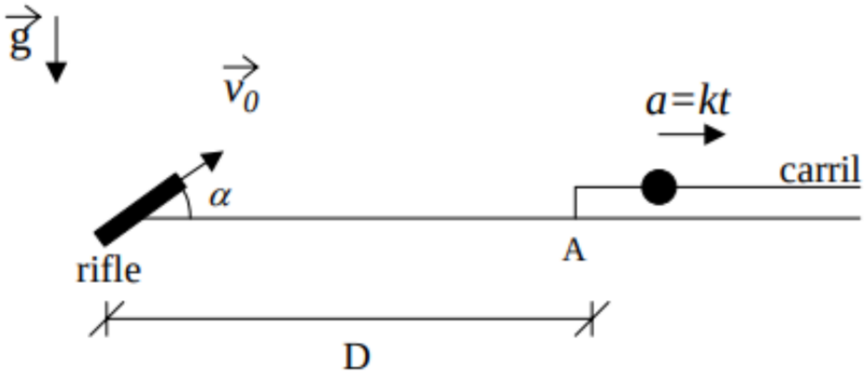
$$\int_{t_0}^{t} \dot x(t')\,dt' = \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx' \Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot x(t')\,dt'$$

De manera análoga si conocemos la aceleración:

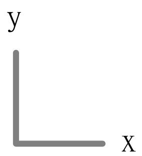
$$\dot x(t) = \dot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \ddot x(t')\,dt'$$

$x(t_0)$ y $\dot x(t_0)$ son las cond. iniciales

⑥ Un juego de un parque de diversiones consiste en una pelotita que se mueve por un carril rectilíneo con aceleración $a = kt$ hacia la derecha, con k constante > 0. A t=0, la pelotita se halla en reposo en el extremo izquierdo del carril (punto A). El jugador dispone de un rifle, ubicado a una distancia D del punto A, que dispara bolas con velocidad v_0 variable, pero con un ángulo α fijo.



(a) ¿Con qué velocidad v_0 debe disparar el jugador para que le sea posible acertar en la pelotita? Es decir, ¿para qué valor de v_0 las trayectorias de la bala y la pelotita se intersectan?.



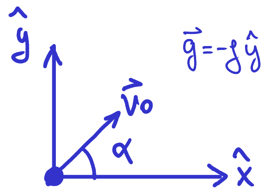
Rifle: tiro oblicuo

$\vec{r}_r(t) = (\underset{MRU}{x_r(t)}, \underset{MRUV}{y_r(t)})$

carril: movimiento unidimensional en $\hat{x}$

$\vec{r}_c(t) = (x_c(t), 0)$ $\quad y_c = 0 \ \forall t$

a) Rifle: (asumo $t_0 = 0$)



Cond. iniciales. A $t=0$:

$\vec{r}_r(t=0) = \vec{0} = (0,0)$

$\dot{\vec{r}}_r(t=0) = \vec{v}_0 = v_0(\cos\alpha, \sin\alpha)$

en otras palabras: $x_r(t=0) = 0$ $\quad \dot{x}_r(t=0) = v_0\cos\alpha$

$y_r(t=0) = 0$ $\quad \dot{y}_r(t=0) = v_0 \sin\alpha$ $\quad a = -g$

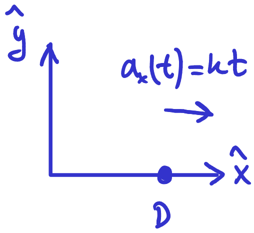
Planteando

MRU $\hat{x}$ → $x_r(t) = x_r(t=0) + \dot{x}_r(t=0)\, t$

MRUV $\hat{y}$ → $y_r(t) = y_r(t=0) + \dot{y}_r(t=0)\, t + \ddot{y}_r(t=0)\frac{t^2}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}_r(t) = \left(v_0\cos\alpha\, t,\ v_0\sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2} g t^2\right)}$$

carril:



Cond. iniciales. A $t=0$: $\vec{r}(t=0) = (D, 0)$

$\dot{\vec{r}}(t=0) = (0, 0)$ parte del reposo

Como sé la aceleración en $\hat{x}$:

$$\ddot{x}_c(t) = kt \xrightarrow[\text{integrando } \int_0^{\dot{x}(t)}]{} \dot{x}_c(t) = \frac{kt^2}{2} \xrightarrow[\text{integrando } \int_D^{x_c(t)}]{} \begin{array}{l} x_c(t) = \frac{kt^3}{6} + D \\ y_c(t) = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}_c(t) = \left(\frac{kt^3}{6} + D, 0\right)}$$

Comentario importante: otra forma de describir el mov. de partículas puntuales es a través de la trayectoria:

Posición en función del tiempo $\rightarrow$ $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

Trayectoria $\rightarrow$ $y(x)$ ó $x(y)$

Como hallo la trayectoria a partir de la posición $\vec{r}_r(t)$?

$$\vec{r}_r(t) = (x_r(t), y_r(t)) = \left(V_0 \cos\alpha\, t,\ V_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2\right)$$

1ero) de $x_r(t)$ despejo t en función de x_r: $t = t(x_r)$

2do) reemplazo en $y_r(t)$

Para estudiar cuando ambas trayectorias se cruzan pido que:

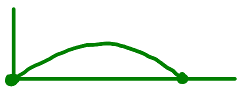
$$x_r \geq D \quad \wedge \quad y_r(x_r) = 0$$

1ero) $x_r = V_0 \cos\alpha \, t \Rightarrow t = \dfrac{x_r}{V_0 \cos\alpha}$

2do) $y_r\left(t = \dfrac{x_r}{V_0\cos\alpha}\right) = y_r(x_r) = V_0 \sin\alpha \dfrac{x_r}{V_0 \cos\alpha} - \dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{x_r}{V_0\cos\alpha}\right)^2$

$$\Rightarrow \boxed{y_r(x_r) = x_r \tan\alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2\alpha} x_r^2}$$

Con la trayectoria del rifle pido: $y_r(x_r) = 0$



$$\underbrace{x_r}_{=0} \underbrace{\left(\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos^2\alpha} x_r\right)}_{=0} = 0 \quad \begin{cases} x_r = 0 \\ x_r = \dfrac{2 V_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} \end{cases}$$

y pido que $x_r \geq D \Rightarrow \dfrac{2V_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} \geq D \Rightarrow \boxed{V_0 \geq \left(\dfrac{gD}{2\cos\alpha\sin\alpha}\right)^{1/2}}$

(b) Si v_0 es alguna de las velocidades halladas en a), ¿en qué instante debe disparar el jugador para pegarle a la pelotita?

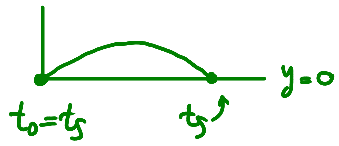
Vamos a asumir que a un tiempo $t=0$ arranca el carril. Entonces, a qué tiempo t_0 distinto debo disparar el rifle para golpear la bolita en el carril? → planteamos encuentro!

$$\vec{r}_r(t) = (x_r(t), y_r(t)) = \Big(\underbrace{v_0\cos\alpha\,(t-t_0)}_{x_r(t)},\ \underbrace{v_0\sin\alpha\,(t-t_0) - \tfrac{1}{2}g(t-t_0)^2}_{y_r(t)}\Big)$$

Para calcular el tiempo $\underbrace{t_s}_{\text{no lo conozco}}$ cuando la bala toca el suelo: $y_r(t_s) = 0 = y_c(t_s)$

$$y_r(t_s) = v_0\sin\alpha\,(t_s-t_0) - \frac{1}{2}g(t_s-t_0)^2 = 0$$

$$\underbrace{(t_s-t_0)}_{=0\ i)}\underbrace{\left[v_0\sin\alpha - \frac{1}{2}g(t_s-t_0)\right]}_{=0\ ii)} = 0$$



$\Rightarrow$ i) $t_s = t_0$ $\rightarrow$ cuando realizo el disparo

ii) $v_0\sin\alpha = \frac{1}{2}g(t_s-t_0)$ $\Rightarrow$ $t_s = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g} + t_0$

Ahora teniendo este instante t_s, pido que en este instante la pelotita en el carril esté donde esté la bala: $x_r(t_s) = x_c(t_s)$

$$\underbrace{v_0\cos\alpha\,\frac{2v_0\sin\alpha}{g}}_{x_r(t=t_s)} = \underbrace{\frac{k}{6}\left(\frac{2v_0\sin\alpha}{g} + t_0\right)^3 + D}_{x_c(t=t_s)}$$

donde uso que: $t_s = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g} + t_0$

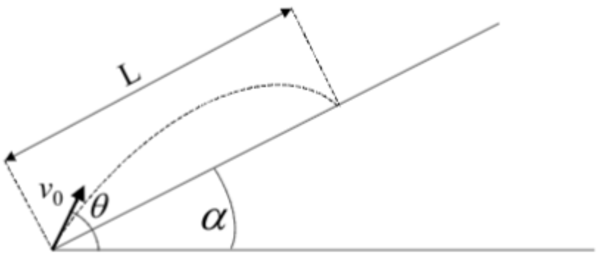
De esta igualdad despejo t_0 en función de los datos:

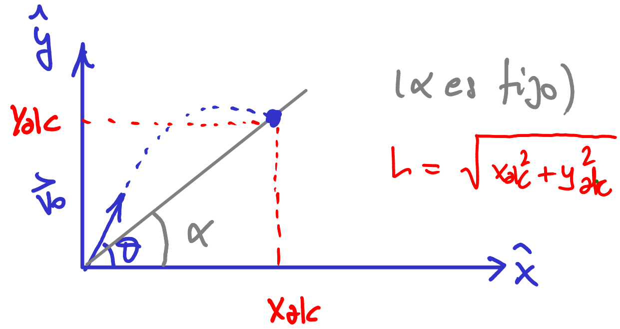
$$\Rightarrow \boxed{t_0 = \frac{6}{k}\left[\frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha - D\right]^{1/3} - \frac{2v_0\sin\alpha}{g}}$$

7. Un jugador de fútbol patea la pelota fuera de la cancha hacia las tribunas con velocidad inicial v_0 y ángulo de elevación θ. La tribuna forma un ángulo α con la horizontal (ver figura). Se aconseja utilizar un sistema de referencia con los ejes (x,y) en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente.

(a) Muestre que la expresión del alcance L en función del ángulo θ está dada por:

$$L = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha}\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha)\cos\theta \tag{1}$$





La patada es un tiro balístico. A tiempo $t=0$ tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\vec r}(t=0) &= (0,-g) \\ \dot{\vec r}(t=0) &= (v_0\cos\theta\,,\ v_0\sin\theta) \\ \vec r(t=0) &= (0,0) \end{aligned}\right\}$$

Dadas estas cond. iniciales hallamos la posición de la pelota: $\vec r_p(t)$

$$\boxed{\vec r_p(t) = \left(v_0\cos\theta\, t\,,\ v_0\sin\theta\, t - \tfrac{1}{2}gt^2\right)}$$

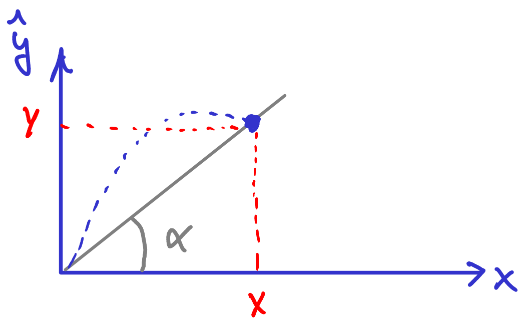
A partir de esta $\vec{r}_p(t)$ es posible hallar la ec. de la trayectoria de la pelota, es decir, $y_p(x_p)$:

$$\vec{r}_p(t) = (x_p(t), y_p(t)) \Rightarrow V_0 \cos\theta \, t = x_p \Rightarrow t = \frac{x_p}{V_0 \cos\theta}$$

$$\Rightarrow y_p = V_0 \sin\theta \frac{x_p}{V_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_p}{V_0 \cos\theta} \right)^2$$

$$\therefore \boxed{y_p(x_p) = x_p \tan\theta - \frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2\theta} x_p^2}$$

Por otro lado, podemos relacionar y_p y x_p con el angulo α:



$$\sin\alpha = \frac{Y}{L} \qquad \tan\alpha = \frac{Y}{X}$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{L}$$

no uso el sub-índice p:

$$\Rightarrow y(x) = x \tan\alpha$$

$$\Rightarrow x \tan\theta - \frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2\theta} x = x \tan\alpha$$

¡notar que son dos angulos distintos!

$$\Rightarrow x \left(\tan\theta - \tan\alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2\theta} \right) = 0$$

Identidad útil: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

$$\tan\theta - \tan\alpha = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha} = \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha} - \frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos^2\theta}x\right) = 0 \quad \begin{cases} x_{alc} = 0 \\ x_{alc} = \dfrac{2V_0^2\cos\theta\sin(\theta-\alpha)}{g\cos\alpha} \end{cases}$$

Por otro lado, $y_{alc} = x_{alc}\tan\alpha = \dfrac{2V_0^2\cos\theta\sin(\theta-\alpha)\sin\alpha}{g\cos^2\alpha}$

Finalmente: $L = \sqrt{x_{alc}^2 + y_{alc}^2}$

$$\Rightarrow L = \left[\left(\frac{2V_0^2\cos\theta\sin(\theta-\alpha)}{g\cos\alpha}\right)^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\right]^{1/2}$$

$$\boxed{L(\theta) = \frac{2V_0^2\cos\theta\sin(\theta-\alpha)}{g\cos^2\alpha}}$$

(b) Grafique el alcance L en función de θ y demuestre que para cada valor de L hay dos valores posibles de θ (tiro rasante y tiro de elevación).

https://www.desmos.com/calculator

(c) ¿Cuál es el ángulo θ para el cual el alcance es máximo?

$\theta_{máx}$ / $\frac{dL}{d\theta}(\theta_{máx}) = 0 \iff$ (tarea) $\quad \boxed{\theta^{max} = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$