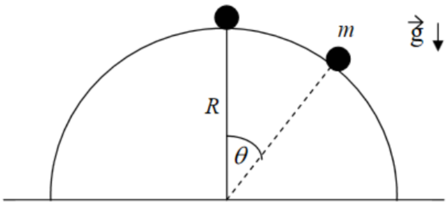
6 Una masa puede deslizarse sobre una semiesfera de radio R sin fricción. Inicialmente se encuentra en reposo en $\theta = 0$.



(a) Se le da un muy pequeño impulso a la masa m de manera que empieza a moverse, pero con una velocidad inicial tan chica que puede considerarse aproximadamente cero. Calcular el ángulo θ para el cual se separa de la superficie esférica.

(b) Si en lugar de apoyada en una esfera la masa está engarzada en un riel semicircular sin fricción de radio R, hallar la velocidad con que llega al suelo. ¿Qué aceleración tangencial tiene la masa en ese instante?

Elección del sistema de referencia y DCL:

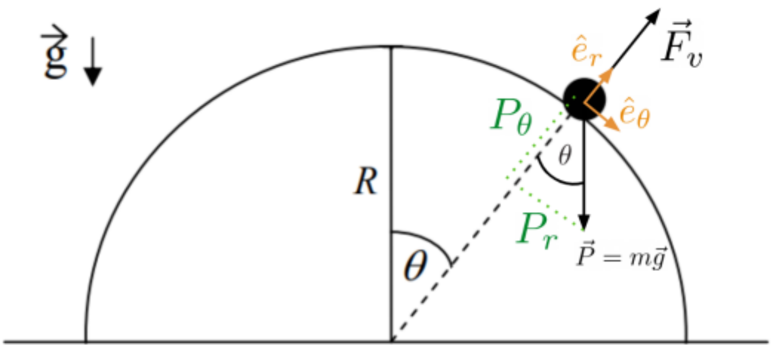


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre. En negro están las fuerzas que actúan sobre la partícula; en naranja los versores polares y, en verde, las dos componentes del peso en dichos versores.

Fuerzas involucradas: $\vec{P} = P_r\,\hat{r} + P_\theta\,\hat{\theta} = -mg\cos\theta\,\hat{r} + mg\sin\theta\,\hat{\theta}$

$\vec{F}_v = N\,\hat{r}$ (incógnita)

Aceleración en polares: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$

$r = \underbrace{R}_{\text{cte}}\,\hat{r}$ $\qquad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\hat{r} + R\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$

Ecuaciones de Newton:

$\hat{r})\quad -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N$

$\hat{\theta})\quad mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta$

Necesitamos hallar θ_N / $N = 0 \Leftrightarrow$ la normal se anula

de $\hat{r}$ tenemos $N(\theta)$

de $\hat{r}$) : $$N = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

?

La regla de la cadena : $$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}$$

de la ec. de $\hat{\theta}$) : $$mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta \Rightarrow \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0=0}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta}'\dot{\theta}' = \frac{g}{R}\int_{\theta_0=0}^{\theta}\sin\theta' d\theta'$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{R}(\cos\theta - 1)$$

$$\Rightarrow N(\theta) = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2)$$

$$N(\theta_N) = 0 \Leftrightarrow \theta_N = \arccos(2/3) \simeq 48{,}2^\circ$$

b) si está enganchado $\Rightarrow N \neq 0 \ \forall t$

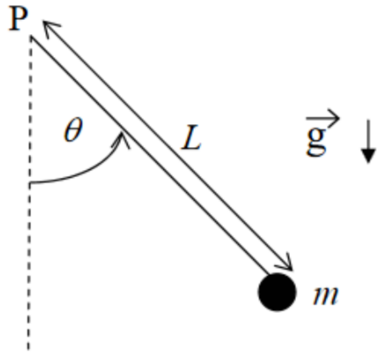
$$\dot{\theta} = \left[\frac{2g}{R}(1-\cos\theta)\right]^{1/2}$$

$$\dot{\theta}(\theta = \pi/2) = \left[\frac{2g}{R}\right]^{1/2}$$

$$\vec{v}(\theta=\pi/2) = R\dot{\theta}(\theta=\pi/2)\,\hat{\theta} = (2gR)^{1/2}\,\hat{\theta}$$

Finalmente $a_t = R\ddot{\theta}(\theta=\pi/2) = g$

7. Se tiene una partícula de masa m unida al extremo de una barra rígida sin masa de longitud L. La barra es libre de girar en el plano vertical alrededor de su otro extremo, fijo en un punto P.



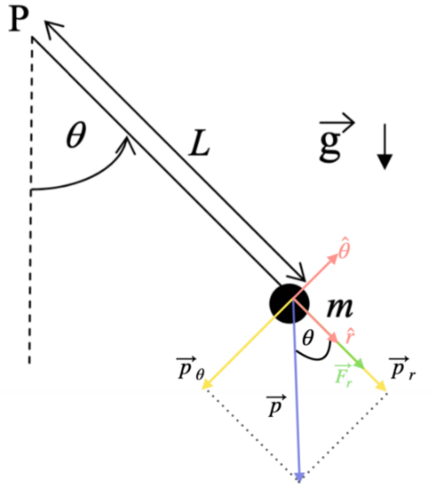
Si se conoce la velocidad v_0 de la partícula cuando pasa por el punto más bajo de su trayectoria, determine:

(a) El ángulo θ_v para el cual la velocidad se anula.

(b) El ángulo θ_f para el cual la fuerza que hace la barra sobre la partícula se anula. Observe que θ_f puede no existir.

(c) ¿Bajo qué condiciones se puede reemplazar la barra por una cuerda inextensible sin modificar la cinemática de la partícula? Justifique.

Elección del sistema de referencia y DCL:



$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

$$\hat{r})\quad -mL\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + F_r$$

$$\hat{\theta})\quad mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

La regla de la cadena:
$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}$$

de $\hat{\theta}$):
$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \Rightarrow L\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} = -g\sin\theta$$

$$\Rightarrow L\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta}'\,\dot{\theta}' = -g\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta'\,d\theta'$$

$$\Rightarrow \frac{L}{2}(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2) = g(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\begin{cases} \theta(t=0) = \theta_0 = 0 \\ v(t=0) = v_0 = L\dot{\theta}_0 \end{cases} \Rightarrow \dot{\theta}^2(\theta) = \frac{2}{L}g(\cos\theta - 1) + \frac{v_0^2}{L^2}$$

$\dot{\theta}_0 = v_0/L$

Buscamos θ_v / $\dot{\theta}(\theta_v) = 0 \iff 0 = \frac{2}{L} g (\cos\theta - 1) + \frac{v_0^2}{L^2}$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta_v = 1 - \frac{v_0^2}{2gL} \iff \boxed{\theta_v = \arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2gL}\right)}$$

1) θ_v y $-\theta_v$

2) $-1 \leqslant 1 - \frac{v_0^2}{2gL} \leqslant 1 \Rightarrow v_0^2 \leqslant 4gL$

(b) El ángulo θ_f para el cual la fuerza que hace la barra sobre la partícula se anula. Observe que θ_f puede no existir.

Necesitamos $F_v(\theta)$ y luego pedir $F_v(\theta_f) = 0$

De la ec. de $\hat{r}$): $\quad F_v = -mL\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta$

$-mL\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + F_v$

usando la ecuación para $\dot{\theta}(\theta)$:

$\dot{\theta}^2(\theta) = \frac{2}{L} g (\cos\theta - 1) + \frac{v_0^2}{L^2}$

$$F_v(\theta) = -3mg\cos\theta + 2mg - \frac{mv_0^2}{L}$$

$$F_v(\theta_f) = 0 \Rightarrow -3mg\cos\theta_f + 2mg - \frac{mv_0^2}{L} = 0$$

$$\cos\theta_f = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gL} \iff \boxed{\theta_f = \arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gL}\right)}$$

1) θ_f y $-\theta_f$

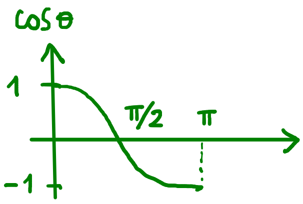
2) $-1 \leqslant \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gL} \leqslant 1 \Rightarrow v_0^2 \leqslant 5gL$

Qué ocurre si $\theta_f > \theta_v$?

θ_v / velocidad nula y es el ángulo máximo

$\therefore$ si $\theta_f > \theta_v \Rightarrow \theta_f$ No va a existir

Para que exista θ_f planteamos $\theta_f \leq \theta_v$:



$\theta \in [0, \pi)$ es decreciente monótona

$$\Rightarrow \quad \cos\theta_f \geq \cos\theta_v$$

ó
$$\frac{2}{3} - \frac{V_0^2}{3gL} \geq 1 - \frac{V_0^2}{2gL} \quad \Rightarrow \quad 2gL \leq V_0^2$$

En resumen:

$V_0^2 \leq 4gL$ para que exista θ_v

$2gL \leq V_0^2 \leq 5gL$ para que alcance θ_f

(c) ¿Bajo qué condiciones se puede reemplazar la barra por una cuerda inextensible sin modificar la cinemática de la partícula? Justifique.

Soga: $T \leq 0$ barra: $F_v \gtrless 0$

$$F_v(\theta) = -3mg\cos\theta + 2mg - \frac{mV_0^2}{L}$$

- Supongamos que existe θ_v y $\theta_f \Rightarrow V_0^2 \leq 4gL$

En $\theta = \theta_v \Rightarrow F_v(\theta_v) = -mg\cos\theta_v \quad \left(F_v = -mL\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\right)$

Si $\theta_v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow F_v(\theta_v) < 0 \rightarrow$ Podremos reemplazar la barra con una cuerda

- Si no existe θ_v pero sí existe θ_f $(4gL \leq V_0^2 \leq 5gL)$

  no podré reemplazar la barra c/soga ya que F_r cambia de signo

- Si no existe θ_v ni θ_f $\Rightarrow$ $V_0^2 \geq 5gL$ no se frenará nunca

  ni cambiará de signo $\Rightarrow$ Podremos reemplazar la barra con una cuerda

Agradezco a Julian Amette y Ignacio Perito por los diagramas utilizados.