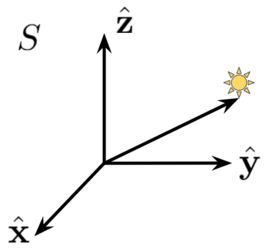
Sistemas de referencia inerciales S:

1) Se encuentran en reposo o en MRU respecto al espacio absoluto.

2) Respecto a estos sistemas de referencia son válidas las ecuaciones de Newton, considerando las fuerzas debido a interacciones y las reacciones de vinculos.



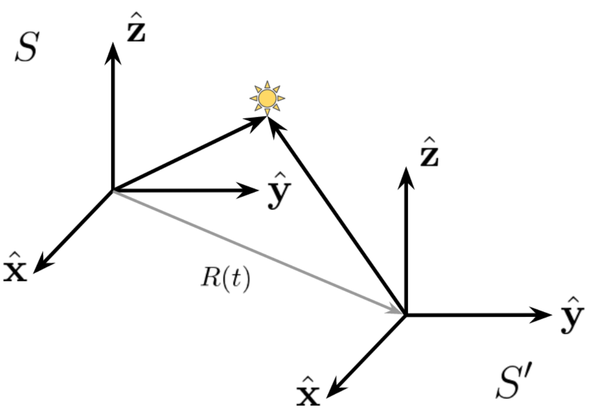
$$m\ddot{\mathbf{r}} = \sum \mathbf{F}$$

Sistema de referencia no inerciales S':

1) Se encuentran acelerados respecto a un sistema de referencia inercial, es decir, se trata de sistemas de referencia en traslación y/o rotación.

2) Respecto a los sistemas no inercial, las ecuaciones de Newton considerando solamente las fuerzas debido a interacciones y reacciones de vinculos NO son válidas

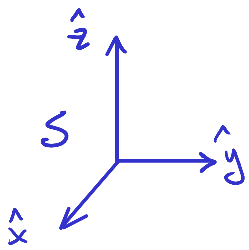
3) Es necesario corregir las ecuaciones de Newton agregando un término vinculado al movimiento acelerado del sistema S', las llamadas fuerzas inerciales o fuerzas ficticias o pseudo fuerzas.

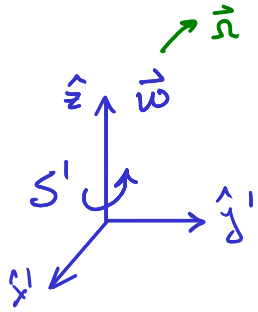


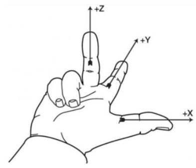
$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \sum \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}}$$

Sistemas no inerciales: sistemas rotantes

Caso especial: origen fijo y vector velocidad angular $\vec{\omega}$.







En S', las fuerzas inerciales son:

$\vec{r}\,' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'$

$\vec{r}\,' = r'\hat{r}'$

- centrífuga: $\vec{F}_{cen} = -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

$\dot{\vec{r}}\,' = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}'$

$\dot{\vec{r}}\,' = \dot{r}'\hat{r}' + r'\dot{\theta}'\hat{\theta}' + \dot{z}'\hat{z}'$

- Coriolis: $\vec{F}_{cor} = -2m\,\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,'$

- Euler: $\vec{F}_{eul} = -m\,\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'$ si $\vec{\omega}$ no varía con el tiempo $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_{eul} = \vec{0}$

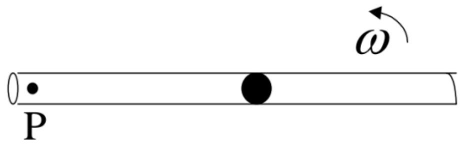
Producto vectorial (repaso):

- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

- cartesianas: $\underset{(1,0,0)}{\hat{x}} \times \underset{(0,1,0)}{\hat{y}} = \underset{(0,0,1)}{\hat{z}}$, $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$, $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$

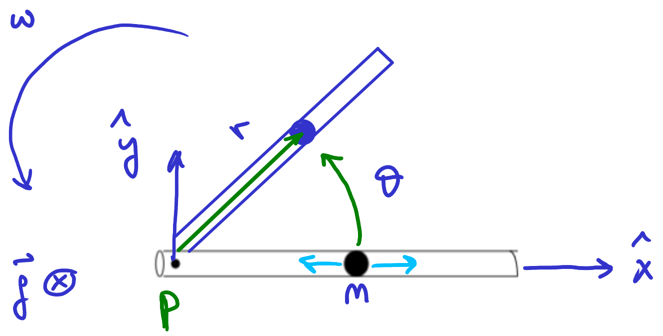
- polares / cilíndricas: $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{z}$, $\hat{\theta} \times \hat{z} = \hat{r}$, $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\theta}$

(9) Una bolita de masa m se encuentra dentro de un tubo que gira con velocidad angular ω constante alrededor de P.



(a) Calcule la aceleración de la bolita respecto de un sistema inercial y respecto de un sistema fijo al tubo.

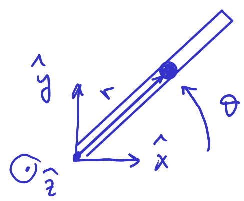
(b) Determine las fuerzas inerciales que actúan sobre la bolita en el sistema fijo al tubo y escriba las ecuaciones dinámicas.



Aceleración en polares:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

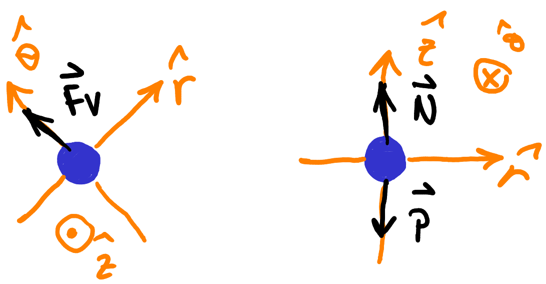
a) sistema inercial:



- $r \in [0, +\infty)$
- $\dot{\theta} = \omega = cte \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

  $\Rightarrow \theta = \omega t$

  (asumiendo que $\theta(t=0) = 0$)
- $z = 0 \ \forall t$



Comentario: al igual que las guias anteriores, cada vez que usamos coordenadas polares, el sistema de referencia es inercial y está fijo al punto P.

Lo que gira es el sistema de coordenadas.
Es decir, NO es lo mismo el sistema de referencia que el sistema de coordenadas.

La aceleración en polares es:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\omega^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\omega \end{cases}$$

Ecuaciones dinámicas:

$\hat{r})$ $\underset{\neq 0}{m}(\ddot{r} - r w^2) = 0$ → recordar las clases mov. osc.

$$\ddot{r} - w^2 r = 0$$

ec. "anti" oscilador!

$\hat{\theta})$ $m 2 w \dot{r} = F_v$

proponemos soluciones del tipo

$$r(t) = Ce^{\lambda t}$$

$\hat{z})$ $m\ddot{z} = 0 = N - P$

$$\ddot{r} - w^2 r = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 \underbrace{Ce^{\lambda t}}_{r(t)} - w^2 \underbrace{Ce^{\lambda t}}_{r(t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - w^2 = 0$$

$C \neq 0$

$$\Rightarrow \lambda = \pm w$$

$\Rightarrow$ $r(t) = Ae^{wt} + Be^{-wt}$, A y B dependen de las c.i.!

Asumamos c.i. razonables: $r(t=0) = d$ y $\dot{r}(t=0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} r(t=0) = A + B = d \\ \dot{r}(t=0) = Aw - Bw = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = B \\ A = d/2 \end{array}\right.$$

Aplicando las c.i.:

$$\frac{e^{wt} + e^{-wt}}{2} \equiv \cosh(wt)$$

$$r(t) = \frac{d}{2}\left(e^{wt} + e^{-wt}\right) = d\cosh(wt)$$

$$\theta(t) = wt$$

$$r(\theta) = d\cosh(\theta)$$

$$z(t) = 0$$

observamos que a medida que $t \to \infty$ $\Rightarrow$ $r(t \to \infty) \to \infty$

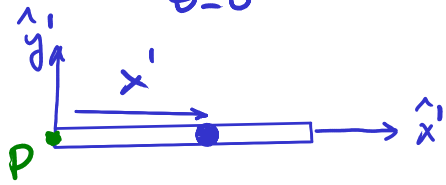
$\theta(t \to \infty) \to \infty$

sistema no inercial (fijo al tubo):

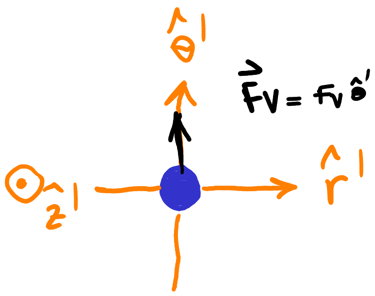
$$\vec{a}' = (\ddot{r}' - r'\dot{\theta}'^2)\hat{r}' + (r'\ddot{\theta}' + 2\dot{r}'\dot{\theta}')\hat{\theta}'$$

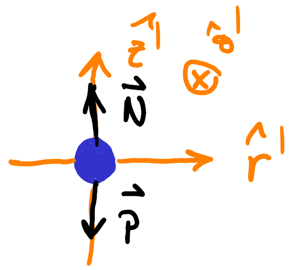
$r' = x'$

$\theta' = 0$



Para este observador dentro del tubo, el movimiento es unidimensional y es indistinto usar (x', y') ó (r', θ').



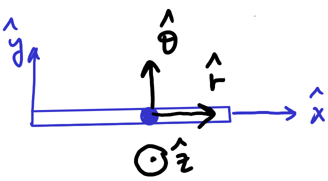


La aceleración en polares es:

$$\begin{cases} a'_r = \ddot{r}' \\ a'_\theta = 0 \end{cases}$$

En este sistema rotante, además de $\vec{F}_V$, tendré las fuerzas inerciales: $\vec{F}_{cen}$, $\vec{F}_{cor}$, $\vec{F}_{eul}$.

Voy a obviar las primas.



$\vec{\omega} = \omega\hat{z}$

$\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$

$\vec{r} = r\hat{r}$

$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\underbrace{\dot{\theta}}_{0}\hat{\theta} = \dot{r}\hat{r}$

$$\vec{F}_{cent} = -m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -m\,\omega\hat{z}\times(\omega\hat{z}\times r\hat{r})$$

$$= -m\omega^2 r\,\hat{z}\times\underbrace{(\hat{z}\times\hat{r})}_{\hat{\theta}} = -m\omega^2 r\,\underbrace{\hat{z}\times\hat{\theta}}_{-\hat{r}} = m\omega^2 r\,\hat{r}$$

$$\vec{F}_{cor} = -2m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = -2m\,\omega\,\dot{r}\,\hat{z}\times\hat{r} = -2m\omega\dot{r}\,\hat{\theta}$$

$$\vec{F}_{eul} = -m\,\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} = \vec{0}$$ ya que $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$

Ecuaciones dinámicas:

retomemos las primas:

$\hat{r})\quad m\ddot{r} = \sum F_r = m\omega^2 r \rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r \rightarrow \ddot{r}' - \omega^2 r' = 0$

$\hat{\theta})\quad 0 = \sum F_\theta = F_v - 2m\omega\dot{r} \rightarrow F_v = 2m\omega\dot{r}'$

$\ddot{r}' - \omega^2 r' = 0 \rightsquigarrow r(t) = Ce^{\lambda t} \rightsquigarrow \lambda^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\omega$

$$\Rightarrow r'(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Asumamos c.i. razonables: $r'(t=0) = d$ y $\dot{r}'(t=0) = 0$

$$r'(t) = \frac{d}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) = d\cosh(\omega t)$$