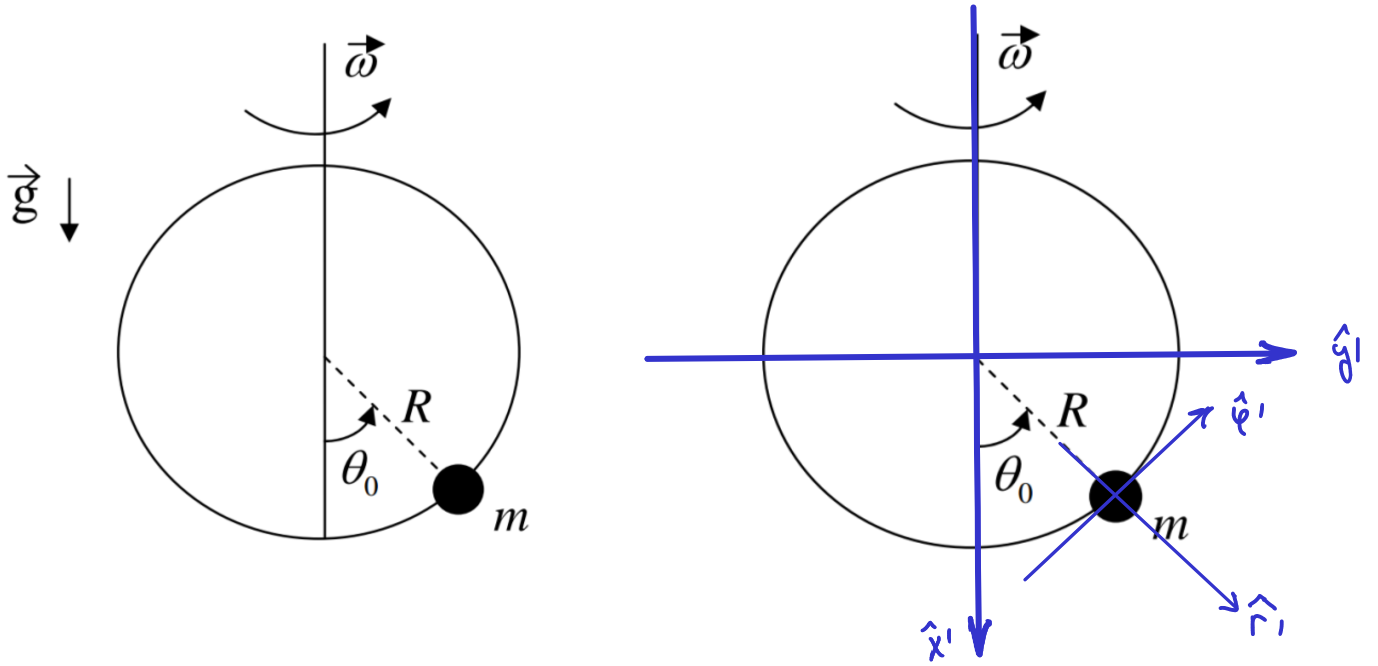
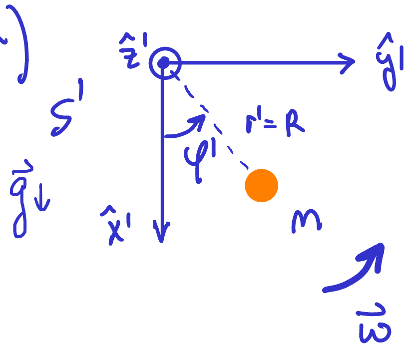
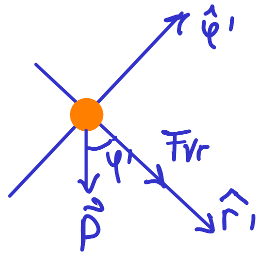
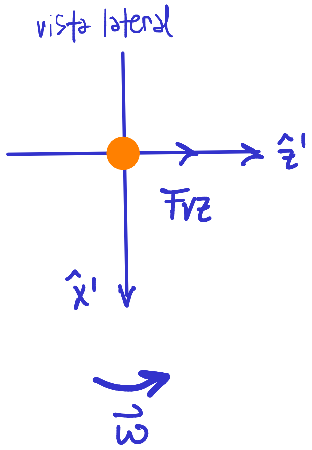
(12) Una bolita de masa m se encuentra engarzada en un alambre circular de radio R, ubicado en posición vertical. El aro de alambre gira alrededor de su diámetro vertical con velocidad angular ω constante, de manera tal que la bolita se halla en la posición de equilibrio θ_0.



a)







$\vec{F}_v = F_{v_r}\hat{r}' + F_{v_z}\hat{z}'$ interacción entre masa y aro

$\vec{P} = mg(\cos\varphi'\hat{r}' - \sin\varphi'\hat{\varphi}')$ interacción con la Tierra

+ fuerzas inerciales

En S', las fuerzas inerciales son:

- centrífuga: $\vec{F}_{cen} = -m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

- Coriolis: $\vec{F}_{cor} = -2m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}'$

- Euler: $\vec{F}_{eul} = -m\,\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$

donde:

$\vec{\omega} = -\omega\hat{x}'$

$\vec{r}' = r'\hat{r}' = R\hat{r}'$ $(R=cte)$

$\dot{\vec{r}}' = \dot{r}'\hat{r}' + r'\dot{\varphi}'\hat{\varphi}' = R\dot{\varphi}'\hat{\varphi}'$

ojo!: $\vec{w} = -w\hat{x}' = -w\left(\cos\varphi'\hat{r}' - \sin\varphi'\hat{\varphi}'\right)$

$\left.\begin{array}{l}\hat{r} = \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}\\ \hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}\end{array}\right\}$ $\hat{x} = \hat{x}(\hat{r},\hat{\varphi})$, $\hat{y} = \hat{y}(\hat{r},\hat{\varphi})$

$\hat{\varphi}'\times\hat{r}' = -\hat{z}'$

$$\Rightarrow \vec{F}_{cent.} = -m\,w\left(-\cos\varphi'\hat{r}' + \sin\varphi'\hat{\varphi}'\right)\times\left[w\left(-\cos\varphi'\hat{r}' + \sin\varphi'\hat{\varphi}'\right)\times R\hat{r}'\right]$$

$\hat{r}'\times\hat{r}' = 0$

$-\hat{r}'\times(-\hat{z}') = \hat{r}'\times\hat{z}' = -\hat{\varphi}$

$$= -m w^2 R\sin\varphi'\left(-\cos\varphi'\hat{r}' + \sin\varphi'\hat{\varphi}'\right)\times(-\hat{z}')$$

$\hat{\varphi}'\times(-\hat{z}') = -\hat{r}'$

$$= m w^2 R\sin\varphi'\left(\cos\varphi'\hat{\varphi}' + \sin\varphi'\hat{r}'\right)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{cori} = -2m\,w\left(-\cos\varphi'\hat{r}' + \sin\varphi'\hat{\varphi}'\right)\times R\dot{\varphi}'\hat{\varphi}' = 2m\,wR\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{z}$$

$\Rightarrow \vec{F}_{eul} = \vec{0}$ ya que $\dot{\vec{\omega}} = 0$

Las ecuaciones de Newton son (obviando las primas):

$$\hat{r})\quad -mR\dot{\varphi}^2 = F_{vr} + mg\cos\varphi + m\omega^2 R\sin^2\varphi$$

$$\hat{\varphi})\quad mR\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi + m\omega^2 R\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\hat{z})\quad m\ddot{z} = 0 = 2m\omega R\dot{\varphi}\cos\varphi + F_{vz}$$

en final

(b) Calcule el ángulo θ_0 y determine si el equilibrio es estable o inestable.

Para ello analizamos los casos para los cuales $\ddot{\varphi} = 0$:

$$mR\ddot{\varphi} = 0 = -mg\sin\varphi + m\omega^2 R\sin\varphi\cos\varphi$$

$$0 = \sin\varphi\,(g - \omega^2 R\cos\varphi)$$

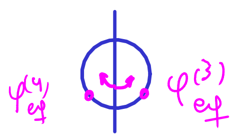
$$\sin\varphi = 0 \iff \boxed{\begin{aligned}\varphi^{(1)}_{eq} &= 0\\ \varphi^{(2)}_{eq} &= \pi\end{aligned}}$$

$$\cos\varphi = \underbrace{\frac{g}{\omega^2 R}}_{\leq 1} \iff \boxed{\varphi^{(3)}_{eq} = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)}$$

Notas importantes:

- $\varphi^{(3)}_{eq}$ existe sí y sólo si: $\frac{g}{\omega^2 R} \leq 1 \Rightarrow g \leq \omega^2 R$

- Existe un $\varphi^{(4)}_{eq} = -\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$



Estabilidad:

$$\underbrace{m R \ddot{\varphi} = - m g \sin\varphi + m \omega^2 R \sin\varphi \cos\varphi}_{} \equiv F(\varphi)$$

función F

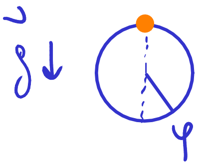
$$\frac{dF(\varphi)}{d\varphi} = - m g \cos\varphi + m\omega^2 R \left(\cos\varphi \cos\varphi - \sin\varphi \sin\varphi \right)$$

Ya sabemos que si

- $\frac{dF}{d\varphi}(\varphi = \varphi_{eq}) < 0 \rightarrow$ equilibrio estable
- $\frac{dF}{d\varphi}(\varphi = \varphi_{eq}) > 0 \rightarrow$ equilibrio inestable

Analizamos cada caso: $\frac{dF(\varphi)}{d\varphi} = - m g \cos\varphi + m\omega^2 R \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \right)$

$\varphi^{(2)}_{eq} = \pi \Rightarrow \frac{dF}{d\varphi}\left(\varphi_{eq} = \pi \right) = m g + m\omega^2 R > 0$ equilibrio inestable



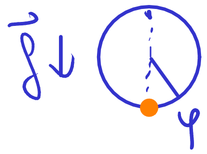
$\varphi^{(1)}_{eq} = 0 \Rightarrow \frac{dF}{d\varphi}\left(\varphi_{eq} = 0 \right) = - m g + m\omega^2 R$

$m(\omega^2 R - g)$

> 0 ?
< 0 ?

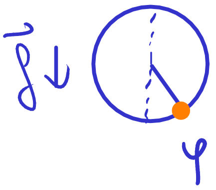
- si $g > \omega^2 R$ equilibrio estable
- si $g < \omega^2 R$ equilibrio inestable
- si $g = \omega^2 R$

equilibrio estable ?



$$\varphi_{eq}^{(3)} = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$$

* $\cos\left[\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)\right] = \frac{g}{\omega^2 R}$



* $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \Rightarrow \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$

$$\frac{dF(\varphi)}{d\varphi} = -mg\cos\varphi + m\omega^2 R\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = -mg\cos\varphi + m\omega^2 R\left(2\underbrace{\cos^2\varphi}_{(\cos\varphi_{eq}^{(3)})^2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{d\varphi}\left(\varphi_{eq} = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)\right) = -mg\frac{g}{\omega^2 R} + m\omega^2 R\left(2\frac{g^2}{\omega^4 R^2} - 1\right)$$

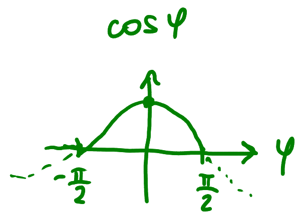
$$= -m\frac{g^2}{\omega^2 R} + 2m\frac{g^2}{\omega^2 R} - m\omega^2 R$$

$$= m\frac{g^2}{\omega^2 R} - m\omega^2 R = \underbrace{m\omega^2 R}_{>0}\left[\underbrace{\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2}_{\cos^2\varphi_{eq}^{(3)} < 1 \text{ : condición de existencia}} - 1\right] < 0$$

$\Rightarrow$ equilibrio estable

Análisis del caso 3:

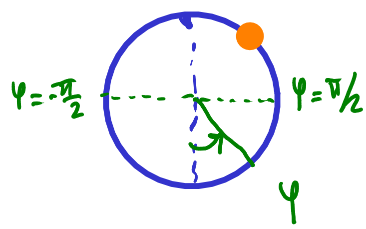
$$\cos\varphi_{eq}^{(3)} = \frac{g}{\omega^2 R} > 0$$



$$\Rightarrow \varphi_{eq}^{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Puede existir φ_{eq}^{3} por encima de la mitad del aro?

Notar que $\cos\varphi_{eq}^{(3)} = \frac{g}{\omega^2 R} \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \Rightarrow \varphi_{eq}^{3} \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \pi/2$



(límite) $\rightarrow$ $\cos\varphi_{eq}^{(3)} = 0 \Leftrightarrow \varphi_{eq}^{(3)} = \pm\pi/2$

(c) Determine la ecuación de movimiento y encuentre la fuerza de vínculo ejercida por el alambre sobre la bolita.

Dadas las c.i. $\varphi(t=0)=\varphi_0$ y $\dot\varphi(t=0)=0$, hallar la fuerza $\vec F_v(\varphi)$.

Como sabemos de la práctica de cinemática: $\ddot\varphi = \frac{d\dot\varphi}{d\varphi}\dot\varphi$

De la ec. de Newton en $\hat\varphi$:

$\hat\varphi$) $$mR\ddot\varphi = m\frac{d\dot\varphi}{d\varphi}\dot\varphi = -mg\sin\varphi + m\omega^2 R\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\int_0^{\dot\varphi}\dot\varphi' d\dot\varphi' = \int_0^{\varphi}\left(-\frac{g}{R}\sin\varphi' + \omega^2\sin\varphi'\cos\varphi'\right)d\varphi'$$

$$\frac{\dot\varphi^2}{2} = \frac{g}{R}(\cos\varphi - 1) + \omega^2\frac{\sin^2\varphi}{2}$$

Reemplazamos está expresión en la ec. de Newton en $\hat r$:

$\hat r$) $$-mR\,2\frac{\dot\varphi^2}{2} = F_{vr} + mg\cos\varphi + m\omega^2 R\sin^2\varphi$$

$$-mR\,2\left[\frac{g}{R}(\cos\varphi - 1) + \omega^2\frac{\sin^2\varphi}{2}\right] = F_{vr} + mg\cos\varphi + m\omega^2 R\sin^2\varphi$$

Despejando: $$\boxed{F_{vr}(\varphi) = mg(2-3\cos\varphi) - m\omega^2 R\sin^2\varphi}$$

chequear!

De la ec. de Newton en $\hat{z}$:

$$\hat{z}) \quad m\ddot{z} = 0 = 2mwR\dot{\varphi}\cos\varphi + F_{vz} \rightarrow \boxed{F_{vz}(\varphi)}$$