Problema de 2 cuerpos:

- cualquier sistema de dos partículas aislados que interactúan entre sí.

- $\vec{F}$ se deriva de un $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

Reduciremos el problema de dos cuerpos a uno equivalente de uno sólo.

Veamos las conservaciones:

(i) El sistema está aislado

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{(ext)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_T \text{ se conserva} \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \vec{cte}$$

(ii) La única interacción deriva de un potencial $\Rightarrow$ es conservativa

$$\Rightarrow W_{FNC} = 0 \Rightarrow E_T \text{ se conserva}$$

(iii) $$\sum \vec{\tau}^{(O)}_{(ext)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_T \text{ se conserva}$$

Entonces, desde O se conservan:

$$\vec{P}_T = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2$$

$$E_T = \underbrace{\frac{m_1}{2}|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\dot{\vec{r}}_2|^2}_{T} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$\vec{L}_T^{(O)} = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2$$

Necesitamos elegir quien es O y el sistema de coordenadas.

Obviamente (?) elegimos el sistema de referencia fijo al CM.

Notamos que : $$\vec{R}_{CM}^{(CM)} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1+m_2} = \vec{0}$$

las posiciones tienen las misma dirección y sentidos opuestos

$$\Rightarrow \quad m_1 \vec{r}_1 = - m_2 \vec{r}_2$$

$$\Rightarrow \quad m_1 \dot{\vec{r}}_1 = - m_2 \dot{\vec{r}}_2$$

las velocidades tienen las misma dirección y sentidos opuestos

De estas dos ecuaciones se desprende que desde el CM basta conocer la posición y velocidad de una partícula para conocer el estado de todo el sistema.

Definimos $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$:

$$m_1 \vec{r}_1 - m_1 \vec{r}_2 = - m_2 \vec{r}_2 - m_1 \vec{r}_2$$

$$m_1 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = - (m_1 + m_2) \vec{r}_2$$

$$- \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \vec{r} = \vec{r}_2$$

De manera análoga : $$\frac{m_2}{(m_1+m_2)} \vec{r} = \vec{r}_1$$

Luego, $\dot{\vec{r}}_1 = \dfrac{m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\vec{r}}$ $\qquad \dot{\vec{r}}_2 = -\dfrac{m_1}{(m_1+m_2)}\dot{\vec{r}}$

Con estas expresiones:

$$T = \frac{m_1}{2}|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\dot{\vec{r}}_2|^2 = \frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{2} + \frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{2}$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{2}$$

De manera análoga:

$$\vec{L}_T^{(CM)} = m_1\,\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\,\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$$y \quad V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = V(|\vec{r}|)$$

En resumen,

$$E_T = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{2} + V(|\vec{r}|)$$

$$\vec{L}_T^{(CM)} = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Ahora tenemos que elegir un sistema de coordenadas.

Elegiremos coordenadas cilíndricas (polares + z) : $\{r, \theta, z\}$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{r} &= r\,\hat{r} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} \end{aligned}$$

$$E_T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\left[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right] + V(r)$$

$$\vec{L}_T^{(CM)} = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\,\vec{r}\times\left(\dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right) = \underbrace{\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\, r^2\dot{\theta}}_{\equiv L = cte}\,\hat{z}$$

Notar que $\vec{L}_T^{(CM)} = L\hat{z}$ se conserva!

$$\Rightarrow \quad L = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\, r^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{(m_1+m_2)}{m_1 m_2}\frac{L}{r^2}$$

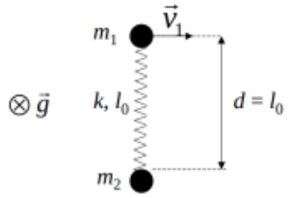
Luego, la energía total se puede escribir como:

$$E_T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\left\{\dot{r}^2 + r^2\left[\frac{(m_1+m_2)}{m_1 m_2}\frac{L}{r^2}\right]^2\right\} + V(r)$$

$$E_T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\,\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \,;$$

$$V_{eff}(r) = 2^{-1}\frac{(m_1+m_2)}{m_1 m_2}\frac{L^2}{r^2} + V(r)$$

(10) En la figura se muestra un sistema compuesto por un resorte de constante elástica k, longitud libre l_0 y masa despreciable y dos partículas de masas m_1 y m_2. El sistema está apoyado sobre una mesa libre de rozamiento. Inicialmente el sistema está en reposo y la distancia d entre las partículas es tal que $d = l_0$. En cierto instante t_0 se le imprime a m_1 una velocidad $\vec{v}_1$ como la de la figura y simultáneamente se le imprime a m_2 una velocidad $\vec{v}_2$ tal que el centro de masa del sistema tiene velocidad nula en ese instante.



$\vec{v}_2 = ?$ $\quad$ $\vec{v}_{CM} = 0$ a $t = 0$

Sistema: $m_1 + m_2$ + resorte

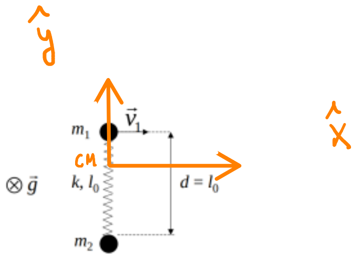
Qué fuerzas tenemos?

- fuerza elástica: interna? conservativa?
- fuerza gravitatoria: externa? conservativa?
- fuerza de vínculo $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$: externa? conservativa?

Qué cantidades se conservan?

- $\sum \vec{F}^{(ext)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_T$ se conserva
- $\sum \vec{\tau}^{(ext)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_T^{(CM)}$ se conserva
- $W_{FNC} = 0 \Rightarrow E_T$ se conserva

(a) Halle el vector velocidad $\vec{v}_2$ y la distancia que hay inicialmente (antes de t_0) entre m_2 y el centro de masa del sistema.



$$\vec{P}_T = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{m_2}{(m_1+m_2)} \dot{\vec{r}} \qquad \dot{\vec{r}}_2 = -\frac{m_1}{(m_1+m_2)} \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{(m_1+m_2)} \vec{v}_0 \qquad \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{(m_1+m_2)} \vec{v}_0$$

con $\vec{v}_0$ dato si $\vec{v}_1$ (o $\vec{v}_2$) es conocida

(b) Diga justificando su respuesta si para todo instante posterior a t_0 se conserva o no, para este sistema, el impulso lineal $\vec{P}$, el impulso angular respecto del centro de masa $\vec{L}_{CM}$ y la energía mecánica total H.

$$\sum \vec{F}^{(ext)} = \vec{0} \Rightarrow \underset{\text{se conserva}}{\vec{P}_T}$$

$$\sum \vec{\tau}^{(ext)} = \vec{0} \Rightarrow \underset{\text{se conserva}}{\vec{L}_T^{(CM)}}$$

$$W_{FNC} = 0 \Rightarrow \underset{\text{se conserva}}{E_T}$$

(c) Calcular $\vec{P}$, $\vec{L}_{CM}$ y H en el instante t_0 en función de datos.

$$\vec{P}_T = \vec{0} \qquad \forall t$$

El potencial elástico es: $V(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) = \frac{k}{2}(|\vec{r}_1-\vec{r}_2| - l_0)^2$

$$E_T(t_0) = T(t_0) + V(t_0) = \frac{m_1}{2}|\vec{v}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\vec{v}_2|^2 + 0$$

$$= \frac{m_1}{2}\left[\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\vec{v}_0\right]^2 + \frac{m_2}{2}\left[-\frac{m_1}{(m_1+m_2)}\vec{v}_0\right]^2$$

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} v_0^2$$

$$\vec{L}^{(CM)}(t_0) = L(t_0)\,\hat{z} = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} l_0 v_0\,\hat{z}$$

$$L = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} r^2\dot{\theta}$$

$$= \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} l_0 \underbrace{l_0\dot{\theta}_0}_{v_0}$$

(d) Dibuje el sistema en un instante arbitrario t posterior a t_0 y diga cuánto vale la velocidad del centro de masa en ese instante. Si en t, $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$ son las velocidades de m_1 y m_2 respectivamente, escriba $\vec{v}_2'$ en función de $\vec{v}_1'$ y de datos. Si r_1' y r_2' son las distancias desde el centro de masa hasta m_1 y m_2 respectivamente en el tiempo t, escriba r_2' en función de r_1' y de datos.

Ya lo hicimos!

$$\vec{R}_{CM}^{(CM)} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1+m_2} = \vec{0}$$

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1 = -m_2 \dot{\vec{r}}_2$$

$$m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2$$

(e) Dé una expresión para $\vec{L}_{CM}$ a tiempo t. Halle la velocidad angular del sistema, ω, en función de datos y de r_1'.

Escribamos E_T y $\vec{L}_T^{(CM)}$ para un tiempo arbitrario:

$$E_T(t) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\left[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right] + \frac{k}{2}(r-l_0)^2 \underbrace{=}_{E_T(t_0)} \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} v_0^2$$

$$\vec{L}_T^{(CM)} = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} \vec{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})$$
$$= \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} r^2 \dot{\theta} \hat{z}$$

$$L(t) = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} r^2 \dot{\theta} \underbrace{=}_{L(t_0)} \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} l_0 v_0$$

De la conservación de $\vec{L}$ se sigue: $\dot{\theta} = \dfrac{l_0 v_0}{r^2}$

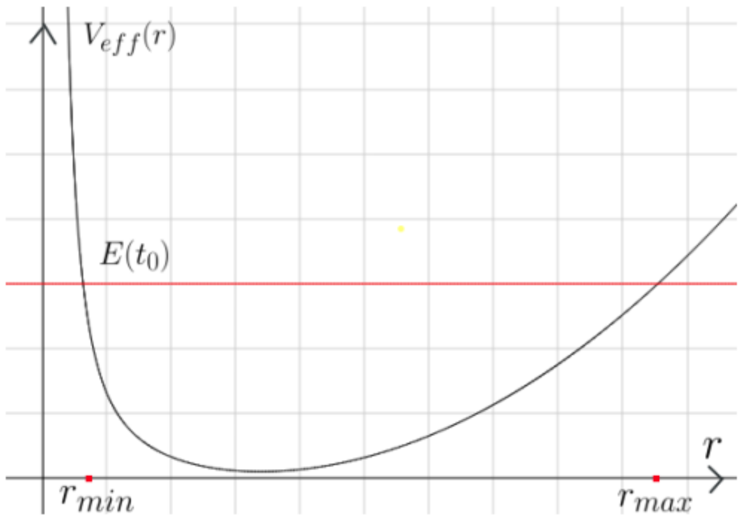
vel. angular del sistema ω

(f) Escriba una expresión para H en el tiempo t en función de datos y de r_1' y $\dot r_1'$. ¿Qué ecuación diferencial se obtiene para r_1'?

Usando $\dot\theta = \frac{l_0 v_0}{r^2}$ relación en la conservación de E_T:

$$E_T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\dot r^2 + V_{eff}(r)$$

con $V_{eff}(r) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\frac{l_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{k}{2}(r-l_0)^2$



Para un valor dado de energía total inicial $E(t_0)$ $\exists$ 2 puntos de retorno donde $\dot r = 0$

$$E_T(r) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\dot r^2 + V_{eff}(r) \overset{E_T(t_0)}{=} \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} v_0^2$$

$$\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\dot r^2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} v_0^2 - V_{eff}(r)$$

Derivemos esta expresión c/ respecto a r:

$$\frac{d}{dr}(\dot r^2) = 2\dot r \frac{d\dot r}{dr} = 2\ddot r \Rightarrow \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\ddot r = -\frac{dV_{eff}(r)}{dr}$$

$$\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\ddot{r} = -\frac{d V_{eff}(r)}{dr}$$

Ecuación de movimiento para una partícula de masa $m_1 m_2/(m_1+m_2)$ sometida a un potencial $V_{eff}(r)$

$$-\frac{d V_{eff}(r)}{dr} = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} \frac{l_0^2 v_0^2}{r^3} - k\left(r - l_0\right)$$

Volviendo a usar: $\dot{\theta} = \frac{l_0 v_0}{r^2}$

$$\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -k\left(r - l_0\right)$$