Dinámica del cuerpo rígido:

Ecuaciones básicas para todo problema de dinámica del cuerpo rígido:

① Ecuaciones de traslación: determinan la dinámica del centro de masa

$$\boxed{M \ddot{\vec{x}}_{CM} = \sum \vec{F}_{(ext)}}$$

② Ecuaciones de rotación: determinan la velocidad angular de rotación

$$\frac{d\vec{L}^{(CM)}}{dt} = \sum \vec{\tau}^{(CM)}_{(ext)}$$

El caso general:

$$\vec{L}^{(CM)} = \mathbb{I}^{(CM)} \vec{\Omega} \xrightarrow[\text{si el cuerpo rota sobre uno de sus ejes principales de inercia}]{} \vec{L}^{(CM)} = I^{(CM)} \vec{\Omega}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}^{(CM)}}{dt} = I^{(CM)} \dot{\vec{\Omega}}$$

$$\boxed{I^{(CM)} \dot{\vec{\Omega}} = \sum \vec{\tau}^{(CM)}_{(ext)}}$$

③ Condición de rigidez: relación entre velocidades de un cuerpo rígido

$$\boxed{\vec{v}_p = \vec{v}_q + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_p - \vec{r}_q)}$$

usualmente P o Q es $\vec{r}_{CM}$

(1) El sistema de la figura consiste en dos cuerpos de masas m_1 y m_2 unidos por una cuerda inextensible que pasa a través de una polea cilíndrica homogénea de masa m_p, que no posee rozamiento con su eje. Calcule la aceleración de las masas. Observe que el resultado no depende del radio de la polea.

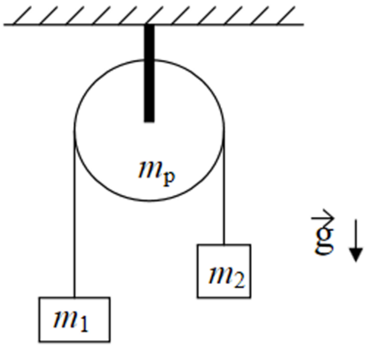
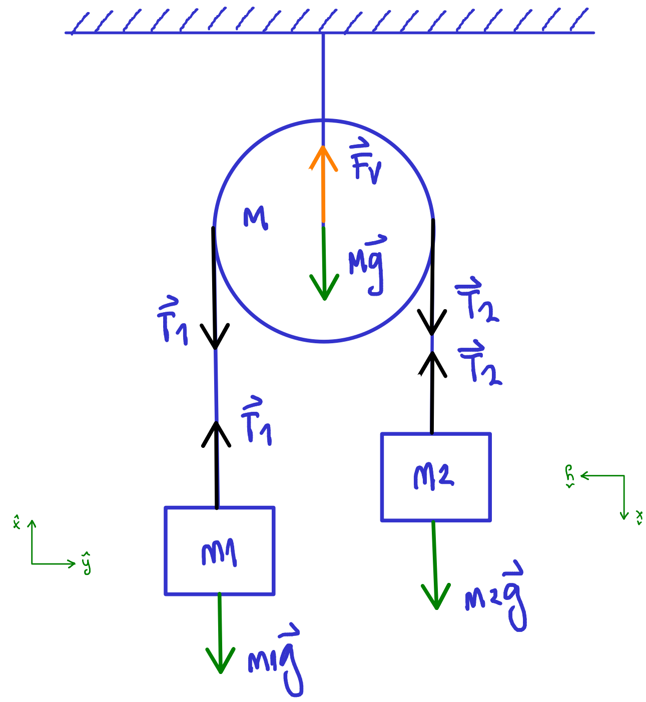


Diagrama de cuerpo libre:



(1) Ecuaciones de traslación:

polea M) $M\ddot{\vec{x}}_{p(CM)} = \sum \vec{F}_{(ext)} = \vec{F}_V + M\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$

masa m_1) $m_1 \ddot{x} = T_1 - m_1 g$

$(\ddot{x} = \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2)$

masa m_2) $m_2 \ddot{x} = m_2 g - T_2$

$(m_1 + m_2)\ddot{x} = (m_2 - m_1) g + T_1 - T_2 \rightarrow \boxed{T_1 - T_2 \neq 0}$

② Ecuaciones de rotación :

rotación del CR

$$I^{(CM)} \dot{\vec{\Omega}} = \sum \vec{\tau}^{\,(CM)}_{(ext)}$$

momento de inercia

torque

$$\sum \vec{\tau}^{\,(CM)}_{(ext)} = \vec{r}_1 \times \vec{T}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{T}_2 + \vec{r}_V \times \vec{F}_V + \vec{r}_p \times M\vec{g}$$

$$= -R\hat{y} \times (-T_1 \hat{x}) + R\hat{y} \times (-T_2 \hat{x}) =$$

$$= -RT_1 \hat{z} + RT_2 \hat{z} = (T_2 - T_1) R \hat{z}$$

M = mp

Por otro lado, para un disco de masa M y radio R : $I^{(CM)} = \frac{MR^2}{2}$

$$\Rightarrow \quad I^{(CM)} \dot{\vec{\Omega}} = \frac{MR^2}{2} \dot{\Omega} \cancel{\hat{z}} = (T_2 - T_1) R \cancel{\hat{z}}$$

Finalmente, la cuerda no desliza respecto a la polea : $\dot{x} = R\dot{\Omega}$

$$\Rightarrow \quad \frac{MR^2}{2} \frac{\ddot{x}}{R} = (T_2 - T_1) R \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{2} \ddot{x} = T_2 - T_1$$

$$y : \quad (m_1 + m_2)\ddot{x} = (m_2 - m_1) g + T_1 - T_2$$

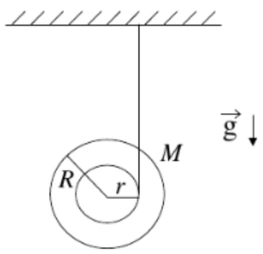
$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} = \frac{m_2 - m_1}{\frac{M}{2} + m_1 + m_2} g}$$

- la aceleración depende del cociente de masas
- $M \ll m_1, m_2 \rightarrow$ se obtenemos el problema de polea ideal
- $\ddot{x}$ no depende del radio de la polea

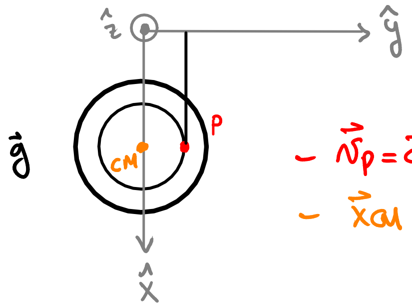
(2) Considere un yo-yo con radio exterior R igual a 10 veces su radio interior r. El momento de inercia I_O del yo-yo respecto de su centro de masa está dado por $I_O = 1/2MR^2$, donde M es la masa total del yo-yo. El extremo final de la cuerda se mantiene en reposo y ésta no desliza respecto del yo-yo.

(a) Calcule la aceleración del centro de masa del yo-yo. ¿Cómo es comparada con g?

(b) Encuentre la tensión en la cuerda a medida que el yo-yo desciende. ¿Cómo es comparada con Mg?



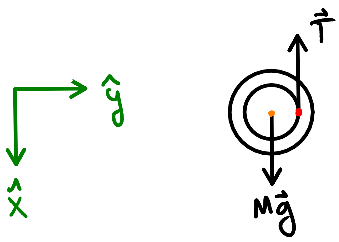
$R = 10r$



- $\vec{v}_P = \vec{0}$
- $\vec{x}_{CM} = x_{CM}\,\hat{x}$

- cualquier otro punto de la soga sobre el yoyo: $\vec{v} \neq \vec{0}$
- El CM se mueve como si todas las fuerzas externas al sistema cuerpo rígido estuvieran aplicadas en el mismo.

(1) Ecuaciones de traslación:



$$\hat{x})\quad M\ddot{x}_{CM} = Mg - T$$

(2) Ecuaciones de rotación:

$$\underbrace{\sum \vec{\tau}^{(CM)}}_{\text{torque}} = \overbrace{I^{(CM)}}^{\text{momento de inercia}}\, \dot{\Omega}\,\hat{z}$$

rotación del CR

puede ser el (CM) ó (O) tal que $\vec{v}_P = \vec{0}$

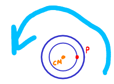
$$\left.\begin{array}{l} \vec{\tau}^{(CM)} = r\hat{y} \times (-T\hat{x}) = rT\hat{z} \\ \vec{\tau}^{(CM)} = I^{(CM)}\dot{\Omega} = \dfrac{MR^2}{2}\dot{\Omega}\,\hat{z} \end{array}\right\}$$

$$T = \frac{MR^2}{2}\frac{\dot{\Omega}}{r} = \frac{M}{2}\frac{100r^2}{r}\dot{\Omega}$$

$$\boxed{T = 50\,M r\,\dot{\Omega}}$$

$$\Rightarrow \quad M\ddot{x}_{CM} = Mg - T = Mg - 50Mr\dot{\Omega}$$

$$\boxed{\ddot{x}_{CM} = g - 50r\dot{\Omega}} \qquad \text{si } \ddot{x}_{CM} < g \Rightarrow \dot{\Omega} > 0$$



Cómo calculamos $\ddot{x}_{CM}$? ③ Condición de rigidez: para el punto P

$$\underbrace{\vec{v}_{CM}}_{=\dot{x}_{CM}\hat{x}} = \underbrace{\vec{v}_P}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{\Omega}}_{=\Omega\hat{z}}\times(\vec{r}_{CM}-\vec{r}_P) = \Omega\hat{z}\times\left[x_{CM}\hat{x} - (x_{CM}\hat{x} + r\hat{y})\right]$$

$$\dot{x}_{CM}\hat{x} = \Omega\hat{z}\times(-r\hat{y}) = r\Omega\hat{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_{CM} = r\dot{\Omega}}$$

En resumen tenemos:

$$\ddot{x}_{CM} = g - 50r\dot{\Omega} \rightarrow \ddot{x}_{CM} = \frac{g}{51}$$

$$\ddot{x}_{CM} = r\dot{\Omega} \rightarrow \dot{\Omega} = \ddot{x}_{CM}/r = \frac{g}{51r}$$

$$T = 50Mr\dot{\Omega} \rightarrow \boxed{T = \frac{50}{51}Mg}$$

Qué hubiese pasado si elegíamos tomar el torque respecto de P?

$$\vec{\tau}^{(P)} = -r\hat{y}\times Mg\hat{x} = Mgr\hat{z}$$

$$\vec{\tau}^{(P)} = I^{(P)}\dot{\Omega}\hat{z} \underset{\text{teo. de Steiner}}{=} (I^{(CM)} + Mr^2)\dot{\Omega}\hat{z} = \left(\frac{MR^2}{2} + Mr^2\right)\dot{\Omega}\hat{z}$$

$$= \left(\frac{M\,100r^2}{2} + Mr^2\right)\dot{\Omega} = 51Mr^2\dot{\Omega}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \quad Mgr = 51Mr^2\dot{\Omega} \Rightarrow \dot{\Omega} = \frac{g}{51r} \quad \text{lo mismo que antes}$$