Dinámica del cuerpo rígido:

Ecuaciones básicas para todo problema de dinámica del cuerpo rígido:

① Ecuaciones de traslación: determinan la dinámica del centro de masa

$$\boxed{m \ddot{\vec{x}}_{CM} = \sum \vec{F}_{(ext)}}$$

② Ecuaciones de rotación: determinan la velocidad angular de rotación

$$\boxed{I^{(CM)} \dot{\vec{\Omega}} = \sum \vec{\tau}^{\,(CM)}_{(ext)}} \quad \text{o} \quad \boxed{I^{(Q)} \dot{\vec{\Omega}} = \sum \vec{\tau}^{\,(Q)}_{(ext)}}$$

$$\vec{v}_Q = 0$$

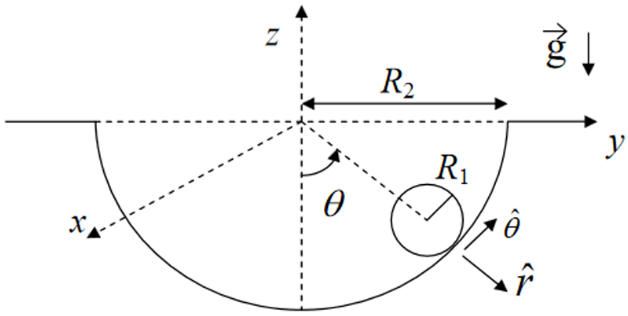
③ Condición de rigidez: relación entre velocidades de un cuerpo rígido

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q)}$$

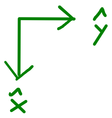
usualmente P o Q es $\vec{r}_{CM}$

(9) Un cilindro homogéneo de radio R_1 y masa m rueda sin resbalar dentro de una cavidad semicilíndrica de radio R_2 con rozamiento.

(a) Si θ es el ángulo de la figura y $\vec{v}_{CM}$ es la velocidad del centro de masa del cilindro de radio R_1, escriba los vectores $\vec{v}_{CM}$ y $\dot{\vec{v}}_{CM}$ en función de datos y de las derivadas de θ con respecto al tiempo.



Comentario:
Yo usare otro sistema
de referencia!



Repaso de cinemática en polares :

$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

Entonces

$$\vec{r}_{CM} = (R_2 - R_1)\,\hat{r}$$

$$\dot{\vec{r}}_{CM} = (R_2 - R_1)\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{CM} = -(R_2 - R_1)\,\dot{\theta}^2\,\hat{r} + (R_2 - R_1)\,\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$$

(b) Teniendo en cuenta los resultados del punto anterior y que el cilindro rueda sin deslizar, exprese los vectores velocidad angular $\vec{\Omega}$ y aceleración angular $\dot{\vec{\Omega}}$ de este cilindro en función de datos y de las derivadas de θ con respecto al tiempo.

Consideremos el punto de contacto Q entre el rígido y la superficie :

$$\vec{v}_{CM} - \vec{v}_Q = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q)$$ Condición de rigidez

sabemos que :

$\vec{v}_Q = 0$ ya que rueda sin deslizar

$\vec{\Omega} = \Omega\,\hat{z}$ rueda en el plano $\hat{x}$-$\hat{y}$

$$\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q = (R_2 - R_1)\,\hat{r} - R_2\,\hat{r} = -R_1\,\hat{r}$$

Entonces, la cond. de rigidez nos queda:

$$\vec{v}_{CM} = -\Omega R_1 \, \hat{z} \times \hat{r} = -\Omega R_1 \, \hat{\theta}$$

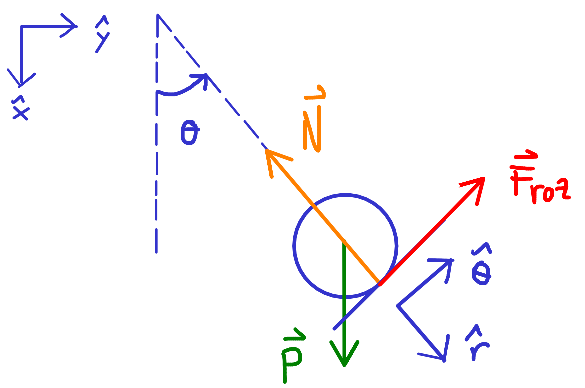
Igualando con la expresión del inciso a): $\dot{\vec{r}}_{CM} = (R_2 - R_1)\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$

$$-\Omega R_1 = (R_2 - R_1)\,\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = -\frac{(R_2 - R_1)}{R_1}\,\dot{\theta}}$$

y derivando respecto al tiempo:

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dt} = \dot{\Omega} = -\frac{(R_2 - R_1)}{R_1}\,\ddot{\theta}}$$

(c) Indique en un dibujo todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro y plantee las ecuaciones de Newton y momentos para este cilindro. Obtenga una ecuación diferencial para $\theta(t)$ y diga qué tipo de movimiento realiza el cilindro.

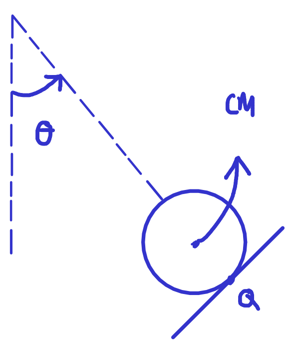


$\hat{r}$) $-m(R_2 - R_1)\,\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - N$

$\hat{\theta}$) $m(R_2 - R_1)\,\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + F_{roz}$

Tenemos 2 ecs. y 3 inc.: N, θ, F_{roz}

Falta la ecuación que rige la dinámica de rotación



$$I^{(CM)}\,\dot{\vec{\Omega}} = \sum \vec{\tau}^{\,(CM)}_{(ext)}$$

$$I^{(Q)}\,\dot{\vec{\Omega}} = \sum \vec{\tau}^{\,(Q)}_{(ext)}$$

Nos paramos en el CM :

$$I^{(cm)} \dot{\vec{\Omega}} = \sum \vec{\tau}^{\,(cm)}_{(ext)}$$

$\alpha = 1/2$ cilindro
$\alpha = 2/5$ esfera

$$\left.\begin{aligned} I^{(cm)} &= \alpha m R_1^2 = m R_1^2/2 \\ \sum \vec{\tau}^{\,(cm)}_{(ext)} &= R_1 \hat{r} \times F_{roz} \hat{\theta} = R_1 F_{roz} \hat{z} \end{aligned}\right\} \quad m R_1/2 \, \dot{\Omega} = F_{roz}$$

Haciendo uso de la relación hallada: $\dot{\Omega} = -\dfrac{(R_2 - R_1)}{R_1} \ddot{\theta}$

$$\boxed{\begin{aligned} -(R_2 - R_1)\, m/2 \, \ddot{\theta} &= F_{roz} \\ -m(R_2 - R_1)\, \dot{\theta}^2 &= mg\cos\theta - N \\ m(R_2 - R_1)\, \ddot{\theta} &= -mg\sin\theta + F_{roz} \end{aligned}}$$

Reemplazando F_{roz} en la ec. de $\hat{\theta}$:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\frac{g}{(R_2 - R_1)}\sin\theta = 0}$$

comentarios :

- despejando : $F_{roz} = \frac{1}{3} mg\sin\theta$ si conociesemos $\mu_e \Rightarrow$ podríamos ver el rango de valores de θ permitidos para que la cond. de rodadura exista.

- Ec. análoga al péndulo simple con un factor $(R_2 - R_1)$ y $\frac{2}{3}$ (?) $\frac{1}{1+\alpha}$

Veamos la conservación de la energía: ninguna fuerza no conservativa hace trabajo. Entonces, se conserva la energía: $E = T + V$.

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2$$

Despejando:

$$v_{CM} = (R_2 - R_1)\,\dot{\theta} \rightarrow T_{tras} = \frac{1}{2} m (R_2 - R_1)^2 \dot{\theta}^2$$

$$\Omega = -\frac{(R_2 - R_1)}{R_1}\,\dot{\theta} \rightarrow T_{rot} = \frac{1}{4} m (R_2 - R_1)^2 \dot{\theta}^2$$

$$T_{tras} = \frac{1}{2} T_{rot}$$

$$I_{CM} = \overset{\alpha}{\frac{1}{2}} m R_1^2$$

Como la energía se conserva, la evolución del sistema está gobernada por el intercambio entre T y V.

Si el potencial cambia en ΔV: $\quad \Delta \hat{E} = 0 = \Delta T + \Delta V$

$$-\Delta V = \Delta T = \Delta T_{tras} + \Delta T_{rot}$$

Un poco de algebra:

$$\Delta T_{tras} = -\frac{2}{3}\Delta V \quad \longrightarrow 1+\alpha$$

$$\Delta T_{rot} = -\frac{1}{3}\Delta V \quad \longrightarrow 1+1/\alpha$$

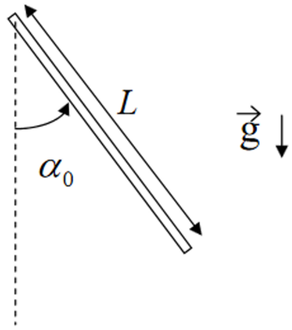
Una fracción se transforma en energía de traslación y una fracción complementaria en energía de rotación.

Preservar la rodadura requiere que ΔV vaya a parar a c/u de las componentes de ΔT.

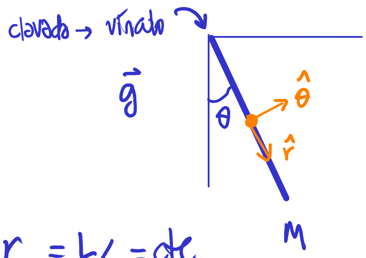
(4) Una barra homogénea delgada de masa M y longitud L puede girar libremente en torno de su eje fijo horizontal, tal como se indica en la figura. Se suelta la barra desde una posición que forma un ángulo α con la vertical. Hallar:

(a) La velocidad angular de la barra cuando ésta pasa por la posición más baja.

(b) La fuerza que ejerce el eje fijo sobre la barra cuando ésta pasa por la posición vertical.



a)



$r_{cm} = L/2 = cte$

Necesitamos las ecs. para el CM y del torque.

Fuerzas?

$$\vec{P} = Mg\,(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})$$

$$\vec{F_V} = F_{Vr}\,\hat{r} + F_{V\theta}\,\hat{\theta} \qquad \text{(incógnitas)}$$

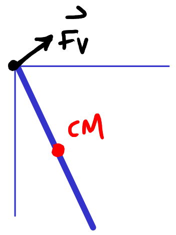
① Ecuaciones de traslación:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

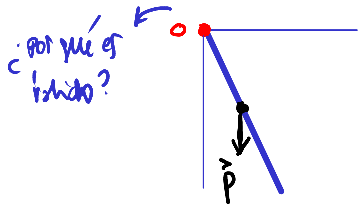
$$\hat{r})\quad -M\frac{L}{2}\dot{\theta}^2 = Mg\cos\theta + F_{Vr}$$

$$\hat{\theta})\quad M\frac{L}{2}\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta + F_{V\theta} \qquad (F_{V\theta} \neq 0)$$

② Ecuaciones de rotación: desde donde?



– La fuerza que hace torque es $\vec{F_V}$



– La fuerza que hace torque es $\vec{P}$

Trabajemos desde O:

$$\vec{\tau}_P^{(O)} = \frac{L}{2}\hat{r} \times Mg\left(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}\right) = -\frac{LMg}{2}\sin\theta\,\hat{z}$$

Además:

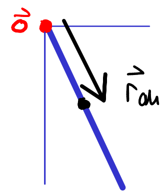
$$\vec{\tau}_P^{(O)} = I^{(O)}\dot{\vec{\Omega}} \underset{\text{teo. de Steiner}}{=} \Big(\underbrace{I^{(CM)}}_{\frac{ML^2}{12}} + M\left(\tfrac{L}{2}\right)^2\Big)\dot{\Omega}\,\hat{z} = \frac{ML^2}{3}\dot{\Omega}\,\hat{z}$$

Igualando:

$$-\frac{LMg}{2}\sin\theta = \frac{ML^2}{3}\dot{\Omega} \Rightarrow \boxed{\dot{\Omega} = -\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta}$$

Para saber la velocidad angular en función de θ: (3) Condición de rigidez:

$$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_O + \vec{\Omega}\times(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O)$$ condición de rigidez



$$\vec{r}_{CM} = \frac{L}{2}\hat{r}, \quad \vec{v}_{CM} = \frac{L}{2}\dot{\theta}\,\hat{\theta}, \quad \vec{\Omega} = \Omega\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{CM} = \vec{0} + \Omega\hat{z}\times\frac{L}{2}\hat{r} = \frac{L}{2}\Omega\,\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{2}\dot{\theta} = \frac{L}{2}\Omega \Rightarrow \Omega = \dot{\theta}$$ (ojo! $\Omega \neq \dot{\theta}$ en general!)

Derivando esta igualdad: $\dot{\Omega} = \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta$

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$\int_0^{\dot{\theta}}\dot{\theta}'\,d\dot{\theta}' = -\frac{3}{2}\frac{g}{L}\int_{\alpha_0}^{\theta}\sin\theta'\,d\theta'$$

$$\dot\theta(\theta) = \pm\left[\frac{3g}{L}\left(\cos\theta - \cos\alpha_0\right)\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \dot\theta(\theta=0) = -\left[\frac{3g}{L}\left(1 - \cos\alpha_0\right)\right]^{1/2}$$

b) La fuerza de vínculo en la barra vertical en $\theta = 0$:

$\hat{r})$ $$-M\frac{L}{2}\dot\theta^2 = Mg\cos\theta + F_{vr}$$

$\hat{\theta})$ $$M\frac{L}{2}\ddot\theta = -Mg\sin\theta + F_{v\theta}$$

$$\rightarrow \quad F_{vr}(\theta=0) = -\frac{ML}{2}\dot\theta^2(\theta=0) - Mg = \frac{3}{2}Mg\left(1 - \cos\alpha_0\right) - Mg$$

$$\rightarrow \quad F_{v\theta}(\theta=0) = M\frac{L}{2}\ddot\theta(\theta=0) = 0 \qquad (\text{en gral } F_{v\theta} \neq 0)$$