Física 1. 2C-2024

Lucas E. Alonso

Resumen del Ejercicio 7 – Guía 4

Enunciado: Una bolita de masa m está enhebrada en un aro semicircular de radio R y sujeta a un resorte de constante elástica k y longitud natural $l_0 = \pi R/2$

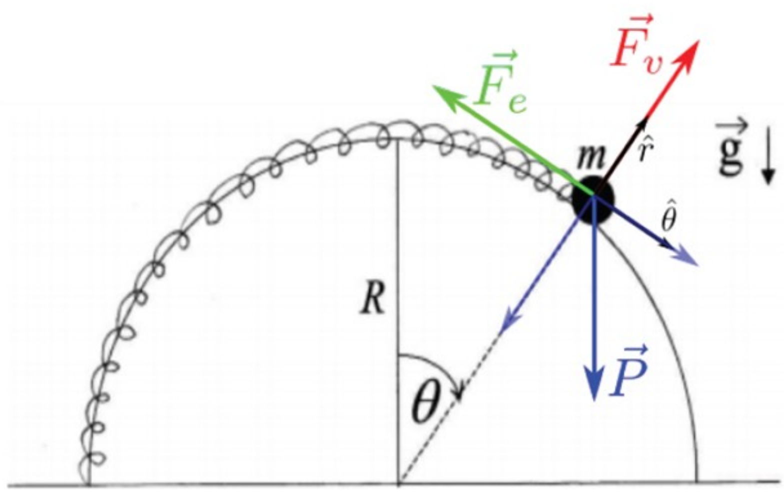
(a) Halle la ecuación de movimiento.

(b) Encuentre todas las posiciones de equilibrio.

(c) Para las posiciones de equilibrio halladas, diga cuáles son estables y cuáles no, y bajo qué circunstancias.

Resolución: Va una versión resumida de la resolución del problema que vimos en clase.

Empezamos realizando el **DCL** y eligiendo un sistema de coordenadas. Como el movimiento se realiza en un círculo, elegimos **coordenadas polares**.



Escribimos las fuerzas en el sistema de coordenadas elegido. La Fuerza elástica estará en la dirección de $\hat{\theta}$, la Normal (o fuerza de vínculo) en $\hat{r}$, y el Peso tendrá una componente en cada dirección.

$$\vec{F_e} = -kR\theta\hat{\theta}$$

$$\vec{F_v} = N\hat{r}$$

$$\vec{P} = -mgcos(\theta)\hat{r} + mgsen(\theta)\hat{r}$$

La **aceleración** en un Movimiento circular ya sabemos que se compone de la aceleración angular y la aceleración centrípeta

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{r}$$

Planteamos las **Ecuaciones de Newton**

$$\hat{r})\ -mR\dot{\theta}^2 = N - mgcos(\theta)$$

$$\hat{\theta})\ mR\ddot{\theta} = -kR\theta + mgsen(\theta)$$

La ecuación en $\hat{r}$ es una ecuación para la Normal, que es una incógnita. Es decir, si conseguimos $\dot{\theta}$ en función de θ, que ya sabemos cómo hacerlo (hay que integrar en θ la ec. de mov.) pero no es lo que pide el problema, podemos despejar N en función de θ.

La ecuación en $\hat{\theta}$ es la **ecuación de movimiento**, con lo que ya respondimos el ítem a). Si pudiésemos integrarla tendríamos $\theta(t)$, pero lamentablemente es una ecuación sin solución analítica. Eso no significa que no podemos hacer nada.

Calculemos los **puntos de equilibrio** como pide el ítem b)

El equilibrio es una posición donde la aceleración es 0. Es lo mismo que decir que la suma de las fuerzas es cero pues $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Si ponemos el objeto en una posición de equilibrio y no le damos ninguna velocidad, se quedará ahí. Si lo alejamos un poquito de la posición de equilibrio, o le damos una pequeña velocidad, el objeto puede volver a la posición de equilibrio y quedarse oscilando, o puede alejarse e ir a otro lado. En el primer caso el equilibrio es estable y en el segundo el equilibrio es inestable. Esto lo veremos en el punto c)

Para calcular los θ_{eq} planteamos $\ddot{\theta} = 0$ en la ecuación de movimiento

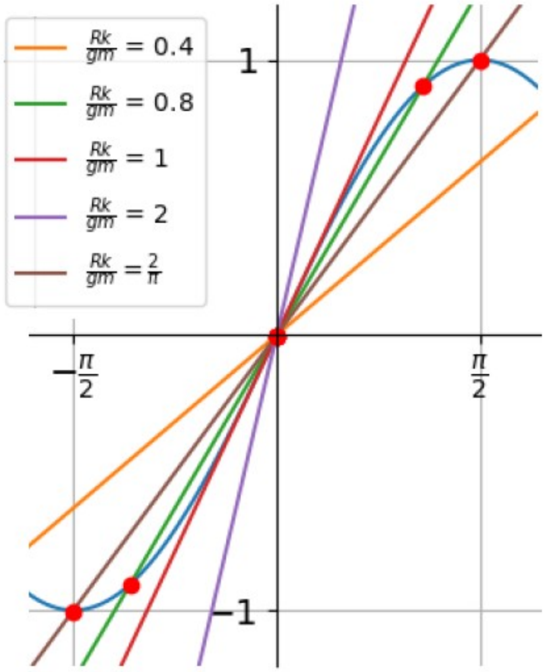
$$0 = -kR\theta + mgsen(\theta)$$

Entonces los θ_{eq} cumplen

$$\frac{kR}{mg}\theta_{eq} = sen(\theta_{eq})$$

Esta ecuación tiene una solución que se encuentra fácil, $\theta_{eq} = 0$, y otras dos soluciones que ocurren cuando la recta $\frac{kR}{mg}\theta_{eq}$ interseca a la función $sen(\theta_{eq})$, pero que no se pueden despejar.

En función de la pendiente de la recta, $\frac{kR}{mg}$, existirán o no esos puntos de equilibrio, como se ve en la figura a continuación



Si la pendiente de la recta es muy pequeña, $\frac{kR}{mg}\theta_{eq}$ nunca intersecará al seno, como se ve en la recta naranja, y si es muy pronunciada, tampoco, como se ve en la recta violenta. Mejor dicho, solo se intersecan en 0, pero no es lo que estamos buscando.

Recordemos que θ únicamente toma valores entre π/2 y -π/2, por lo que no tiene sentido analizar el problema más allá de esos límites.

¿Cuánto tiene que valer $\frac{kR}{mg}$ para que existan esos equilibrios?

Vemos que la cota mínima es la recta marrón, cuando se intersecan las dos funciones en $\theta = \pi/2$, por lo que

$$\frac{kR}{mg}\frac{\pi}{2} = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{kR}{mg} = \frac{2}{\pi} \cong 0.64$$

La cota máxima es cuando la pendiente de la recta es igual a la pendiente del seno en el origen (recta roja). La pendiente del seno en $\theta = 0$ es 1 (lo podemos ver calculando la derivada del seno, que es el coseno, y evaluando en $\theta = 0$, cos(0)=1), por lo que $\frac{kR}{mg} = 1$.

Encontramos que para que existan esos puntos de equilibrio, llamémoslos θ^*_{eq}, $\frac{kR}{mg}$ tiene que ser menor a 1 y mayor a $\frac{2}{\pi}$:

$$\exists\ \theta^*_{eq} \Leftrightarrow \frac{kR}{mg} \in \left(\frac{2}{\pi}, 1\right)$$

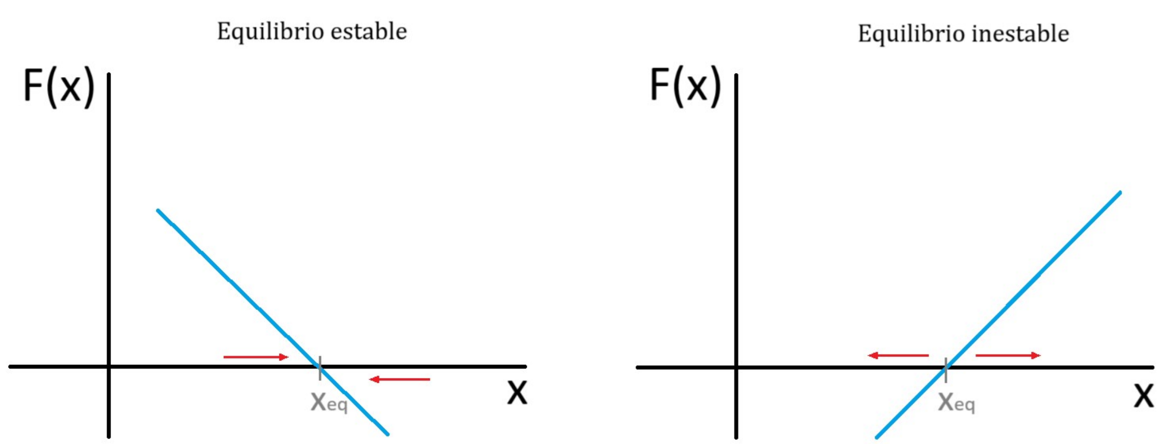
Pensemos físicamente qué significa esto: $\frac{kR}{mg}$ muy grande (mayor a 1) significa que la fuerza elástica es mucho mayor a la fuerza peso. En ese caso no existen θ^*_{eq} pues si ponemos la masa en cualquier posición, la fuerza elástica será tan grande que el sistema tenderá a $\theta = 0$. Si $\frac{kR}{mg}$ es muy pequeño (menor a 0.64), la fuerza elástica será muy chica y el sistema tenderá a caerse. En valores intermedios, el peso y la fuerza elástica se compensan en algún lugar y existen θ^*_{eq}.

Para analizar lo que pasa físicamente, notemos que las fuerzas en $\hat{\theta}$ son la fuerza elástica y la componente en $\hat{\theta}$ de la fuerza peso. El equilibrio $\theta = 0$ existe pues en ese punto ambas fuerzas valen 0, y el otro equilibrio es cuando las dos fuerzas se anulan entre sí, la elástica que tira hacia arriba y la componente $\hat{\theta}$ del peso que tira hacia abajo.

Analicemos ahora la **estabilidad**. Comenzamos estudiando la estabilidad del punto de equilibrio $\theta = 0$. Como dijimos previamente, intuimos que si $\frac{kR}{mg}$ es grande, el equilibrio será estable, pues es como si solo estuviese el resorte. Si $\frac{kR}{mg}$ es chico, el equilibrio será inestable, pues es como si solo estuviese el peso. Veamos si la matemática confirma esta intuición.

Para analizar la estabilidad tenemos que ver cómo es la aceleración (o la suma de fuerzas, es lo mismo) del sistema alrededor del punto de equilibrio.

Para que el equilibrio sea estable, queremos que cuando el objeto se mueva un poco hacia la derecha ($\theta \to \theta + \delta\theta$), la fuerza sea negativa, para que lo devuelva hacia el equilibrio; y cuando se mueva hacia la izquierda ($\theta \to \theta - \delta\theta$) la fuerza sea positiva. Esto significa que queremos que alrededor del equilibrio, la pendiente de la fuerza sea negativa. Si ocurre lo contrario tenemos un equilibrio inestable: si al movernos hacia la derecha la fuerza es positiva, o al movernos hacia la izquierda la fuerza es negativa, ésta nos alejara del equilibrio, como se ve en la figura siguiente



Veámoslo en nuestro problema. Usando la ecuación de movimiento calculemos la derivada de la aceleración con respecto a la posición

$$\ddot{\theta} = -\frac{k}{m}\theta + \frac{g}{R}sen(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{d\ddot{\theta}}{d\theta} = -\frac{k}{m} + \frac{g}{R}cos(\theta)$$

$$\left.\frac{d\ddot{\theta}}{d\theta}\right|_{\theta=0} = -\frac{k}{m} + \frac{g}{R}$$

Tenemos equilibrio estable si $-\frac{k}{m} + \frac{g}{R} < 0$, es decir, $\frac{kR}{mg} > 1$

Tenemos equilibrio inestable si $-\frac{k}{m} + \frac{g}{R} > 0$, es decir, $\frac{kR}{mg} < 1$

Es exactamente lo que habíamos dicho previamente de manera intuitiva.

En el caso $\frac{kR}{mg} = 1$ se obtiene $\left.\frac{d\ddot{\theta}}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 0$, por lo que la primera derivada no nos dice la pendiente de la función, tenemos que ir a un orden superior:

$$\frac{d^2\ddot{\theta}}{d\theta^2} = -\frac{g}{R}sen(\theta) \Rightarrow \left.\frac{d^2\ddot{\theta}}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = 0$$

A segundo orden vuelve a valer cero, veamos uno más

$$\frac{d^3\ddot{\theta}}{d\theta^3} = -\frac{g}{R}cos(\theta) \Rightarrow \left.\frac{d^3\ddot{\theta}}{d\theta^3}\right|_{\theta=0} = -\frac{g}{R}$$

Nos dio negativo, por lo que el equilibrio $\theta = 0$ es estable cuando $\frac{kR}{mg} = 1$

Veamos ahora el otro equilibrio

$$\frac{kR}{mg}\theta_{eq} = sen(\theta_{eq}) \Rightarrow \frac{kR}{mg} = \frac{sen(\theta_{eq})}{\theta_{eq}}$$

No podemos saber cuánto vale θ_{eq}, pero lo que queremos averiguar es únicamente el signo de $\frac{d\ddot{\theta}}{d\theta}$ en ese punto. Veamos si podemos probar que es estable:

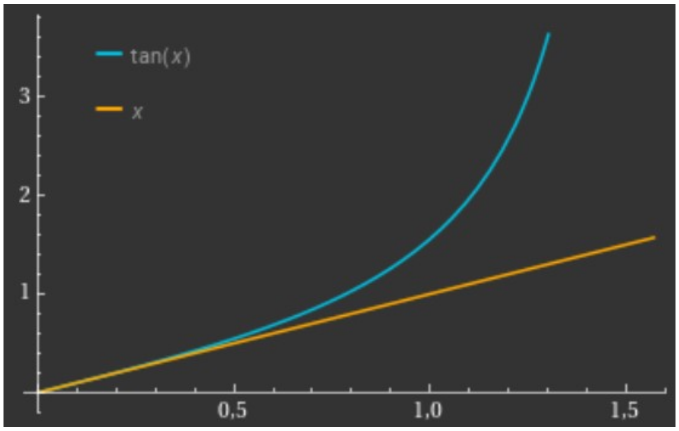
$$\left.\frac{d\ddot{\theta}}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{eq}} = -\frac{k}{m} + \frac{g}{R}cos(\theta_{eq}) < 0 \Leftrightarrow \frac{g}{R}\left(-\frac{kR}{mg} + cos(\theta_{eq})\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{g}{R}\left(-\frac{sen(\theta_{eq})}{\theta_{eq}} + cos(\theta_{eq})\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{sen(\theta_{eq})}{\theta_{eq}} > cos(\theta_{eq})$$

$$\frac{sen(\theta_{eq})}{cos(\theta_{eq})} > \theta_{eq}$$

$$\tan(\theta_{eq}) > \theta_{eq}$$

Para que sea estable tiene que cumplirse $\tan\left(\theta_{eq}\right) > \theta_{eq}$, lo cual se cumple para todo valor de θ_{eq} , pues la tangente es una función que siempre está por encima de una recta con pendiente igual uno:



Estos equilibrios, cuando existen, son estables.

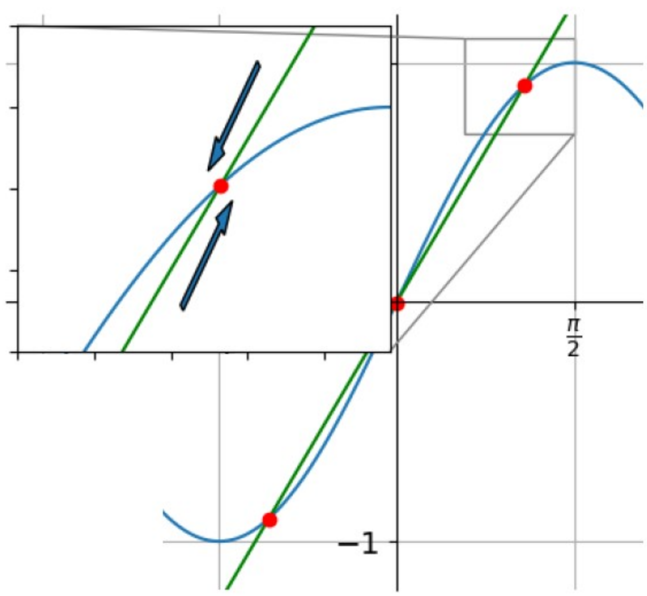
Otra forma de verlo es **analizando gráficamente** el signo de la aceleración alrededor del punto. Veamos la ecuación de movimiento

$$\frac{R}{g}\ddot{\theta} = sen(\theta) - \frac{kR}{mg}\theta$$

La aceleración (multiplicada por una constante positiva, que no altera el signo) es la resta de $sen(\theta)$ y la recta $\frac{kR}{mg}\theta$. El punto de equilibrio es donde $\ddot{\theta} = 0$, es decir, $sen(\theta)$ igual a la recta.

Queremos ver el signo de la aceleración cerca del punto de equilibrio.

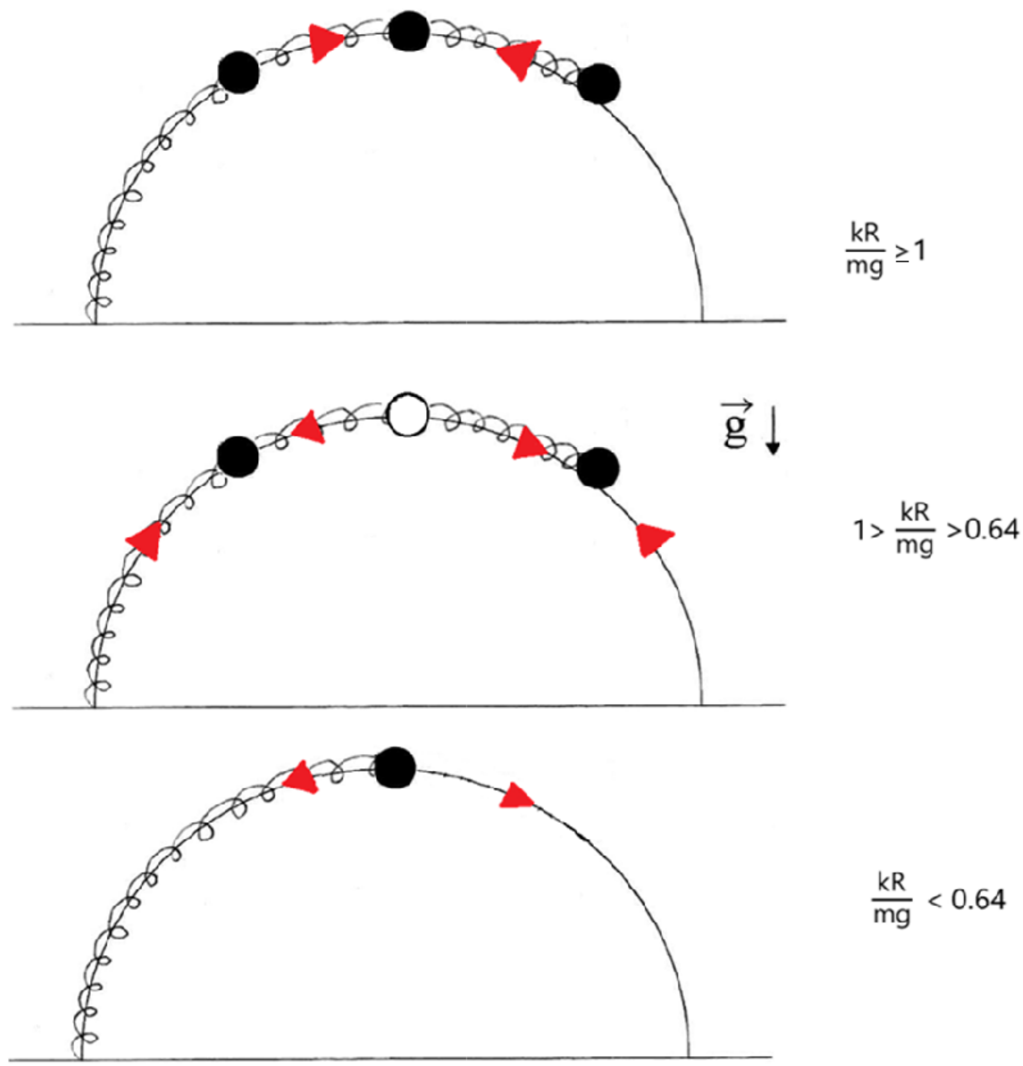
Si θ crece cerca del punto de equilibrio, la recta es mayor al seno, está por encima, por lo que $\ddot{\theta}$ será negativo. Si θ decrece cerca del punto de equilibrio, la recta es menor al seno, por lo que $\ddot{\theta}$ será positivo, como se ve en la siguiente figura. Esto significa que el punto de equilibrio es estable, pues la fuerza es restitutiva.



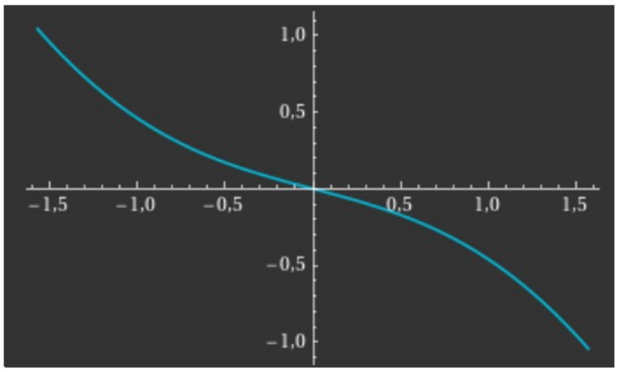
Resumiendo:

$\theta = 0$ siempre es equilibrio y es estable sí y sólo sí $\frac{kR}{mg} \geq 1$

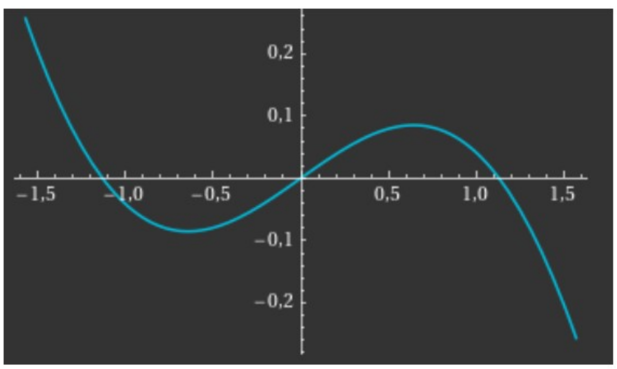
$\exists\ \theta_{eq}^{*} \Leftrightarrow \frac{kR}{mg} \in \left(\frac{2}{\pi}, 1 \right)$ y es estable



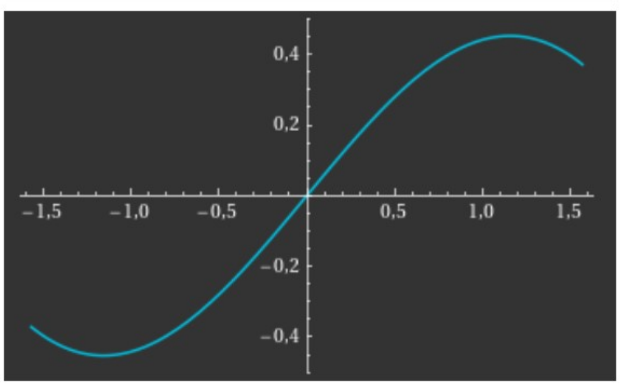
Podemos graficar numéricamente la aceleración en función del ángulo para distintos valores del parámetro $\frac{kR}{mg}$ y ver que se cumple esto:



$\frac{kR}{mg} = 1.4$



$\frac{kR}{mg} = 0.8$



$\frac{kR}{mg} = 0.4$

Para $\frac{kR}{mg} > 1$ la aceleración únicamente vale 0 en $\theta = 0$, y tiene pendiente negativa. Para $\frac{kR}{mg} \in \left(\frac{2}{\pi}, 1\right)$ aparecen dos raíces nuevas con pendiente negativa, y en $\theta = 0$ la pendiente ahora es positiva. Para $\frac{kR}{mg} < 1$ desaparecen las otras dos raíces, y en 0 se mantiene negativa

<u>Nota:</u> Algunas figuras fueron tomadas del apunte de Gabriel F. Rodríguez Ruiz del 10-12-2020

En el siguiente link encuentran un simulador de este problema

https://www.glowscript.org/#/user/gabriel.rodriguez.ruiz/folder/Public/program/Oscilatorio4-7

Bonus track: Pequeñas oscilaciones

Como dijimos, esta ecuación de movimiento no tiene solución analítica, pero alrededor de $\theta = 0$, para valores pequeños de θ, podemos hacer una aproximación vía desarrollo de Taylor de la función sen(θ)

$$sen(\theta) \cong \theta$$

Por lo que la ecuación de movimiento queda

$$mR\ddot{\theta} = -kR\theta + mgsen(\theta) \cong -kR\theta + mg\theta = (-kR + mg)\theta$$

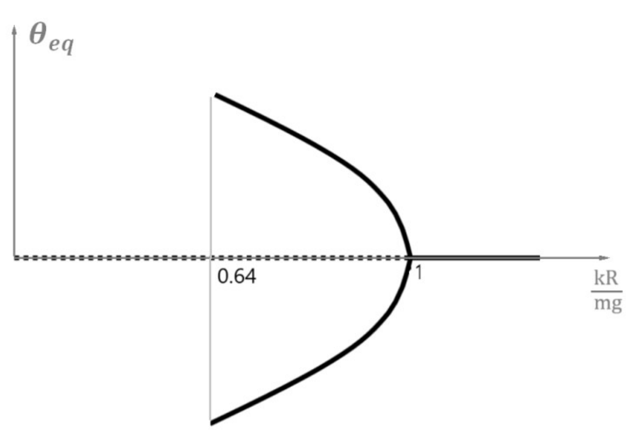
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{k}{m} - \frac{g}{R}\right)\theta = 0$$

Que es la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{R}}$

Para que esta ecuación tenga sentido tiene que cumplirse $\frac{k}{m} - \frac{g}{R} > 0$, que es lo mismo que pedir $\frac{kR}{mg} > 1$, es decir, estar en la condición en la cual el equilibrio $\theta = 0$ es estable.

Bonus track 2: Diagrama de bifurcaciones

No lo pide el problema y no es algo que veamos en esta materia, pero podemos graficar los valores de todos los equilibrios en función del único parámetro que define su existencia y su estabilidad, $\frac{kR}{mg}$. Graficamos en línea sólida los equilibrios estables y en línea punteada los equilibrios inestables. Tenemos que para $\frac{kR}{mg}$ chico, el único equilibrio es el 0 y es inestable. Cuando cruzamos $\frac{kR}{mg} > \frac{2}{\pi}$ aparecen los dos equilibrios estables. Cuando cruzamos $\frac{kR}{mg} > 1$, desaparecen los equilibrios estables pues colapsan en el equilibrio $\theta = 0$ y éste, que era inestable, se vuelve estable.



Esto es lo que se llama un diagrama de bifurcaciones, graficar los equilibrios y su estabilidad en función de algún parámetro. Es una herramienta muy útil para estudiar problemas no lineales.

Aquí podemos ver para distintas condiciones iniciales de θ hacia dónde se moverá el sistema, en función del parámetro $\frac{kR}{mg}$. Es muy útil pues no tenemos $\theta(t)$ pero sí podemos ver cualitativamente cómo será la dinámica.