Ecuación diferencial lineal homogénea a coeficientes constantes

Veamos como ejemplo una ecuación diferencial de sexto orden

$$\frac{\mathrm{d}^6 f}{\mathrm{d}x^6} + 2\,\frac{\mathrm{d}^5 f}{\mathrm{d}x^5} + 4\,\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4} + 6\,\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3} - \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - 8\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - 4f(x) = 0$$

El conjunto de sus soluciones forma un espacio vectorial de dimensión 6.

Para hallar una base remplazamos $f(x) = e^{\alpha x}$ en la ecuación diferencial :

$$\frac{\mathrm{d}^n e^{\alpha x}}{\mathrm{d}x^n} = \alpha^n\, e^{\alpha x} \quad \Rightarrow \quad (\alpha^6 + 2\,\alpha^5 + 4\,\alpha^4 + 6\,\alpha^3 - \alpha^2 - 8\,\alpha - 4)\; e^{\alpha x} = 0$$

Esta es la condición en α para que $e^{\alpha x}$ sea solución.

Escrito en términos de sus raíces:

$$(\alpha - 2i)\,(\alpha + 2i)\,(\alpha - 1)\,(\alpha + 1)^3 = 0$$

Hay en total 4 raíces: dos complejas $\alpha = \pm 2i$ (si hay raíz compleja, tambien es raíz la conjugada), una raíz simple $\alpha = +1$, y una raíz triple $\alpha = -1$.

Ecuación diferencial lineal homogénea a coeficientes constantes

Estas cuatro raíces determinan los elementos de la base

$$\begin{cases} \alpha = \pm 2i: \quad e^{+2ix} \quad e^{-2ix} \quad \longrightarrow \quad \cos 2x \quad \operatorname{sen} 2x \\ \alpha = +1 \ : \quad e^{x} \\ \alpha = -1 \ : \quad e^{-x} \quad xe^{-x} \quad x^2 e^{-x} \end{cases}$$

La última ecuación es una regla especial: si a es una raíz de multiplicidad n, entonces le corresponden n elementos en la base: e^{ax}, xe^{ax}, $x^2 e^{ax}, \cdots ,$ $x^{n\text{-}1} e^{ax}$.

La solución más general es entonces:

$$\boxed{f(x) = A_1 \cos 2x + A_2 \operatorname{sen} 2x + A_3\, e^{x} + A_4\, e^{-x} + A_5\, x\, e^{-x} + A_6\, x^2 e^{-x}}$$

Movimiento oscilatorio amortiguado

Movimiento oscilatorio amortiguado

Un cuerpo de masa m sometido a una fuerza elástica ($-kx$) y una fuerza viscosa ($-kv$)

$$m\,a = -k\,x - \lambda\,v \quad \Longrightarrow \quad m\,a + \lambda\,v + k\,x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

Definimos $\quad \dfrac{\lambda}{m} \equiv 2\gamma \quad$ y $\quad \dfrac{k}{m} \equiv \omega_0^2 \quad$: $\quad \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = 0}$

Las constantes γ y ω_0 determinan la importancia relativa de la fuerza viscosa y la fuerza elástica.

Remplazamos por $x(t) = e^{\alpha t}$ para hallar una base del espacio de dimensión 2:

$$\frac{\mathrm{d}^n e^{\alpha t}}{\mathrm{d}t^n} = \alpha^n\,e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad (\alpha^2 + 2\gamma\,\alpha + \omega_0^2)\,e^{\alpha t} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Según los valores de γ y ω_0 tenemos dos raíces reales, dos complejas, o una doble.

Movimiento oscilatorio amortiguado. Tres casos: $\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$\boxed{\gamma > \omega_0}$ *Caso sobreamortiguado*: definimos $\gamma^2 - \omega_0^2 = \omega^2$ o sea $\alpha = -\gamma \pm \omega$:

$$\begin{cases} u(t) = e^{(-\gamma+\omega)\,t} \\ v(t) = e^{(-\gamma-\omega)\,t} \end{cases} \implies \qquad \boldsymbol{x(t) = a\, e^{(-\gamma+\omega)t} + b\, e^{(-\gamma-\omega)t}}$$

$\boxed{\gamma = \omega_0}$ *Amortiguamiento crítico*: hay una raíz doble $\alpha = -\gamma$:

$$\begin{cases} u(t) = e^{-\gamma t} \\ v(t) = t\, e^{-\gamma t} \end{cases} \implies \quad x(t) = a\, e^{-\gamma t} + b\, t\, e^{-\gamma t} \qquad \boldsymbol{x(t) = (a + b\,t)\, e^{-\gamma t}}$$

$\boxed{\gamma < \omega_0}$ *Caso subamortiguado*: definimos $\gamma^2 - \omega_0^2 = -\omega^2$ o sea $\alpha = -\gamma \pm i\,\omega$:

$$\begin{cases} u(t) = e^{-\gamma t}\, e^{+i\omega t} \\ v(t) = e^{-\gamma t}\, e^{-i\omega t} \end{cases} \implies \quad x(t) = e^{-\gamma t}\left(a\, e^{+i\omega t} + b\, e^{-i\omega t}\right) \qquad \boldsymbol{x(t) = e^{-\gamma t} A\, \mathrm{sen}(\omega t + \phi)}$$

Movimiento oscilatorio forzado

Movimiento oscilatorio forzado

Además de la fuerza elástica y el amortiguamiento, agregamos una $F(t)$ externa

$$m\,a = -k\,x - \lambda\,v + F(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = \frac{F(t)}{m} \tag{1}$$

Esta se denomina una ecuación diferencial *no homogénea*.

Existen muchas funciones $x(t)$ que son solución de (1). Vamos a demostrar que para encontrar *todas* las soluciones, sólo es necesario encontrar *una* de ellas.

Sean $x_g(t)$ y $x_p(t)$ dos soluciones arbitrarias de (1) y tomemos su diferencia:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_g + 2\gamma\,\dot{x}_g + \omega_0^2\,x_g &= F(t)/m \\ \ddot{x}_p + 2\gamma\,\dot{x}_p + \omega_0^2\,x_p &= F(t)/m \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2(x_g - x_p)}{\mathrm{d}\,t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}(x_g - x_p)}{\mathrm{d}\,t} + \omega_0^2(x_g - x_p) = 0$$

O sea $x_g(t) - x_p(t) = x_h(t)$ es solución de la homogénea, que las conocemos todas!

Dada una $x_p(t)$, todas las soluciones se obtienen sumándole las distinas soluciones de la homogénea.

$$x_g(t) - x_p(t) = x_h(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x_g(t) = x_p(t) + x_h(t)}$$

Movimiento oscilatorio forzado

Un caso interesante es cuando el oscilador es forzado con un seno de frecuencia arbitraria, $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega_f t$.

En este caso la ecuación diferencial a resolver es:

$$\ddot{x}_p(t) + 2\gamma\, \dot{x}_p(t) + \omega_0^2\, x_p(t) = (F_0/m) \operatorname{sen} \omega_f t$$

Sólo necesitamos encontrar una solución particular $x_p(t)$.

Todas las otras soluciones se escriben como la suma de la particular más una solución de la homogénea $x_g(t) = x_p(t) + x_h(t)$ (donde $\ddot{x}_h(t) + 2\gamma\, \dot{x}_h(t) + \omega_0^2\, x_h(t) = 0$).

Ensayamos una solución senoidal con frecuencia ω_f :

$$x_p(t) = A \operatorname{sen}(\omega_f t + \alpha)$$

Movimiento oscilatorio forzado

Buscamos si hay valores de A y α para que $x_p(t)$ sea solución

$$x_p(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_f t + \alpha) = A\,(\mathrm{sen}\,\omega_f t\ \cos\alpha + \cos\omega_f t\ \mathrm{sen}\,\alpha)$$

$$\dot{x}_p(t) = A\,\omega_f\,(\cos\omega_f t\ \cos\alpha - \mathrm{sen}\,\omega_f t\ \mathrm{sen}\,\alpha)$$

$$\ddot{x}_p(t) = A\,\omega_f^2(-\,\mathrm{sen}\,\omega_f t\ \cos\alpha - \cos\omega_f t\ \mathrm{sen}\,\alpha)$$

Remplazando en la ecuación diferencial : $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2\,x = (F_0/m)\,\mathrm{sen}\,\omega_f t$

$$\begin{aligned} &A\,\omega_f^2\,(-\,\mathrm{sen}\,\omega_f t\ \cos\alpha - \cos\omega_f t\ \mathrm{sen}\,\alpha) + \\ &2\gamma\,A\,\omega_f\,(+\cos\omega_f t\ \cos\alpha - \mathrm{sen}\,\omega_f t\ \mathrm{sen}\,\alpha) + \\ &\omega_0^2\,A\,(+\,\mathrm{sen}\,\omega_f t\ \cos\alpha + \cos\omega_f t\ \mathrm{sen}\,\alpha) = \ (F_0/m)\,\mathrm{sen}\,\omega_f t \end{aligned}$$

Sacando seno y coseno factor común

$$\begin{aligned} &\big(-A\,\omega_f^2\cos\alpha - 2A\,\omega_f\gamma\,\mathrm{sen}\,\alpha + A\,\omega_0^2\cos\alpha\big)\ \mathrm{sen}\,\omega_f t + \\ &\big(-A\,\omega_f^2\,\mathrm{sen}\,\alpha + 2A\,\omega_f\gamma\cos\alpha + A\,\omega_0^2\,\mathrm{sen}\,\alpha\big)\ \cos\omega_f t\ = (F_0/m)\,\mathrm{sen}\,\omega_f t \end{aligned}$$

Movimiento oscilatorio forzado

Se requiere igualar separadamente el término en seno y en coseno

$$\begin{cases} -A\,\omega_f^2 \cos\alpha - 2A\,\omega_f\gamma\,\operatorname{sen}\alpha + A\,\omega_0^2\cos\alpha = F_0/m \\ -A\,\omega_f^2 \operatorname{sen}\alpha + 2A\,\omega_f\gamma\cos\alpha + A\,\omega_0^2\operatorname{sen}\alpha = 0 \end{cases}$$

Dividiendo miembro a miembro por $\cos\alpha$

$$\begin{cases} A\,(\omega_0^2 - \omega_f^2)\; - \;2A\,\omega_f\gamma\tan\alpha \;=\; \dfrac{F_0}{m\cos\alpha} \;=\; \dfrac{F_0}{m}\sqrt{1+\tan^2\alpha} \\ A\,(\omega_0^2 - \omega_f^2)\tan\alpha \;+\; 2A\,\omega_f\gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \tan\alpha = -\dfrac{2\omega_f\gamma}{\omega_0^2-\omega_f^2} \end{cases}$$

Remplazando $\tan\alpha$ de la segunda ecuación en la primera:

$$A\;(\omega_0^2 - \omega_f^2)\; - \;2A\,\omega_f\gamma\left(-\frac{2\omega_f\gamma}{\omega_0^2-\omega_f^2}\right) \;=\; \frac{F_0}{m}\sqrt{1+\left(-\frac{2\omega_f\gamma}{\omega_0^2-\omega_f^2}\right)^2}$$

Movimiento oscilatorio forzado

Continúa la ecuación anterior

$$A\ (\omega_0^2 - \omega_f^2)\ +\ A\ \frac{4\,\omega_f^2\gamma^2}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\ =\ \frac{F_0}{m}\ \sqrt{1 + \frac{4\,\omega_f^2\gamma^2}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2}}$$

$$A\ \left[(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2\ +\ 4\,\omega_f^2\gamma^2\right]\ =\ \frac{F_0}{m}\ \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\,\omega_f^2\gamma^2}$$

$$A\ =\ \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2\ +\ 4\,\omega_f^2\gamma^2}}$$

Encontramos así los valores de A y α para que $x_p(t)$ sea solución:

$$\boxed{x_p(t) = A\ \mathrm{sen}(\omega_f t + \alpha)}$$

con $\quad A\ =\ \dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2\ +\ 4\,\omega_f^2\gamma^2}} \quad$ y $\quad \tan\alpha = \dfrac{2\omega_f\gamma}{\omega_f^2 - \omega_0^2}$

Movimiento oscilatorio forzado

$$\begin{cases} x_p(t) = \quad A \ \operatorname{sen}(\omega_f t + \alpha) \\ v_p(t) = A\omega_f \cos(\omega_f t + \alpha) \end{cases} \qquad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\,\omega_f^2\gamma^2}}$$

La solución más general es $x_g(t) = x_p(t) + x_h(t)$, donde $x_h(t)$ es cualquiera de las soluciones de la homogénea. Como todas las $x_h(t)$ tienden a cero exponencialmente, a partir de un cierto tiempo sólo importa $x_p(t)$.

La amplitud y la velocidad máxima, $v_{\text{max}} = A\omega_f$, dependen de la frecuencia forzada

Curva de resonancia :

$$\boxed{v_{\text{max}}(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_f} - \omega_f\right)^2 + 4\,\gamma^2}}}$$

La velocidad es máxima en la condición de resonancia: $\boxed{\omega_f = \omega_0}$ $\quad \rightarrow \quad v_{\text{max}} = \dfrac{F_0}{2\gamma\, m}$

Movimiento oscilatorio forzado

$$\begin{cases} x_p(t) = \ \ A\ \operatorname{sen}(\omega_f t + \alpha) \\ v_p(t) = A\omega_f \cos(\omega_f t + \alpha) \end{cases} \qquad A \ = \ \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 \ + \ 4\,\omega_f^2 \gamma^2}}$$

La solución más general es $x_g(t) = x_p(t) + x_h(t)$, donde $x_h(t)$ es cualquiera de las soluciones de la homogénea. Como todas las $x_h(t)$ tienden a cero exponencialmente, a partir de un cierto tiempo sólo importa $x_p(t)$.

La velocidad $v_p(t) = v_0 \cos(\omega_f t + \alpha)$ oscila entre $\pm v_0$, siendo $v_0(\omega_f) = A\omega_f$.

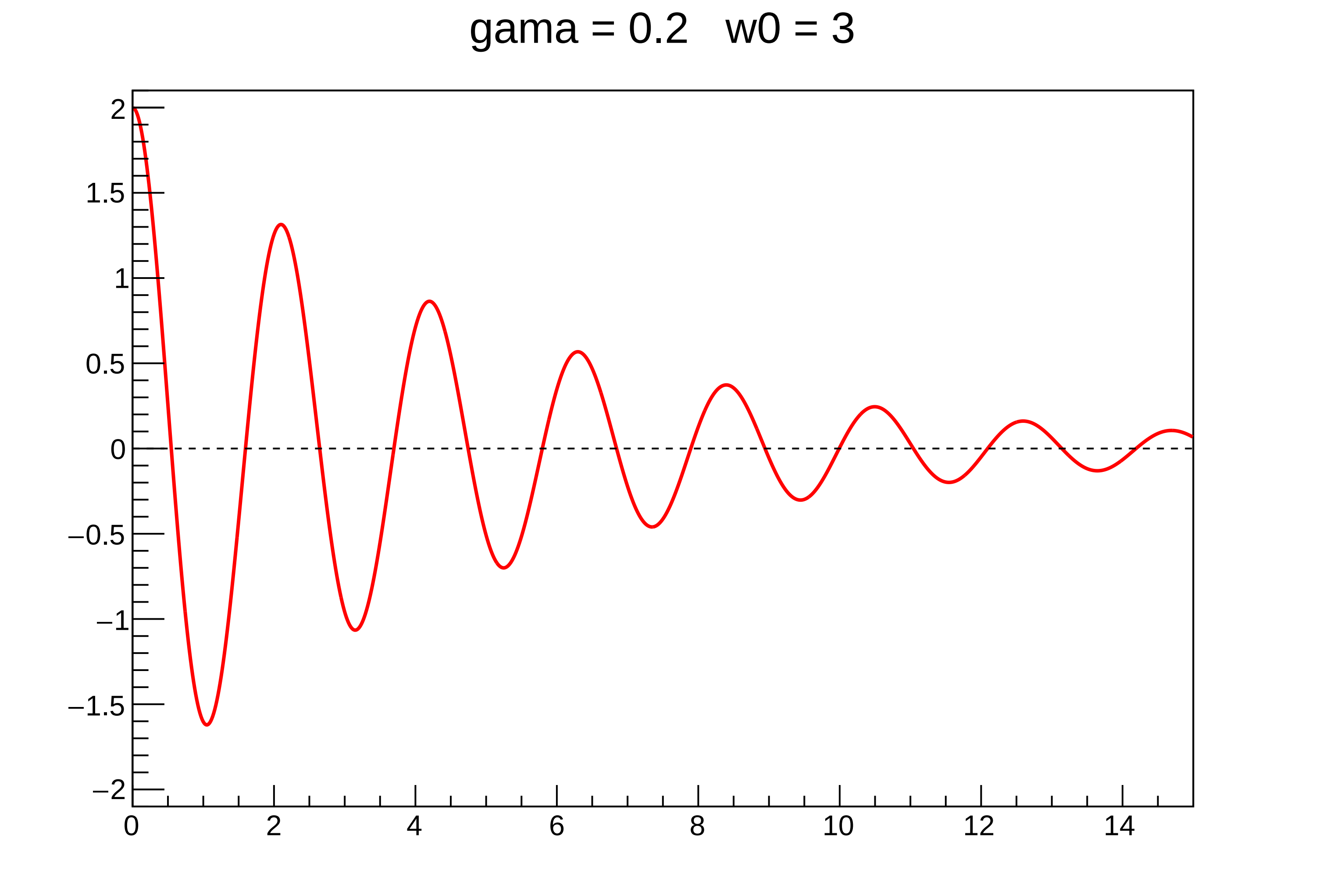
La dependencia de v_0 con ω_f se denomina Curva de resonancia:

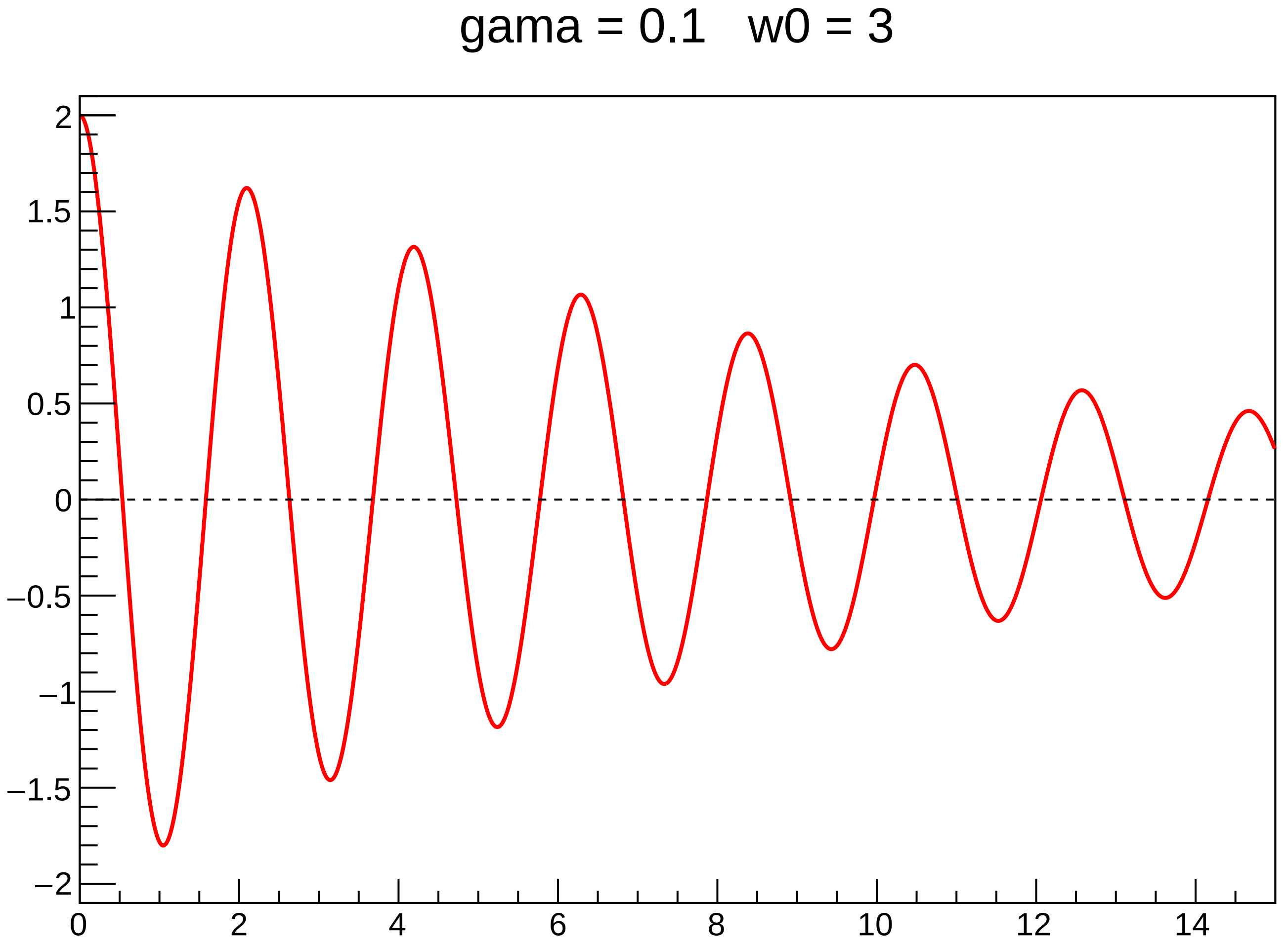
$$\boxed{v_0(\omega_f) \ = \ \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_f} - \omega_f\right)^2 \ + \ 4\,\gamma^2}}}$$

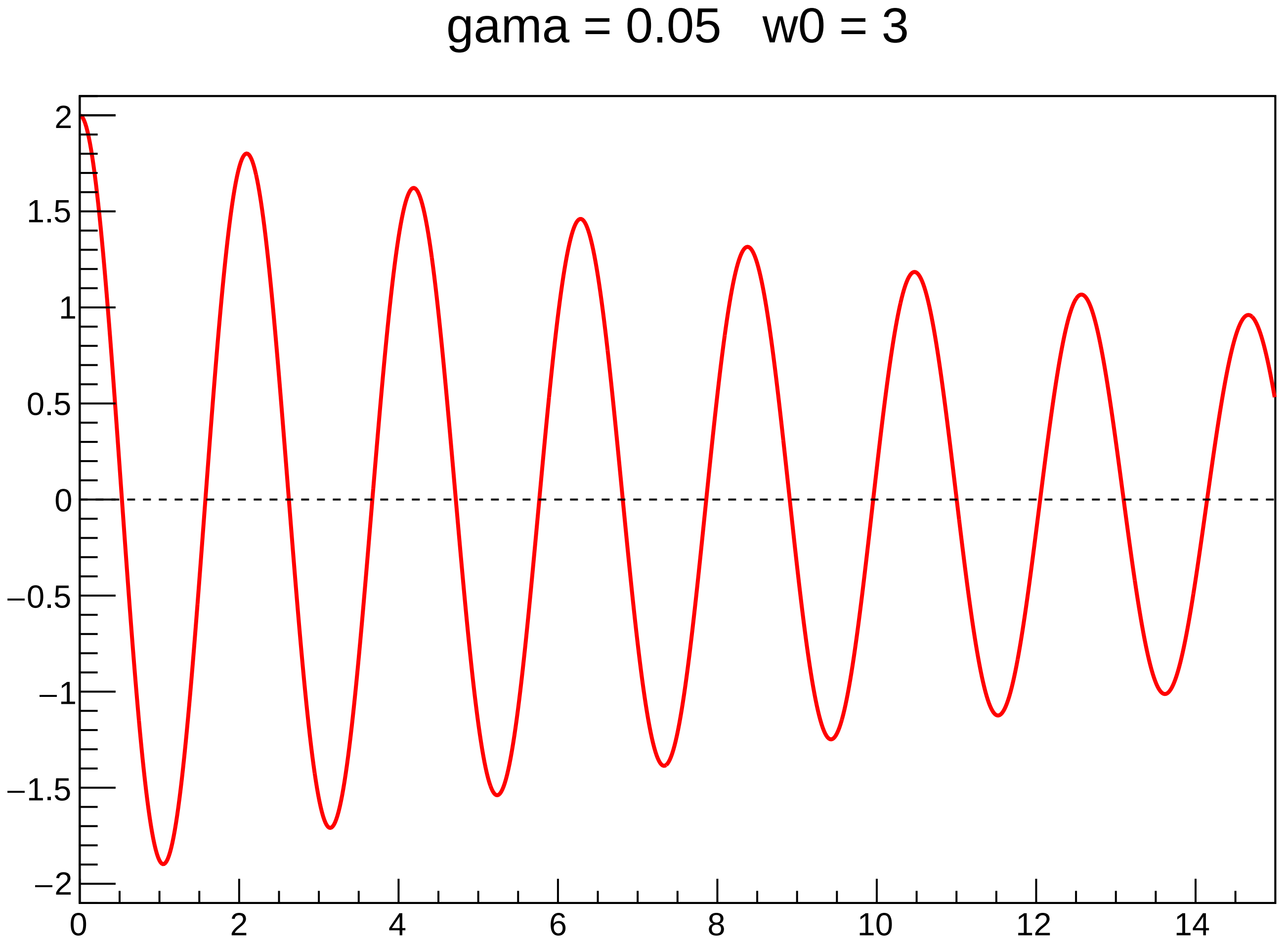
La v_0 es máxima en la condición de resonancia: $\boxed{\omega_f = \omega_0} \quad \rightarrow \quad v_0^{\text{max}} = \dfrac{F_0}{2\gamma\, m}$

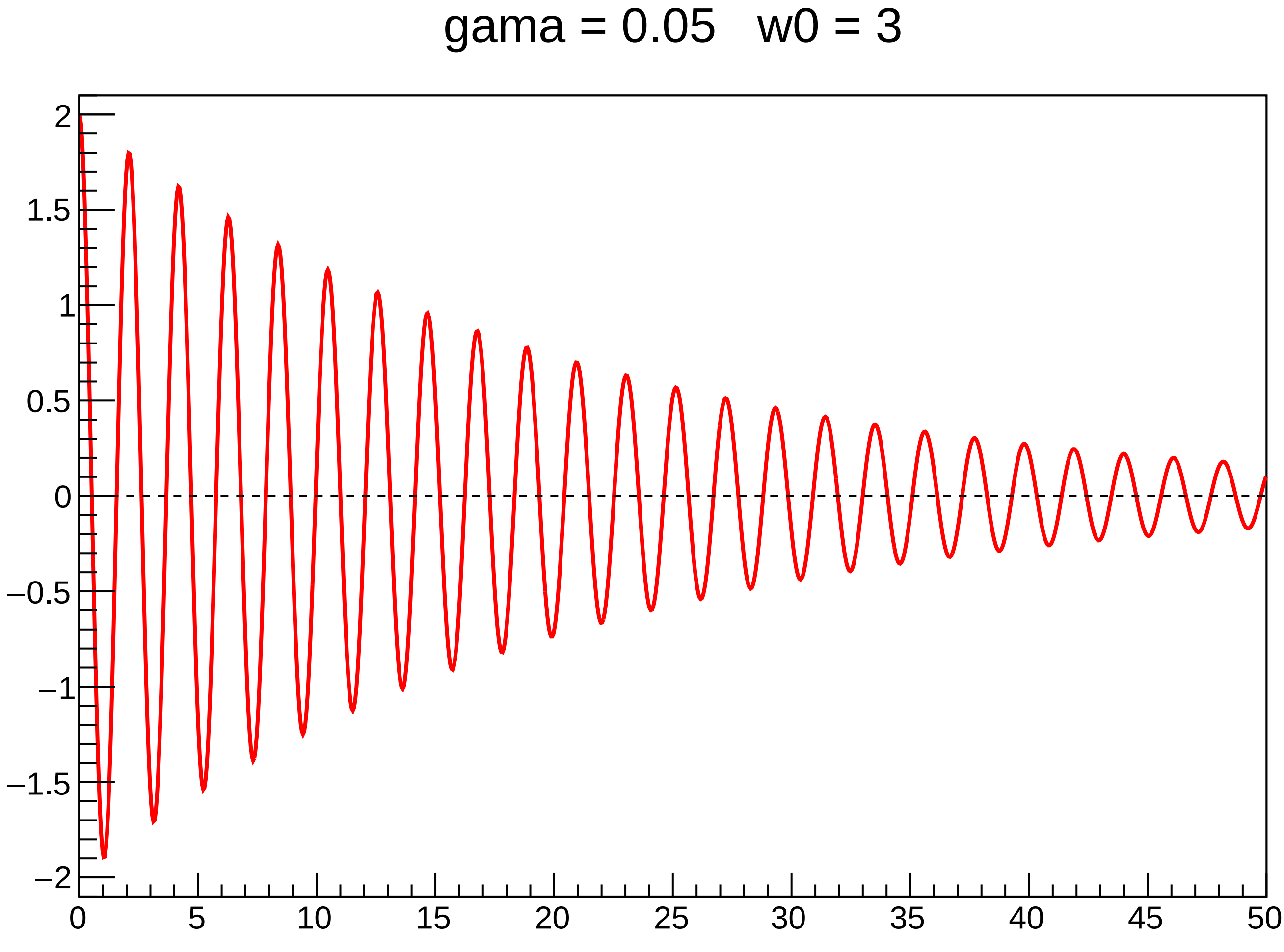
Movimiento oscilatorio amortiguado:

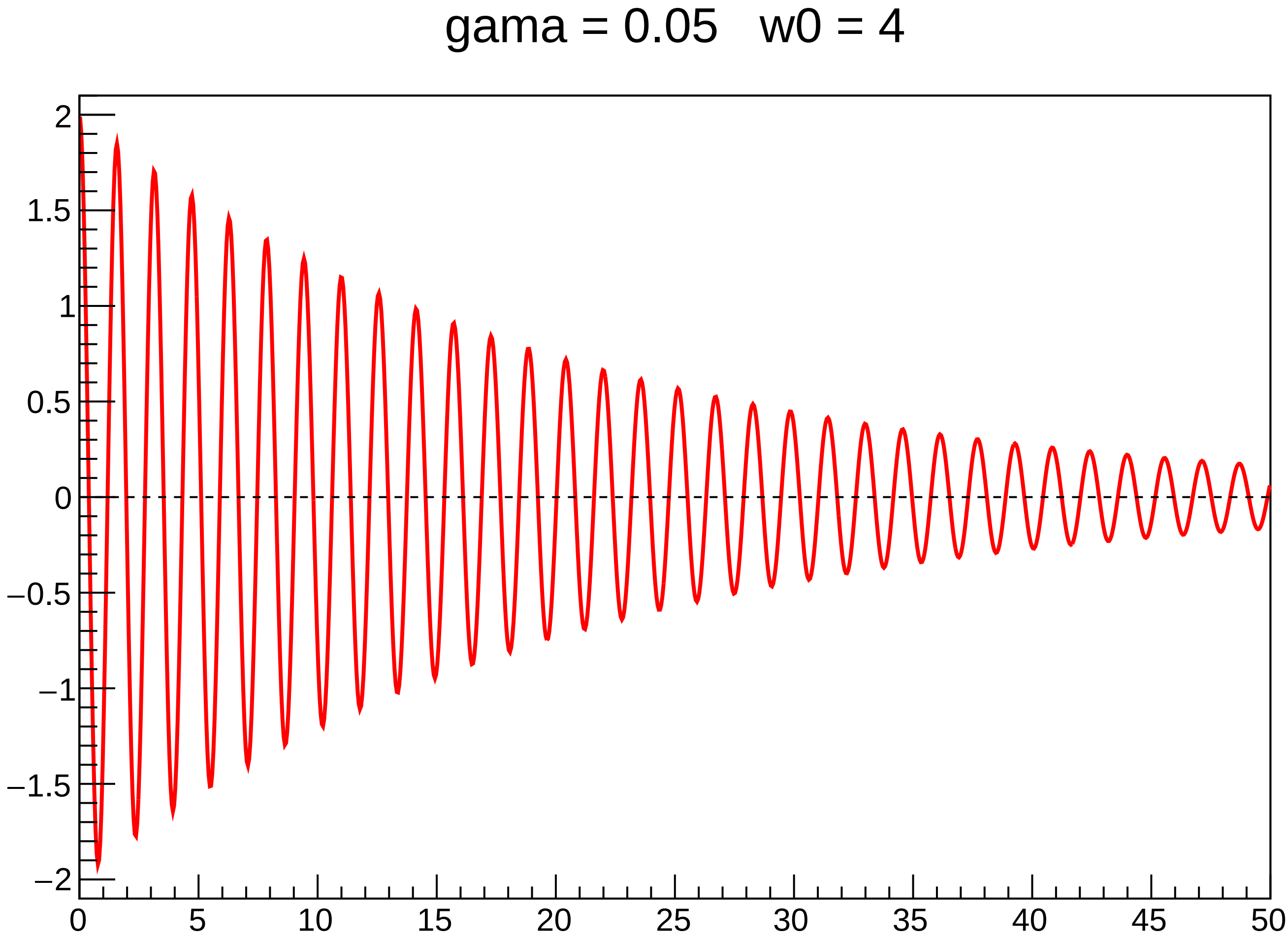
Gráficos para distintos γ y ω_0 (con $x_0 = 2$ y $v_0 = 0$)


gama = 0.2   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

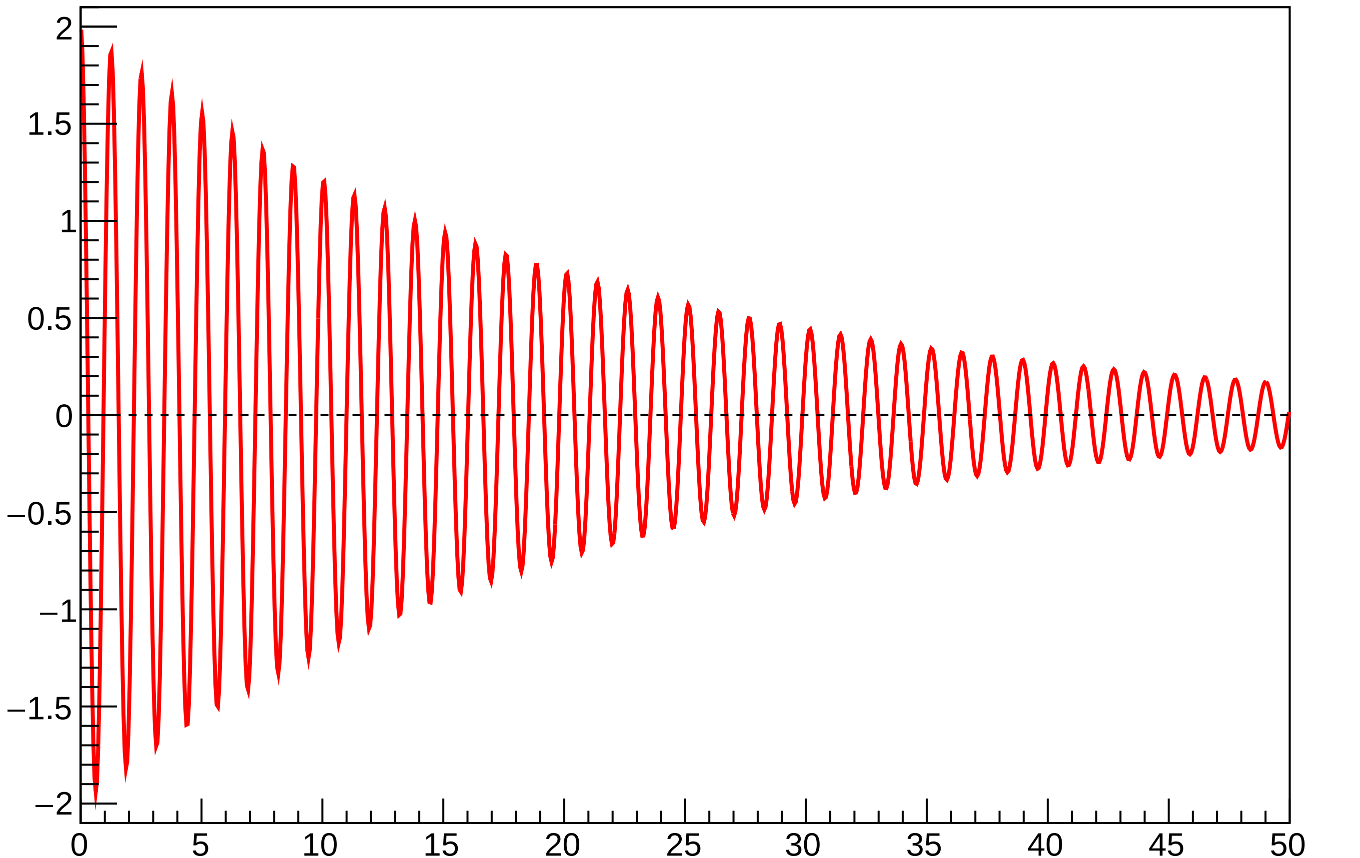

gama = 0.1   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

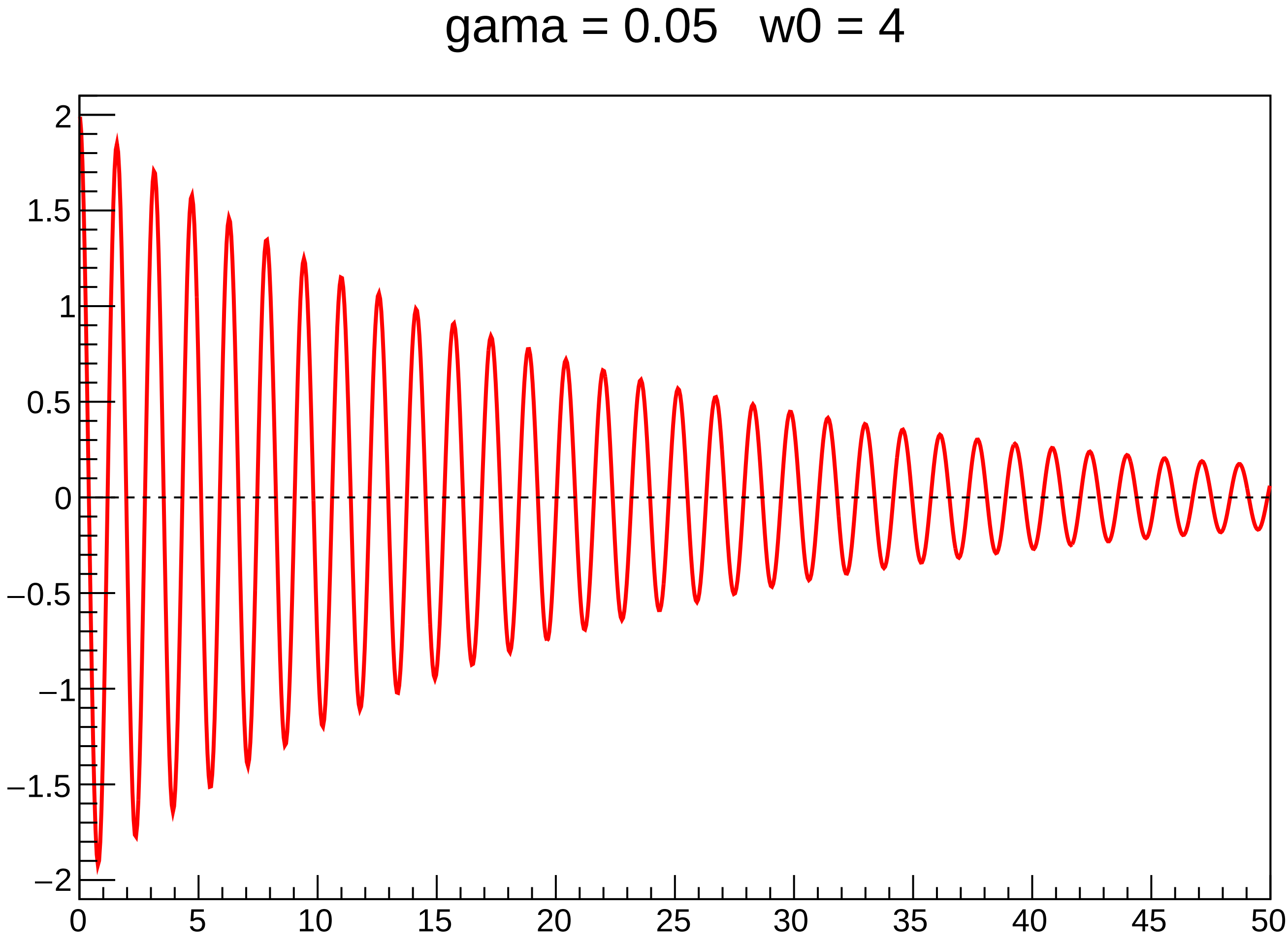

gama = 0.05 w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

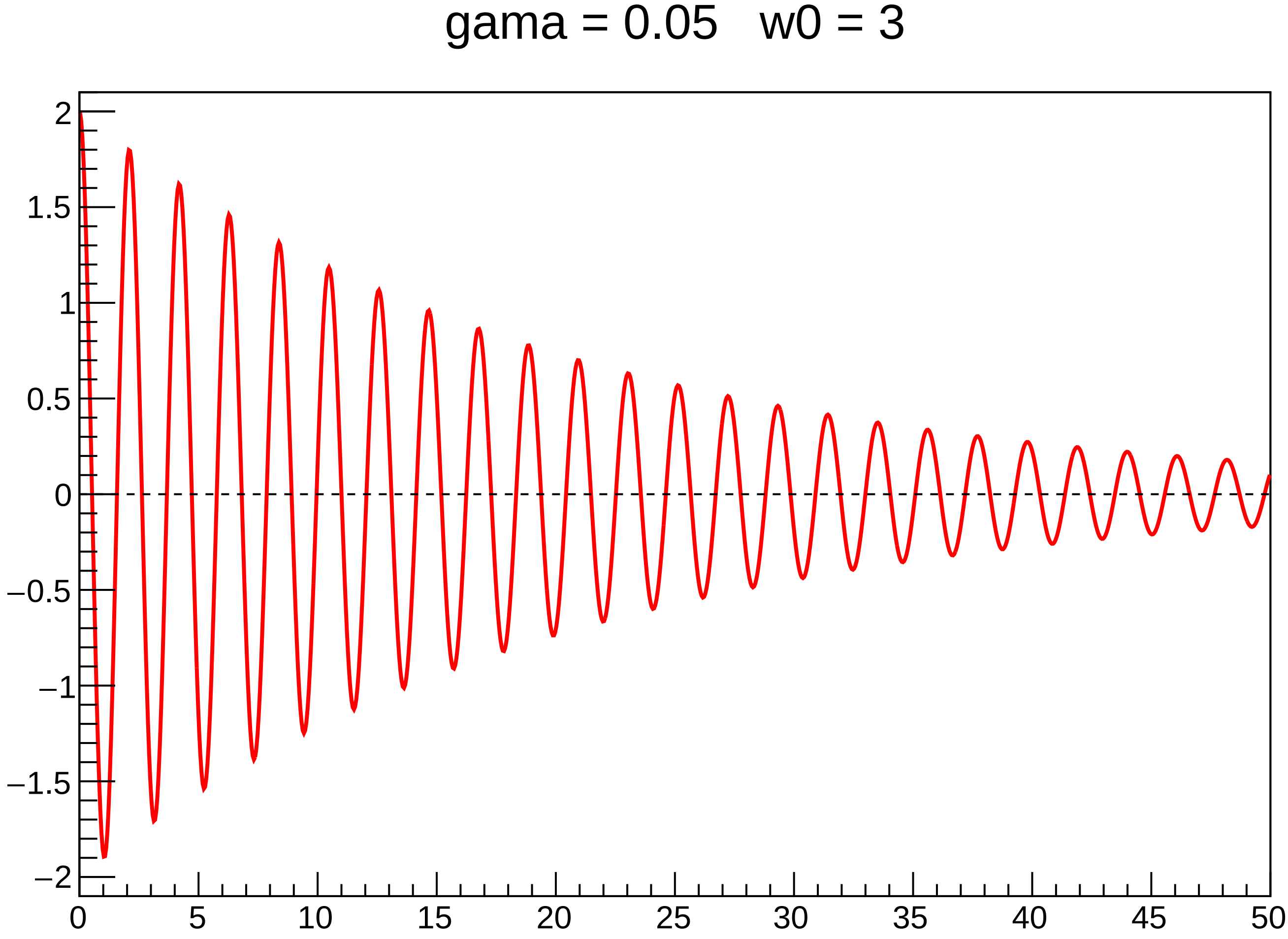

gama = 0.05   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

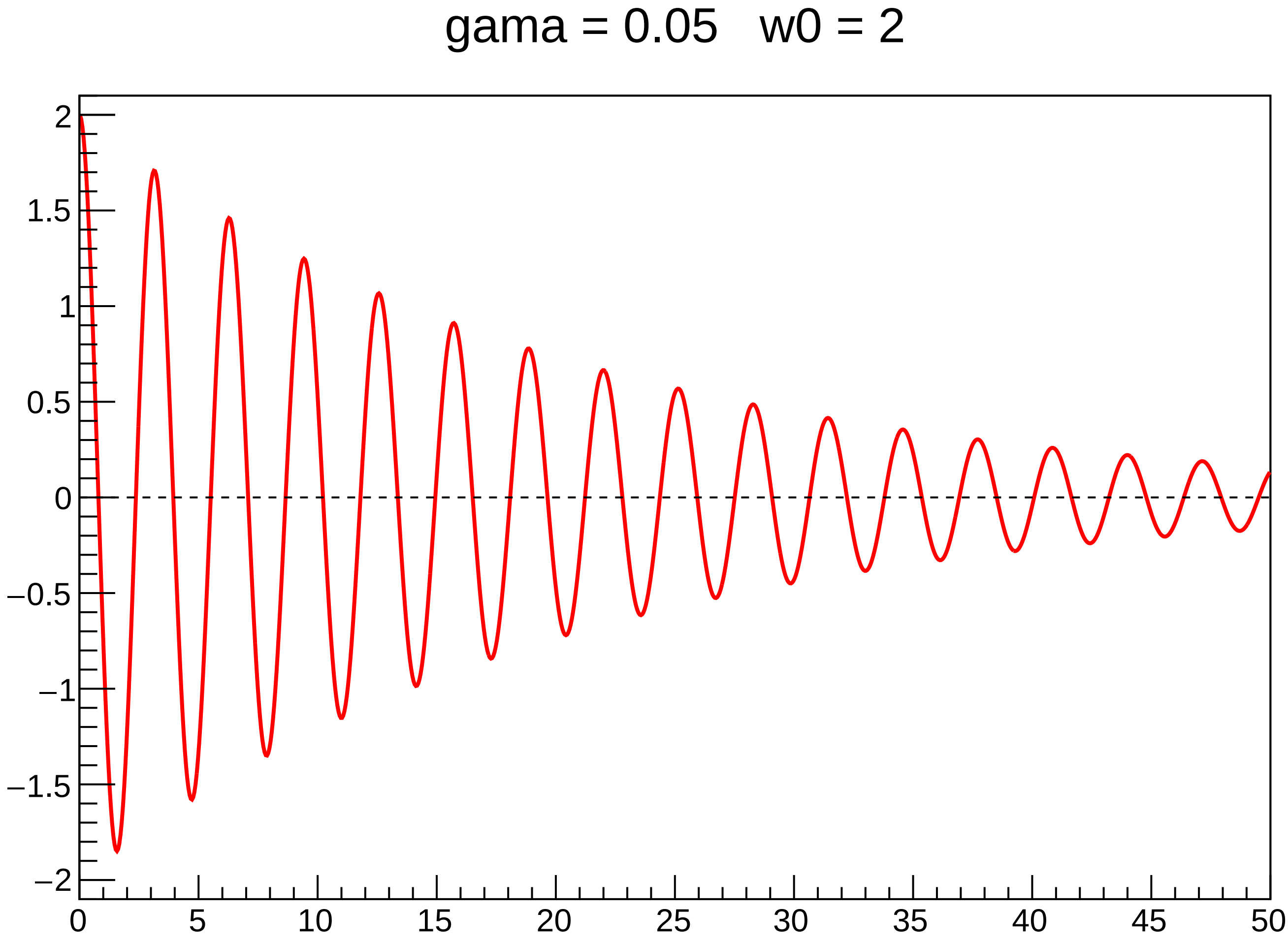

gama = 0.05   w0 = 4
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

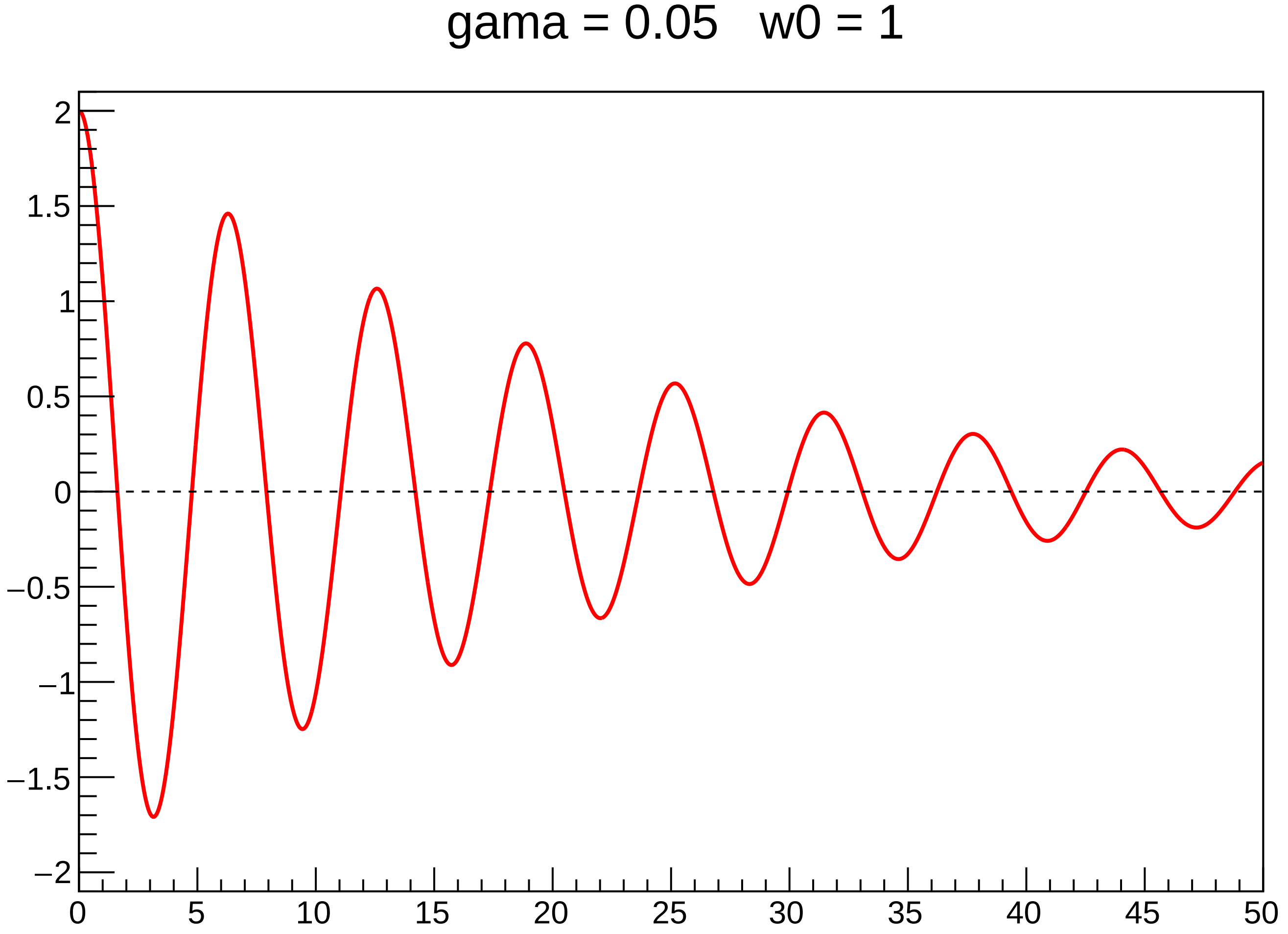
gama = 0.05   w0 = 5

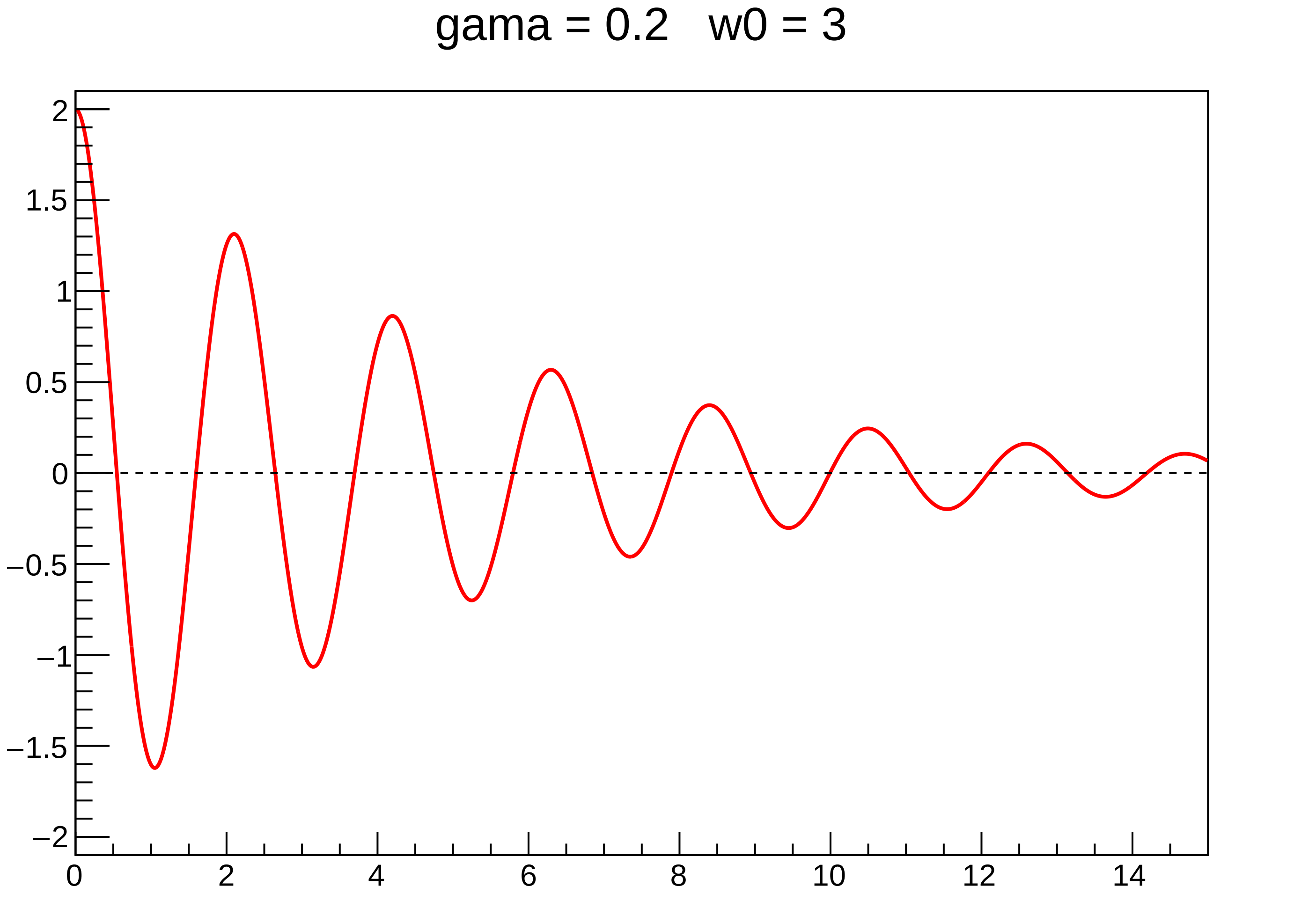


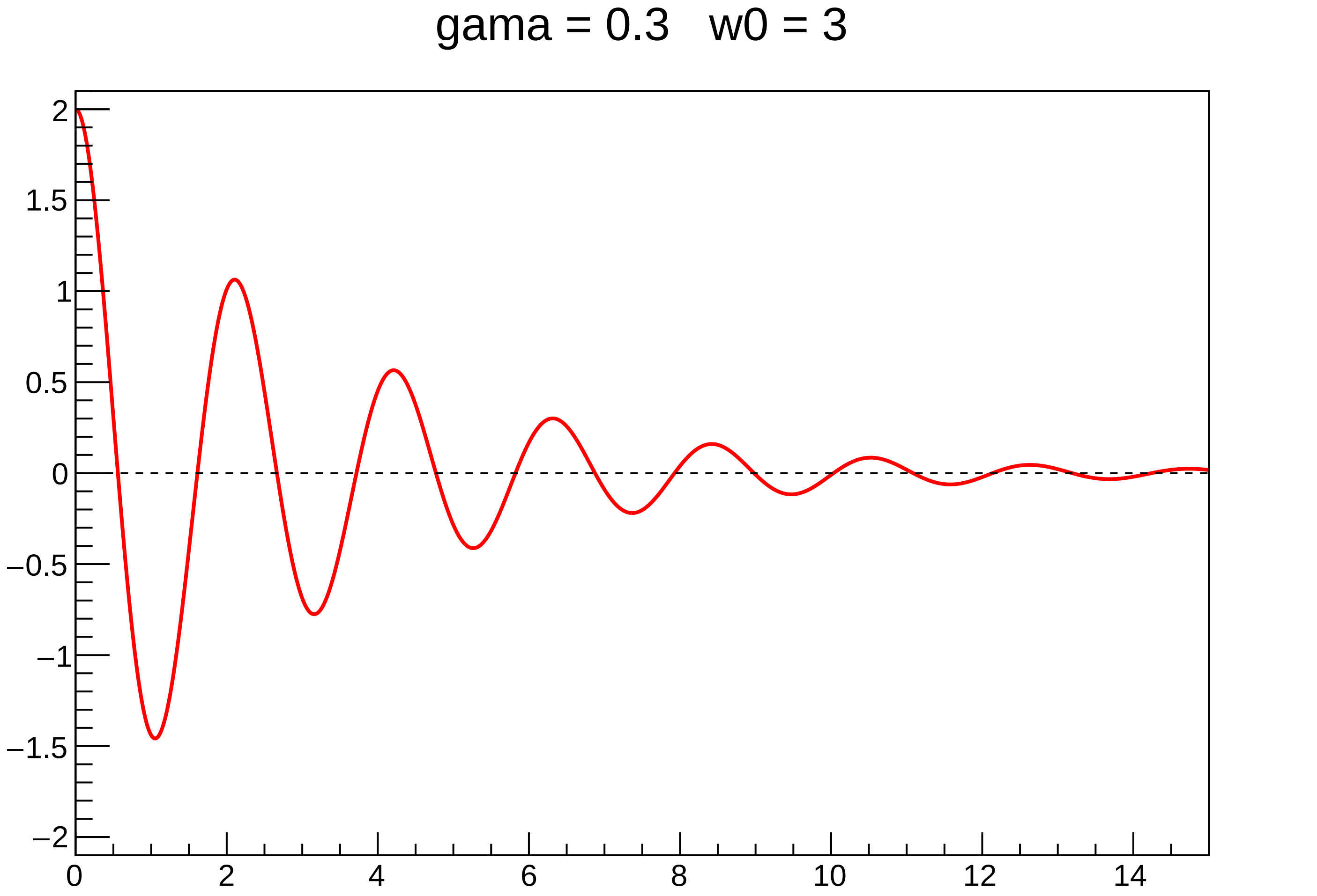

gama = 0.05   w0 = 4
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

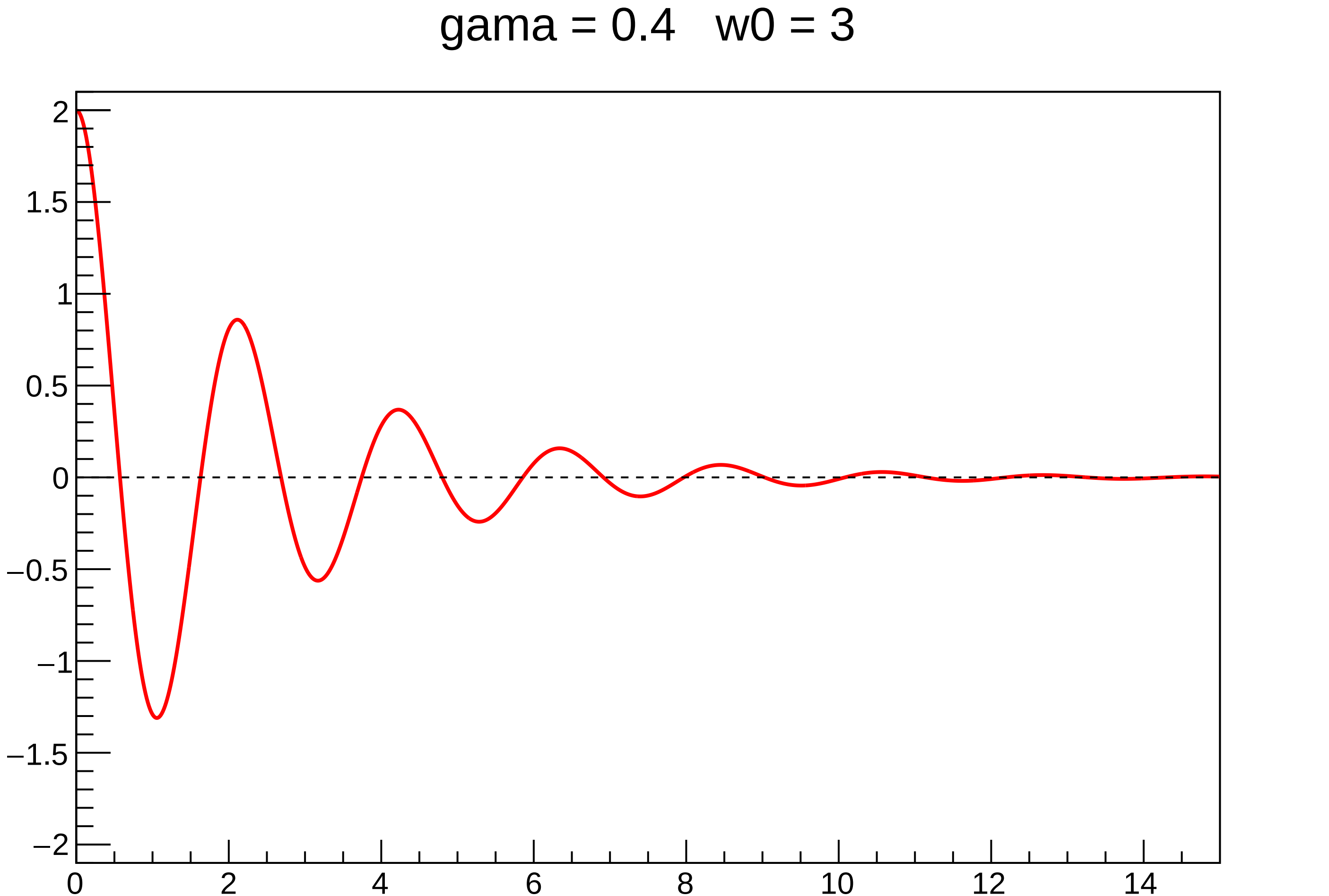

gama = 0.05   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50


gama = 0.05 w0 = 2
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

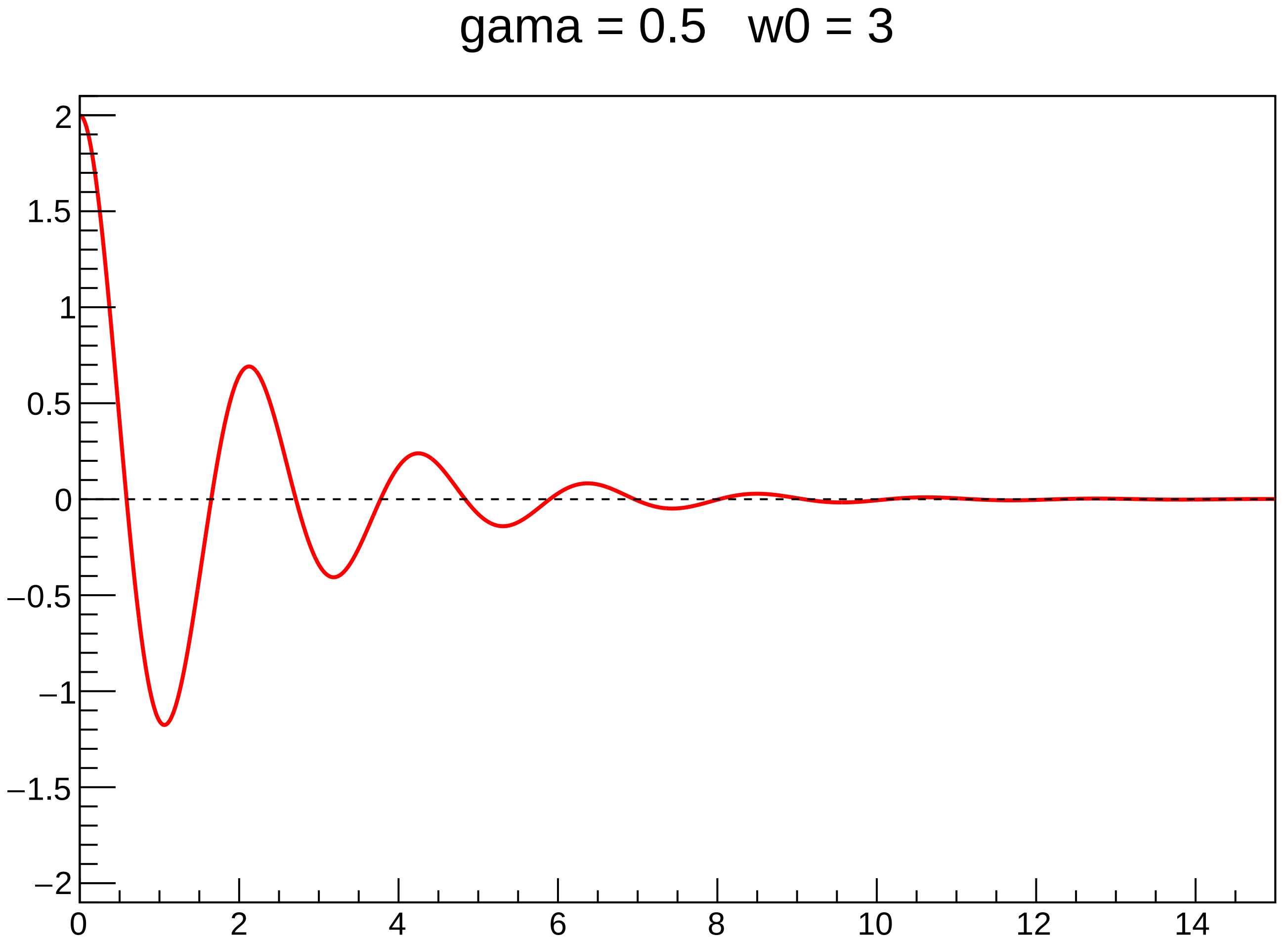

gama = 0.05   w0 = 1
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

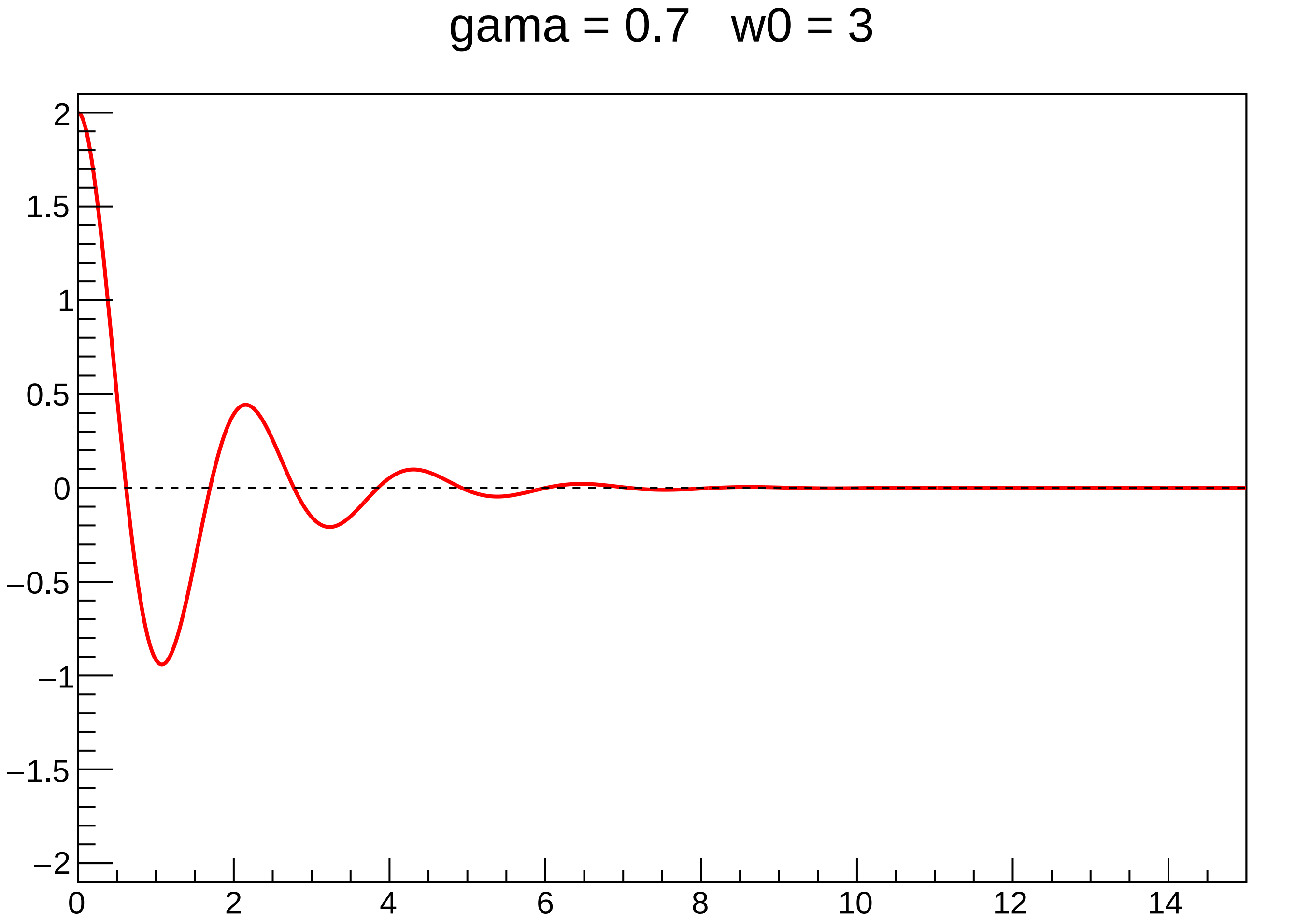

gama = 0.2   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

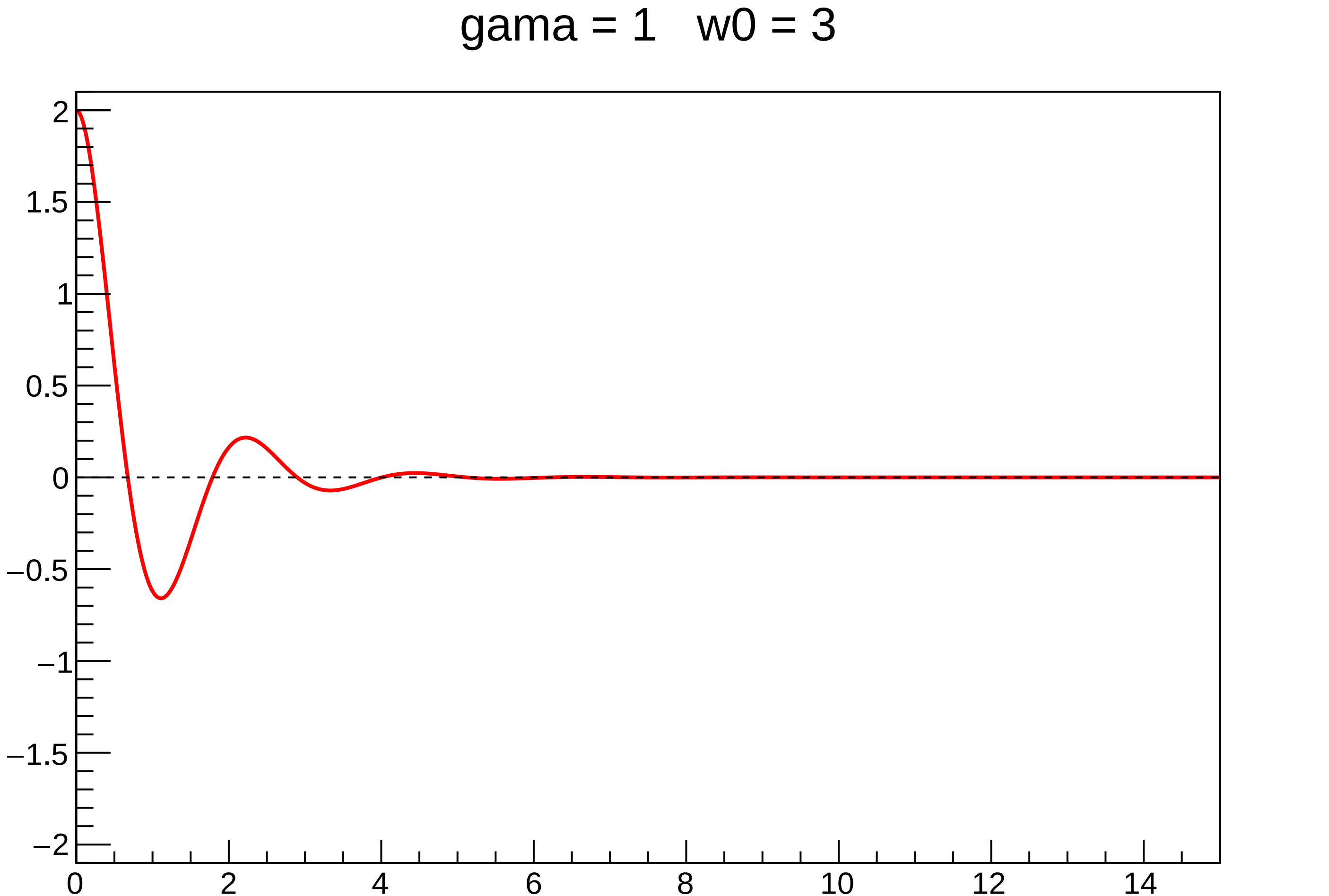

gama = 0.3   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

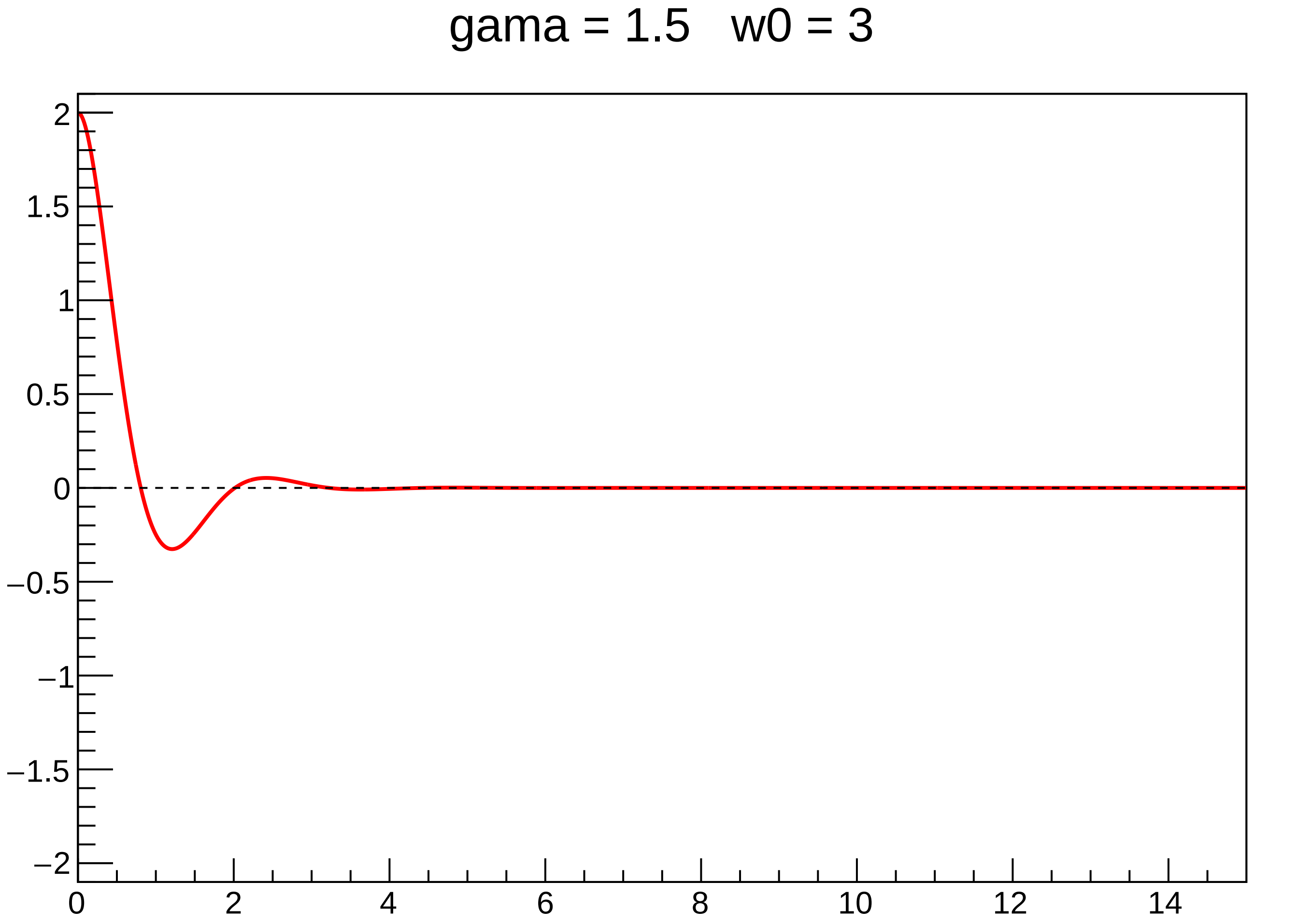


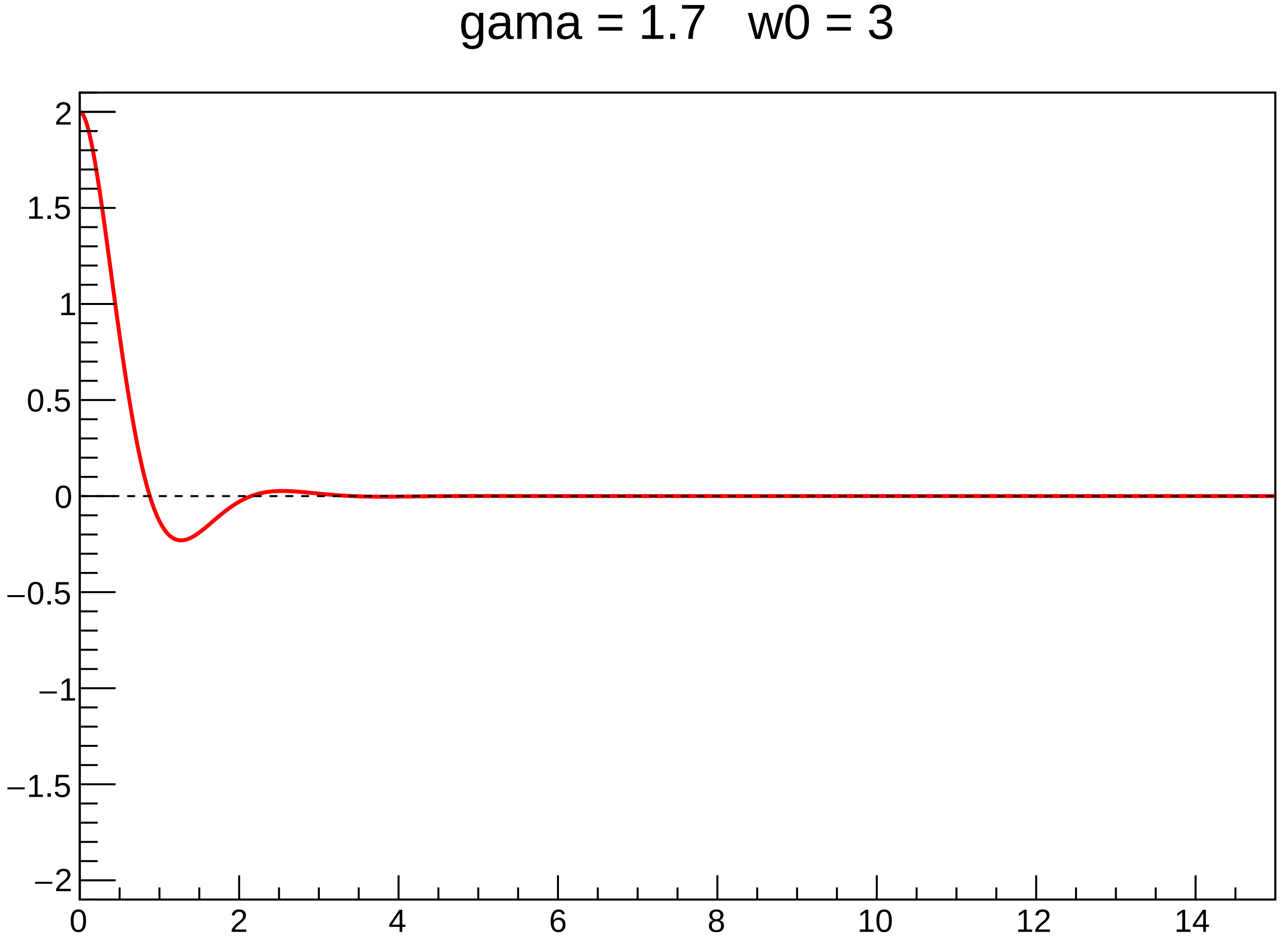
gama = 0.4 w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

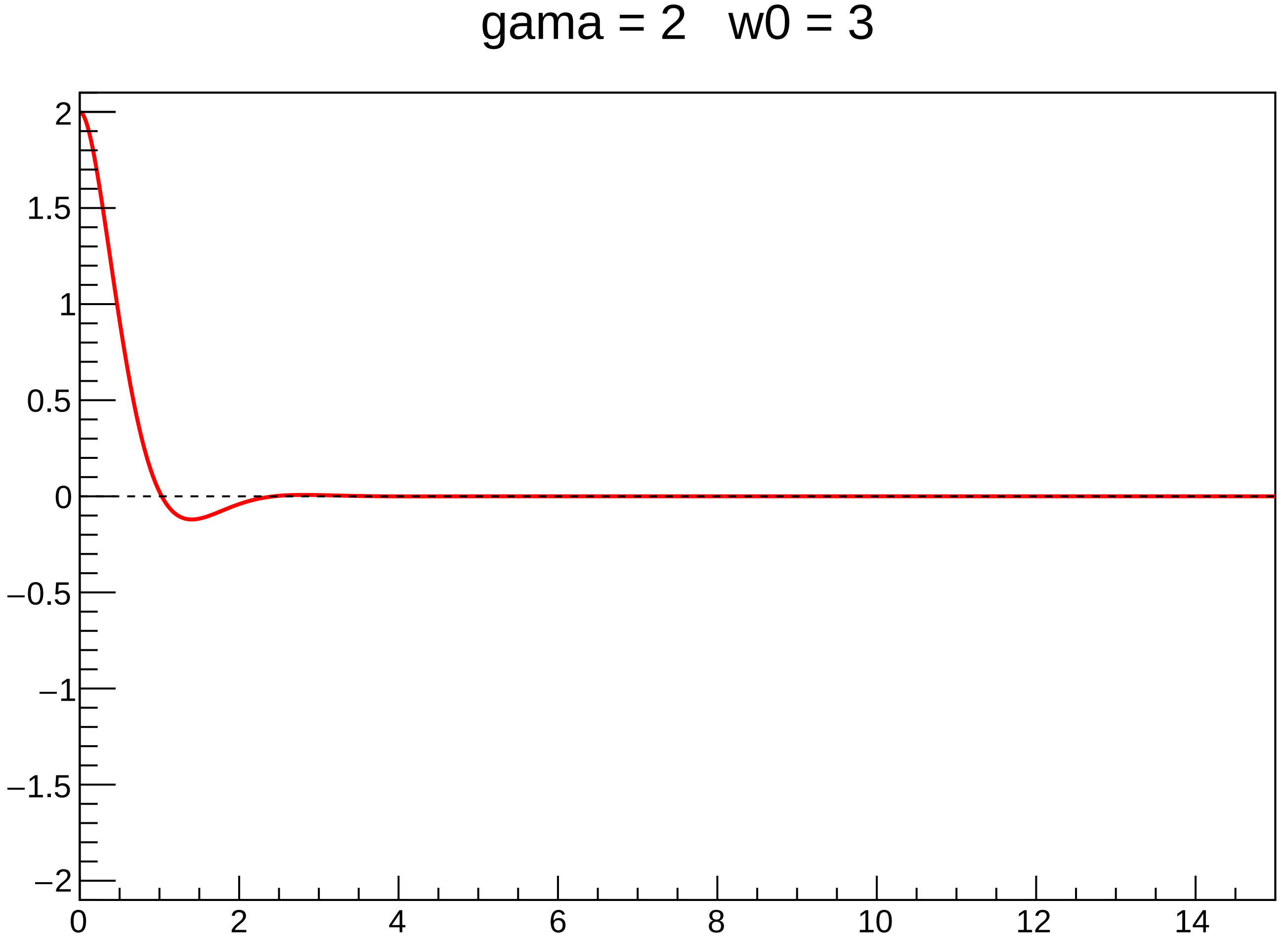

gama = 0.5   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

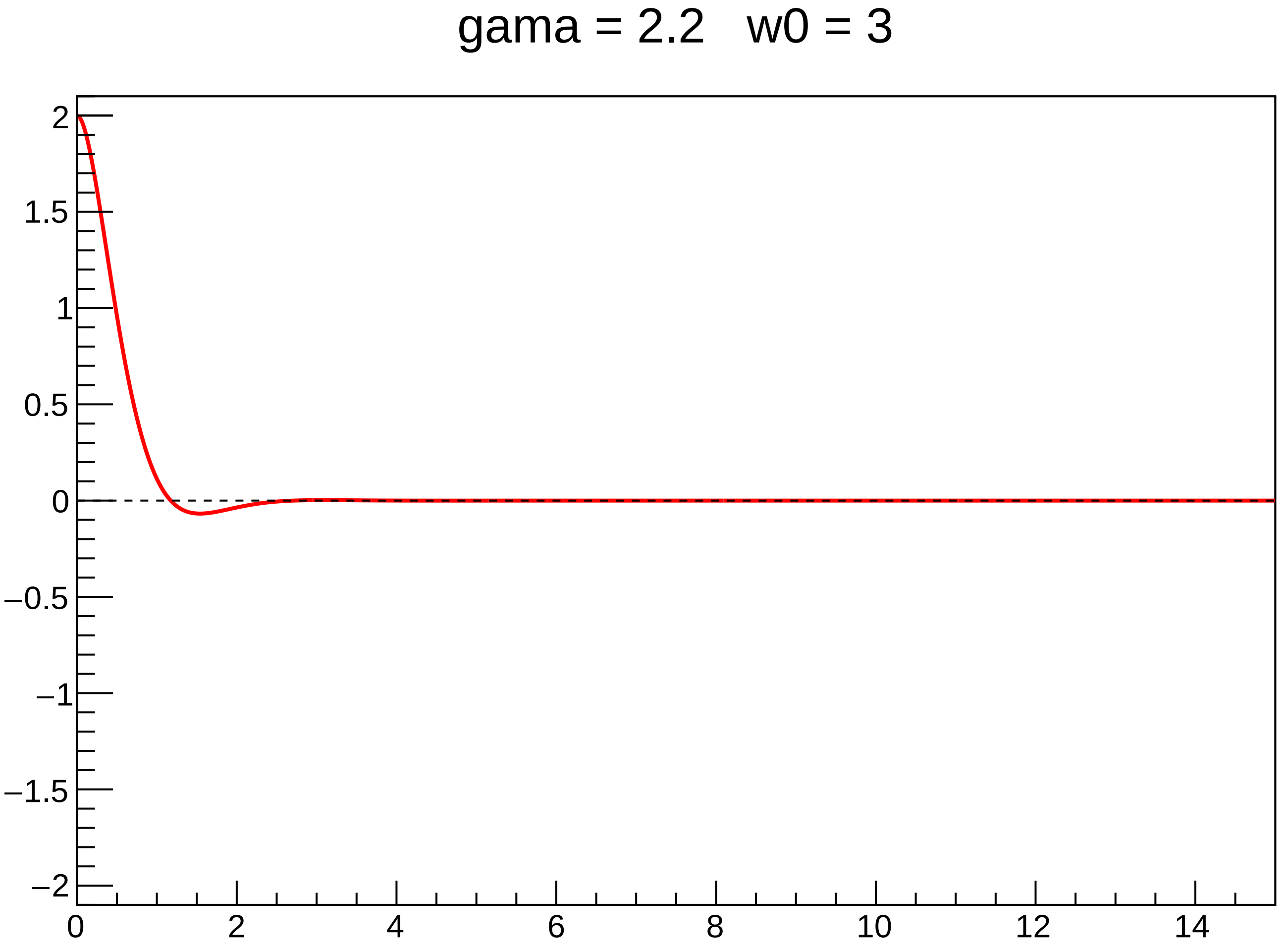

gama = 0.7   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

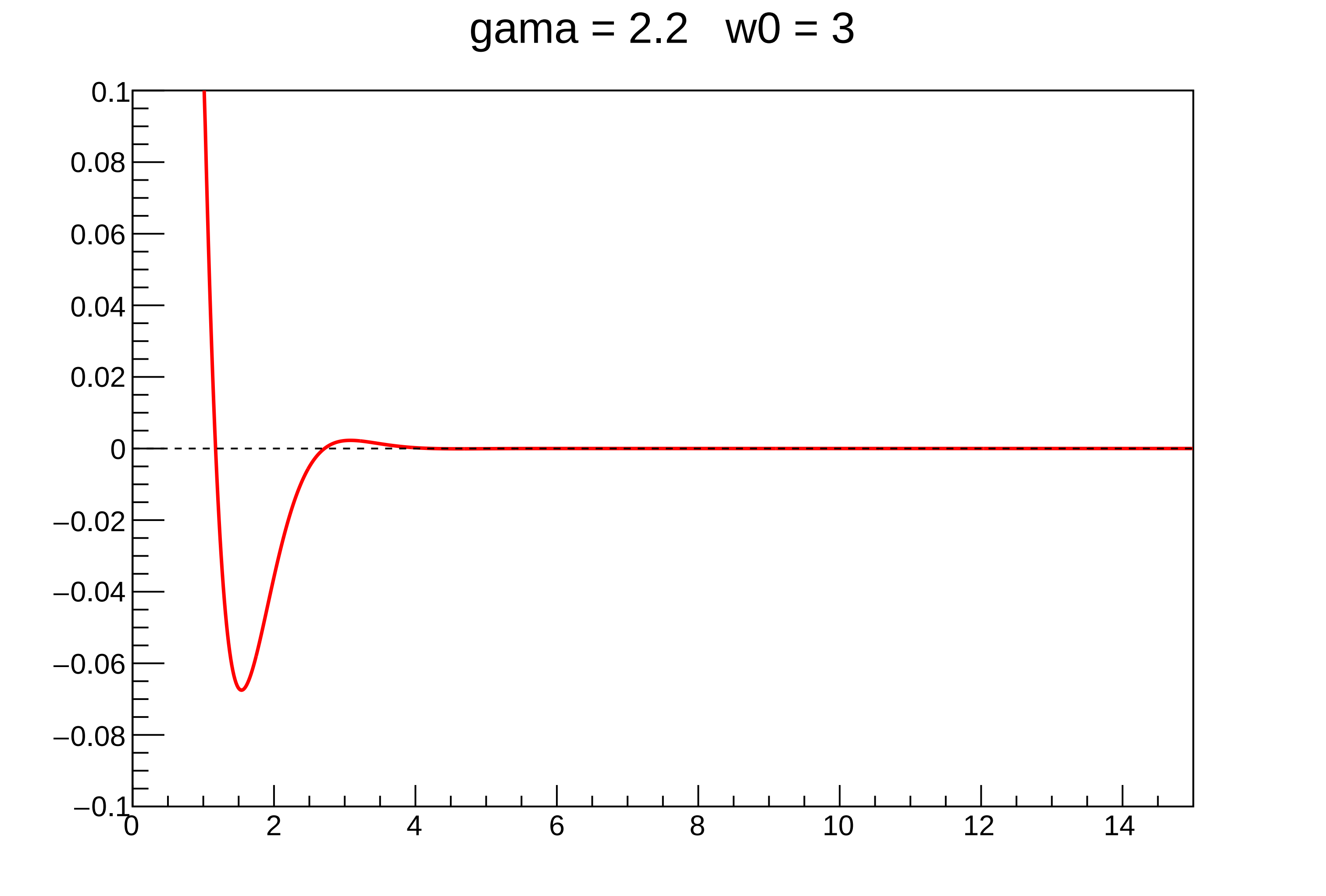

gama = 1   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

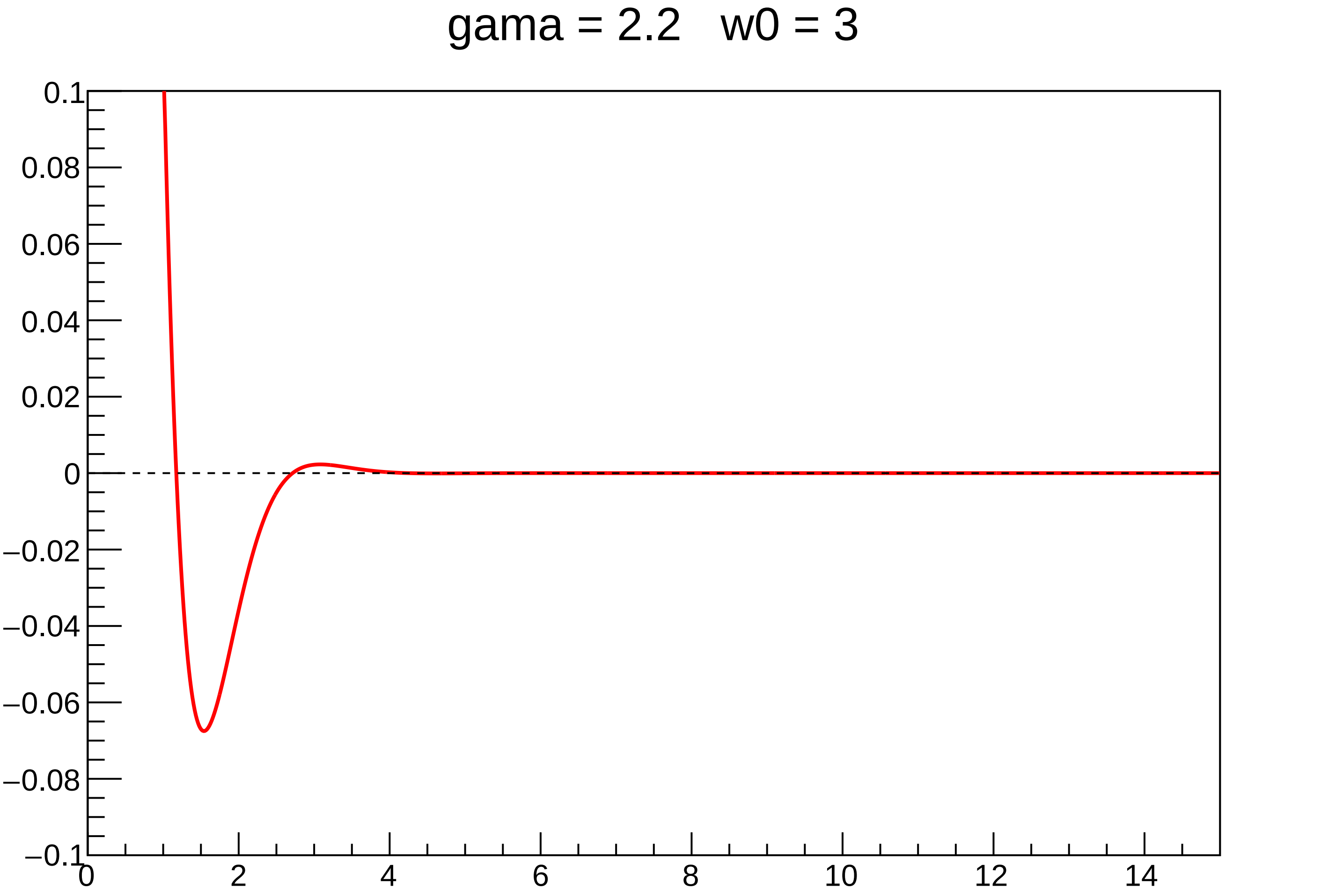

gama = 1.5   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

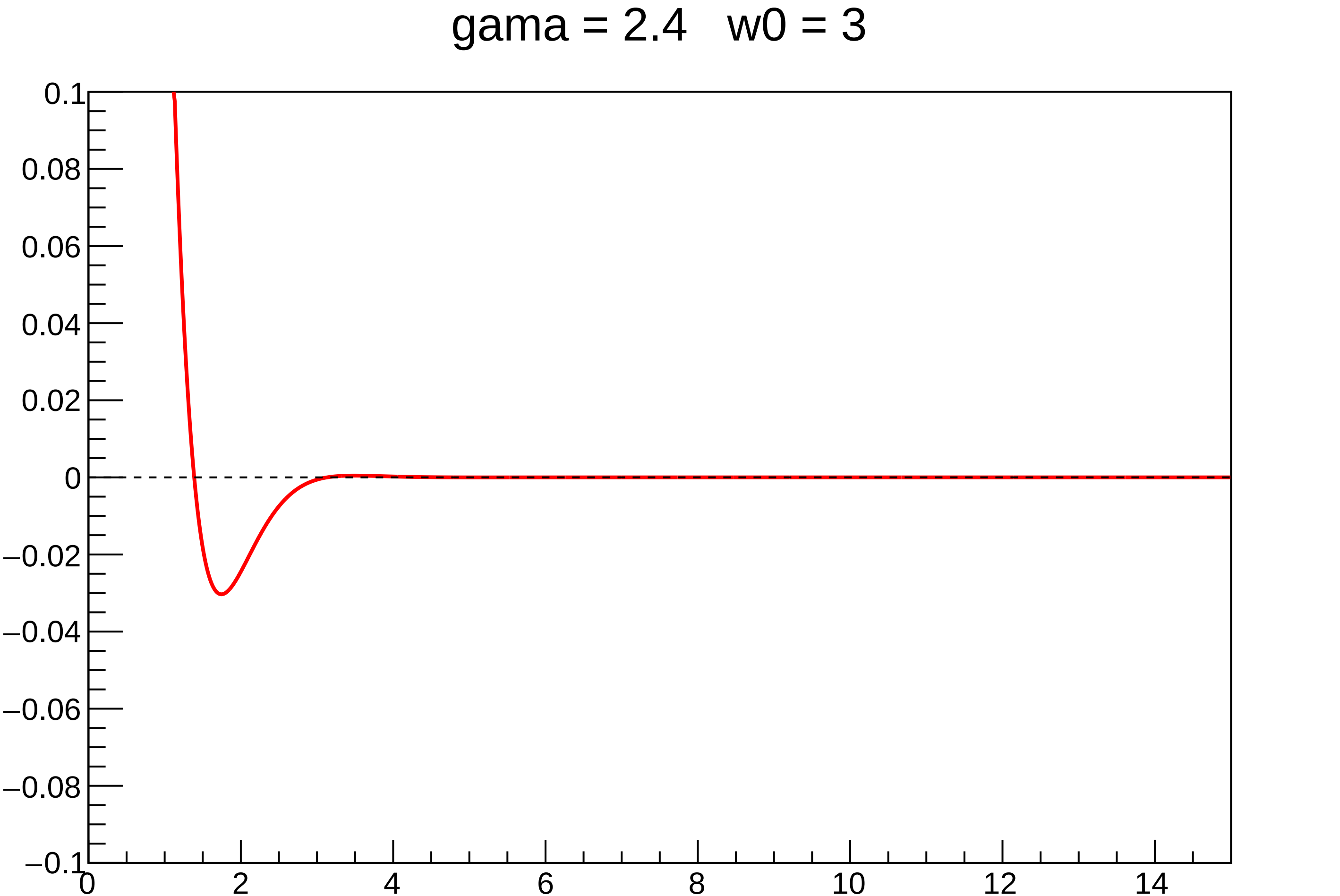

gama = 1.7   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

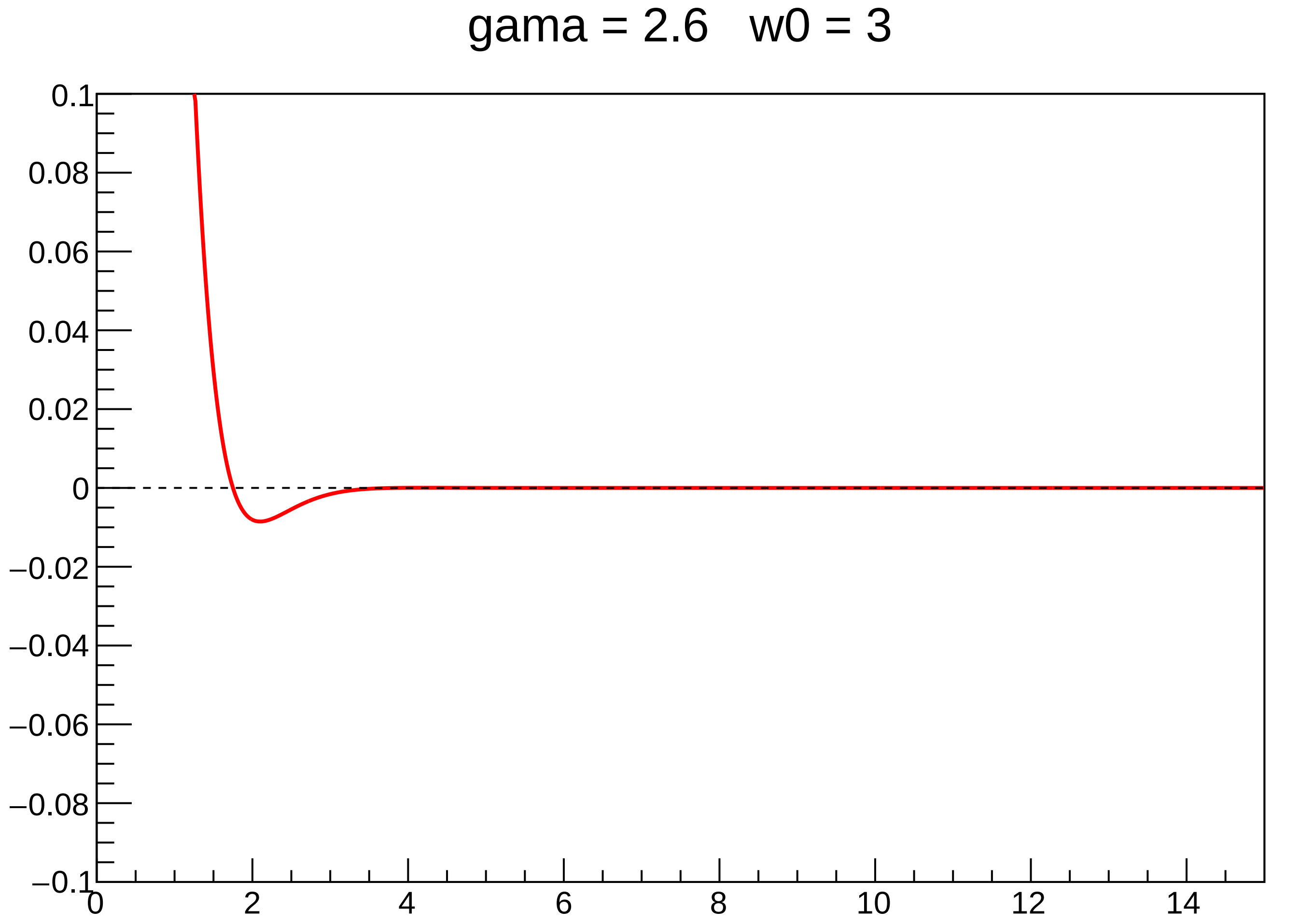

gama = 2   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

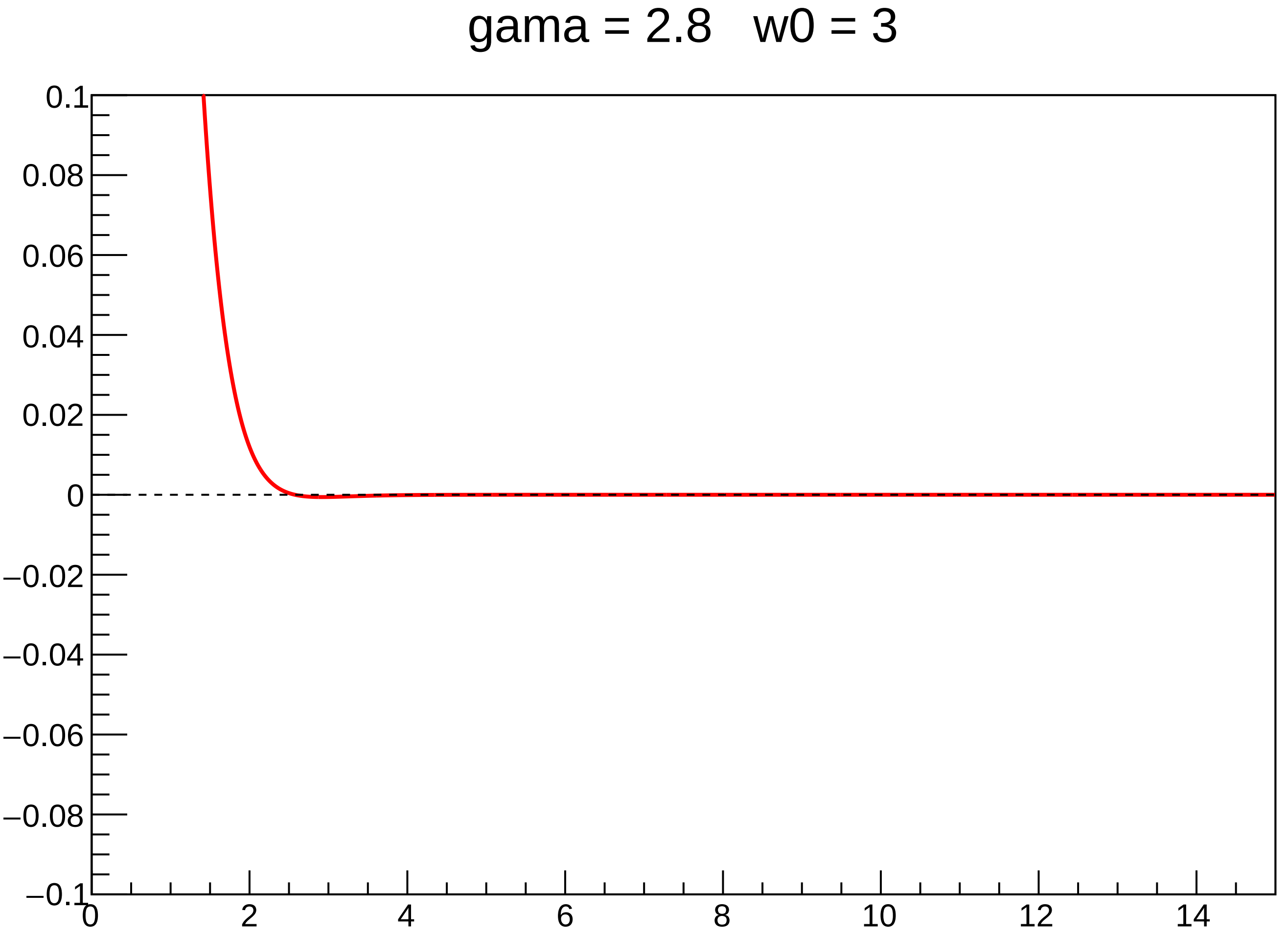

gama = 2.2   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

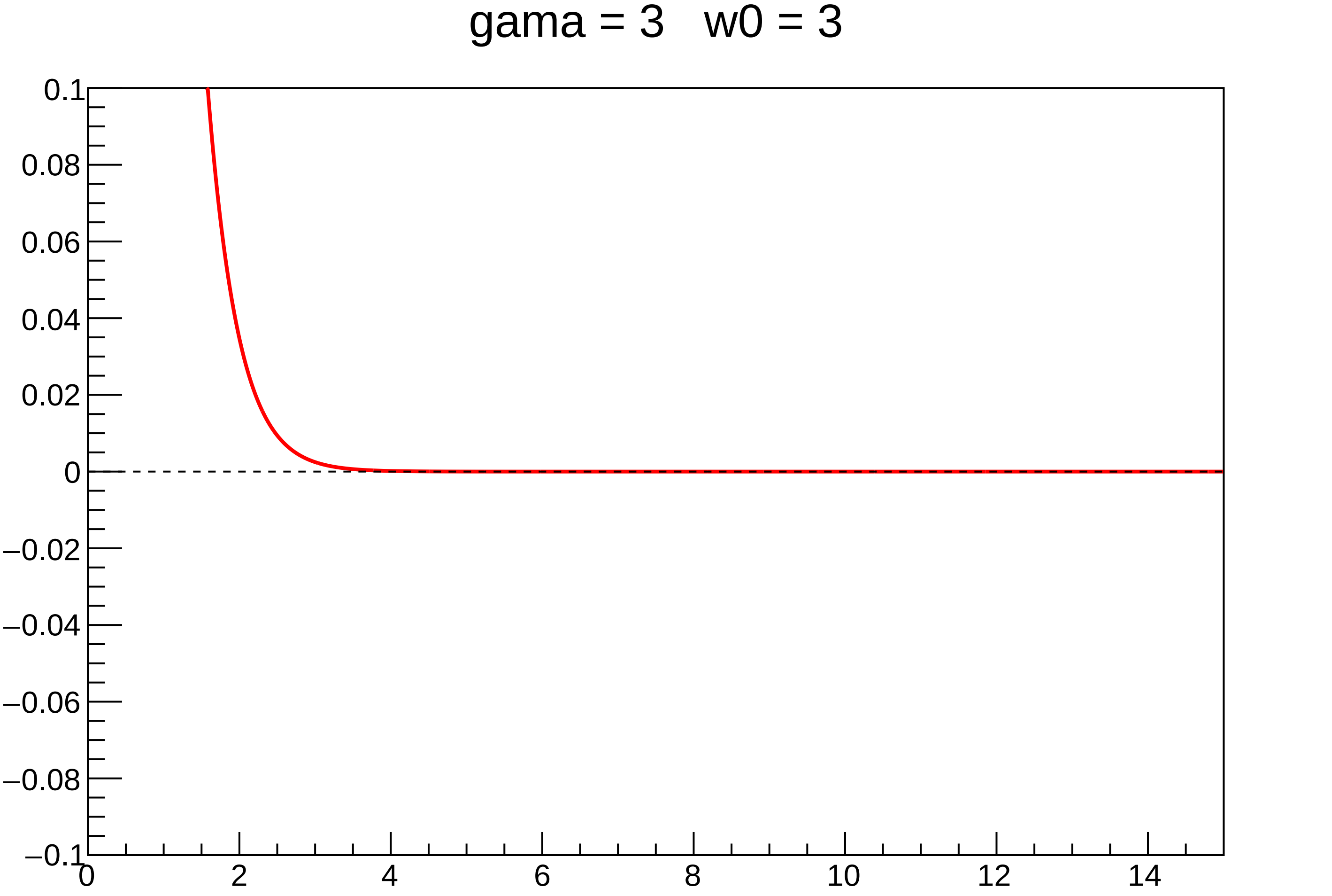

gama = 2.2   w0 = 3
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
−0.02
−0.04
−0.06
−0.08
−0.1
0
2
4
6
8
10
12
14

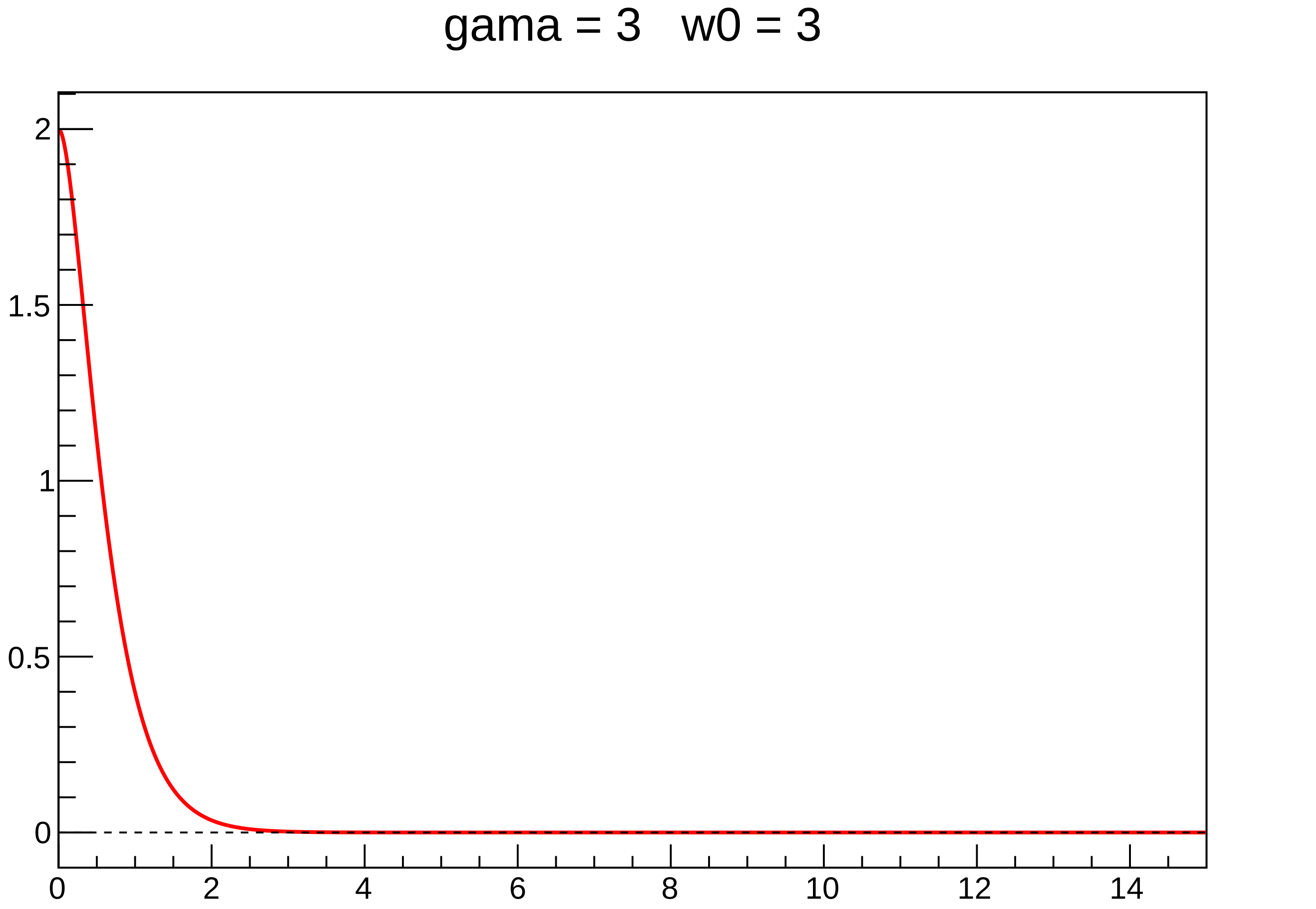

gama = 2.2   w0 = 3
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
−0.02
−0.04
−0.06
−0.08
−0.1
0
2
4
6
8
10
12
14

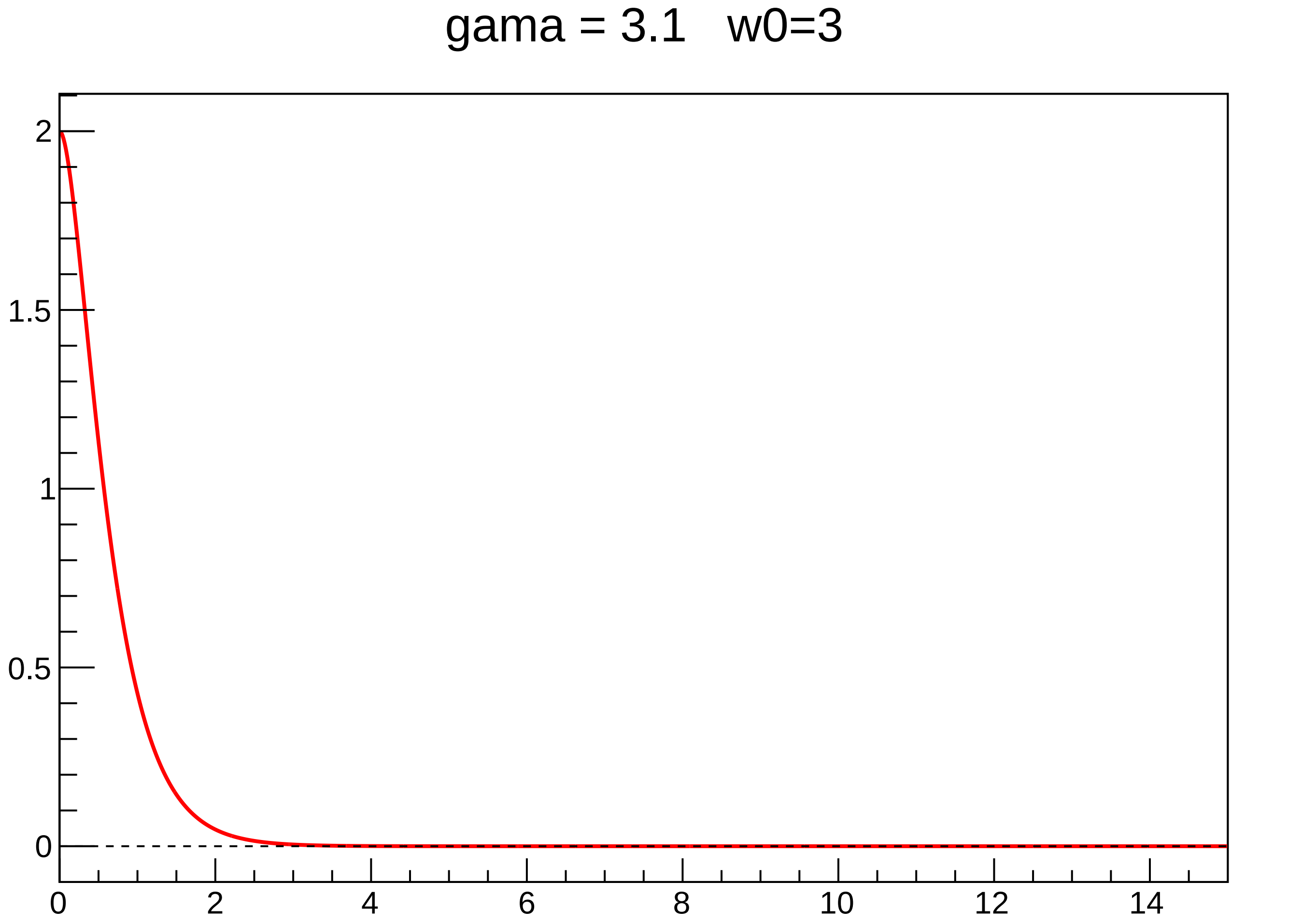

gama = 2.4 w0 = 3
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
–0.02
–0.04
–0.06
–0.08
–0.1
0
2
4
6
8
10
12
14

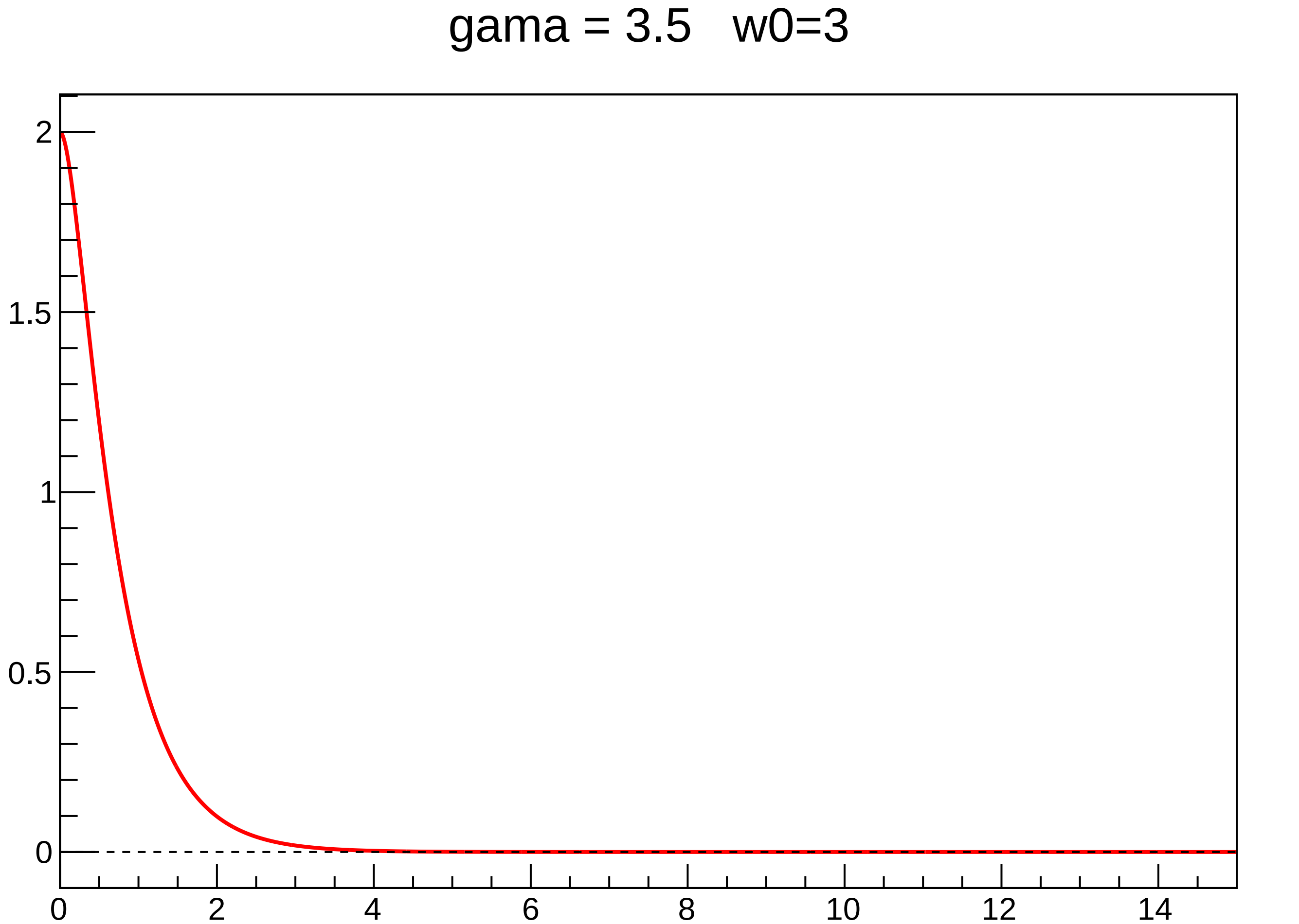

gama = 2.6 w0 = 3
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
–0.02
–0.04
–0.06
–0.08
–0.1
0
2
4
6
8
10
12
14


gama = 2.8   w0 = 3
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
–0.02
–0.04
–0.06
–0.08
–0.1
0
2
4
6
8
10
12
14

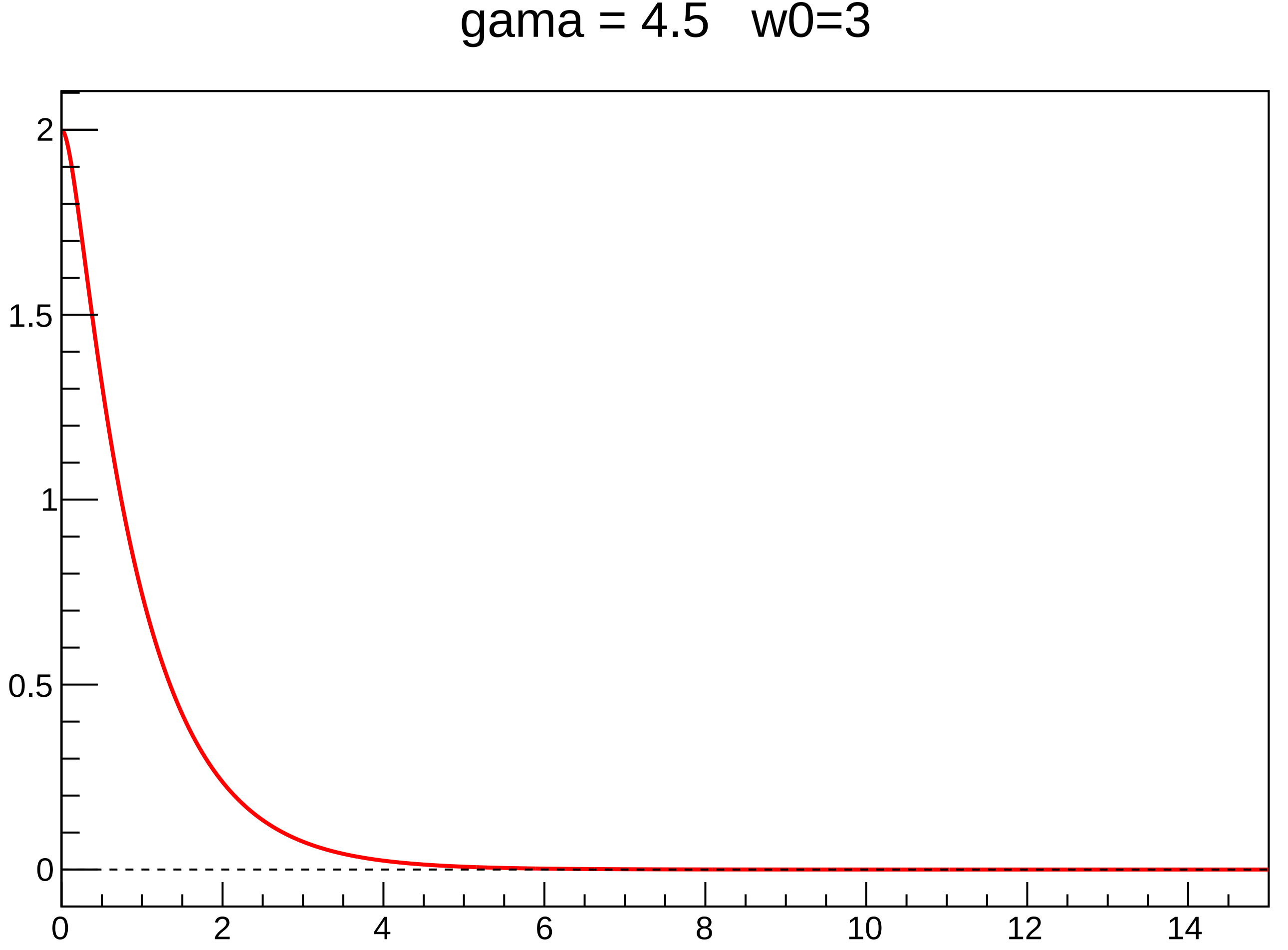

gama = 3   w0 = 3
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
−0.02
−0.04
−0.06
−0.08
−0.1
0
2
4
6
8
10
12
14

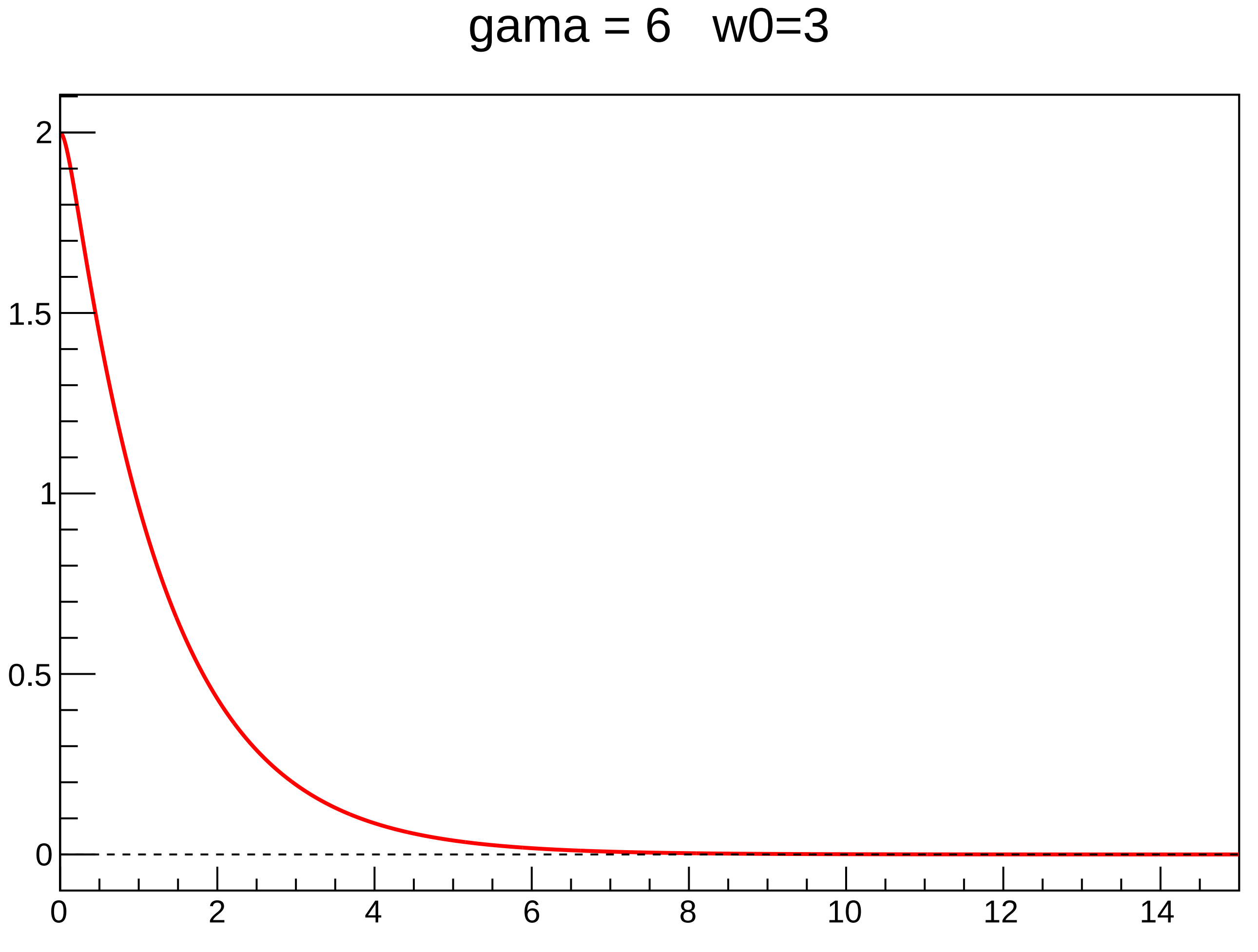

gama = 3   w0 = 3
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10
12
14

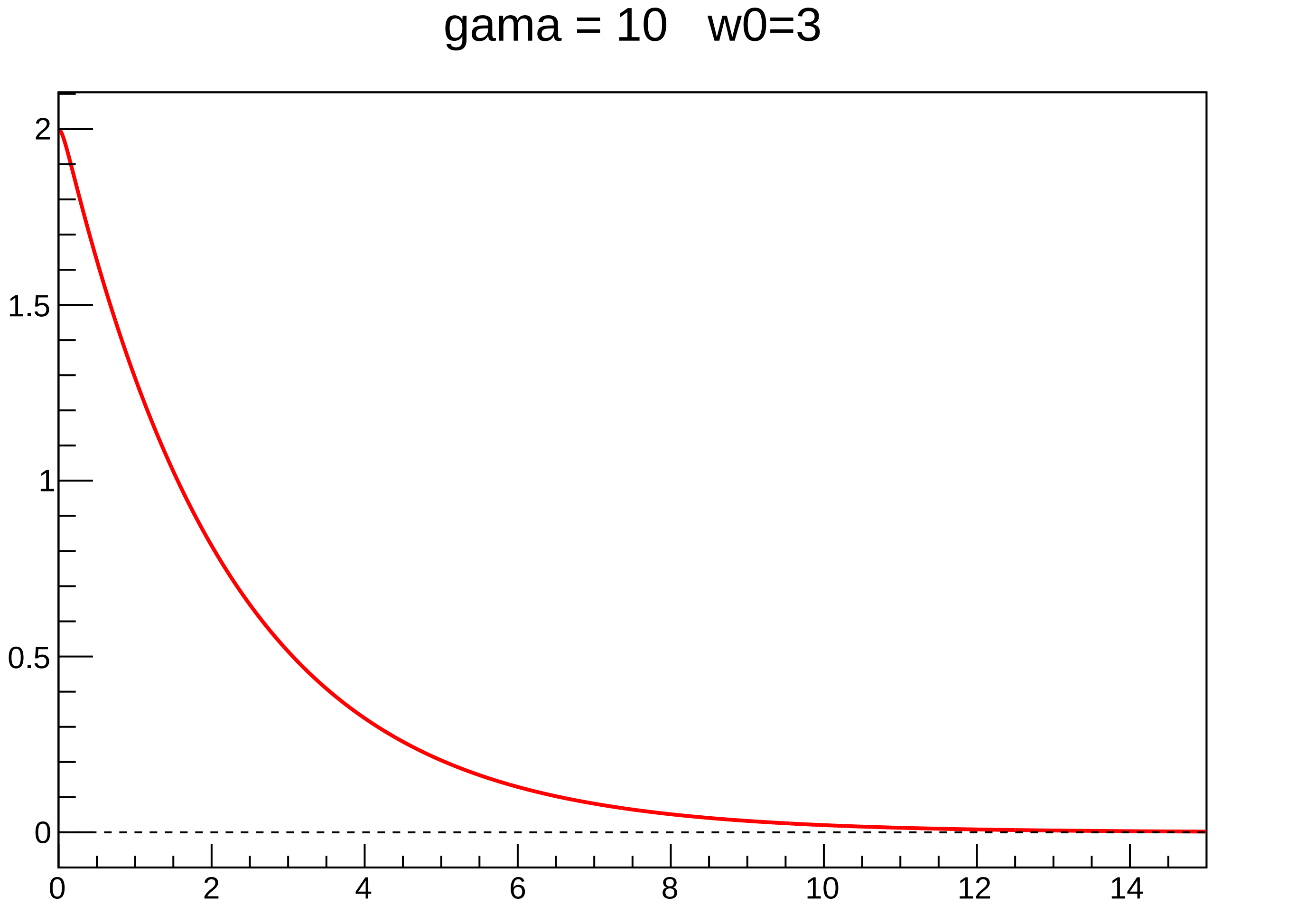

gama = 3.1   w0=3
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10
12
14

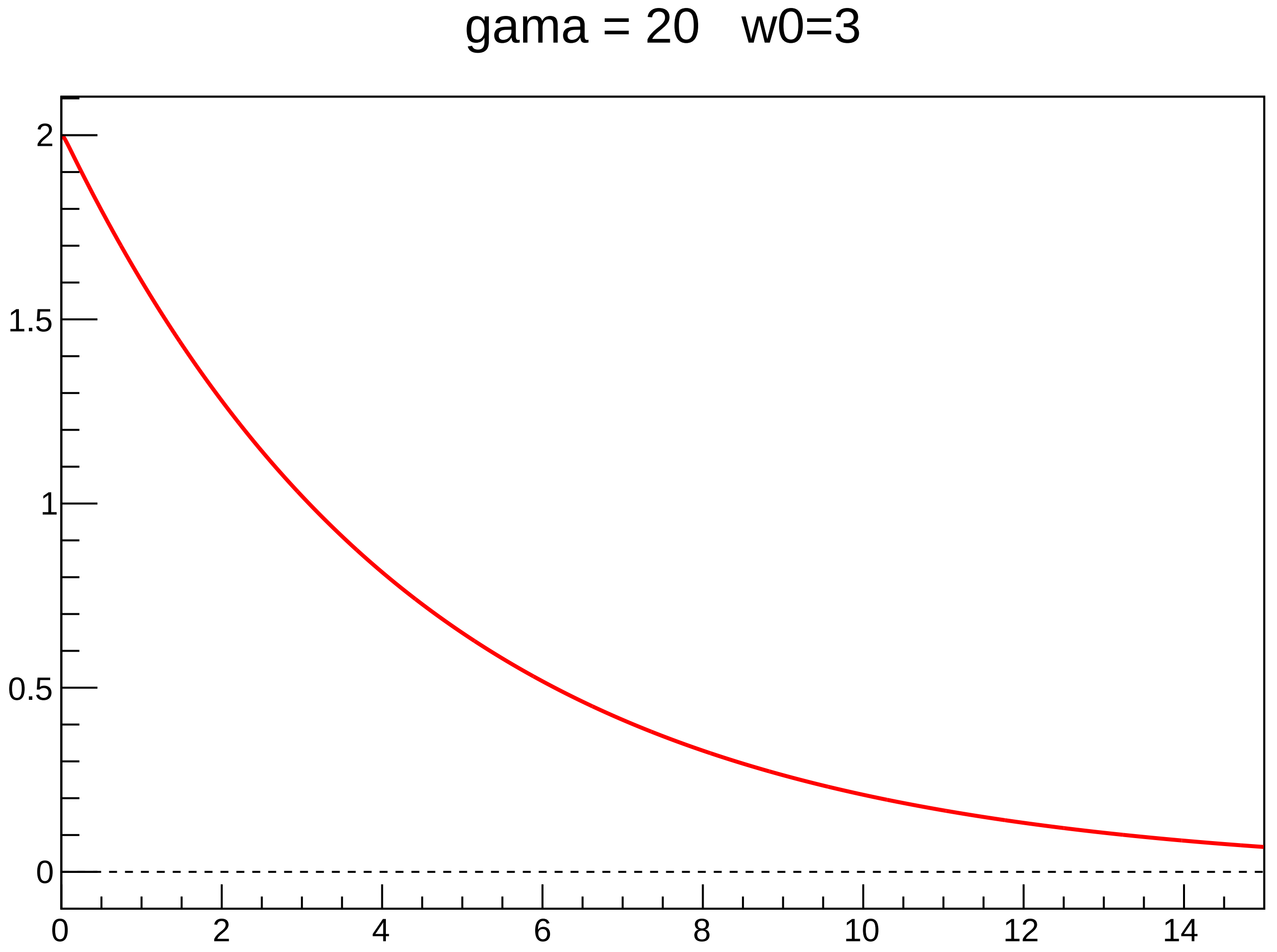


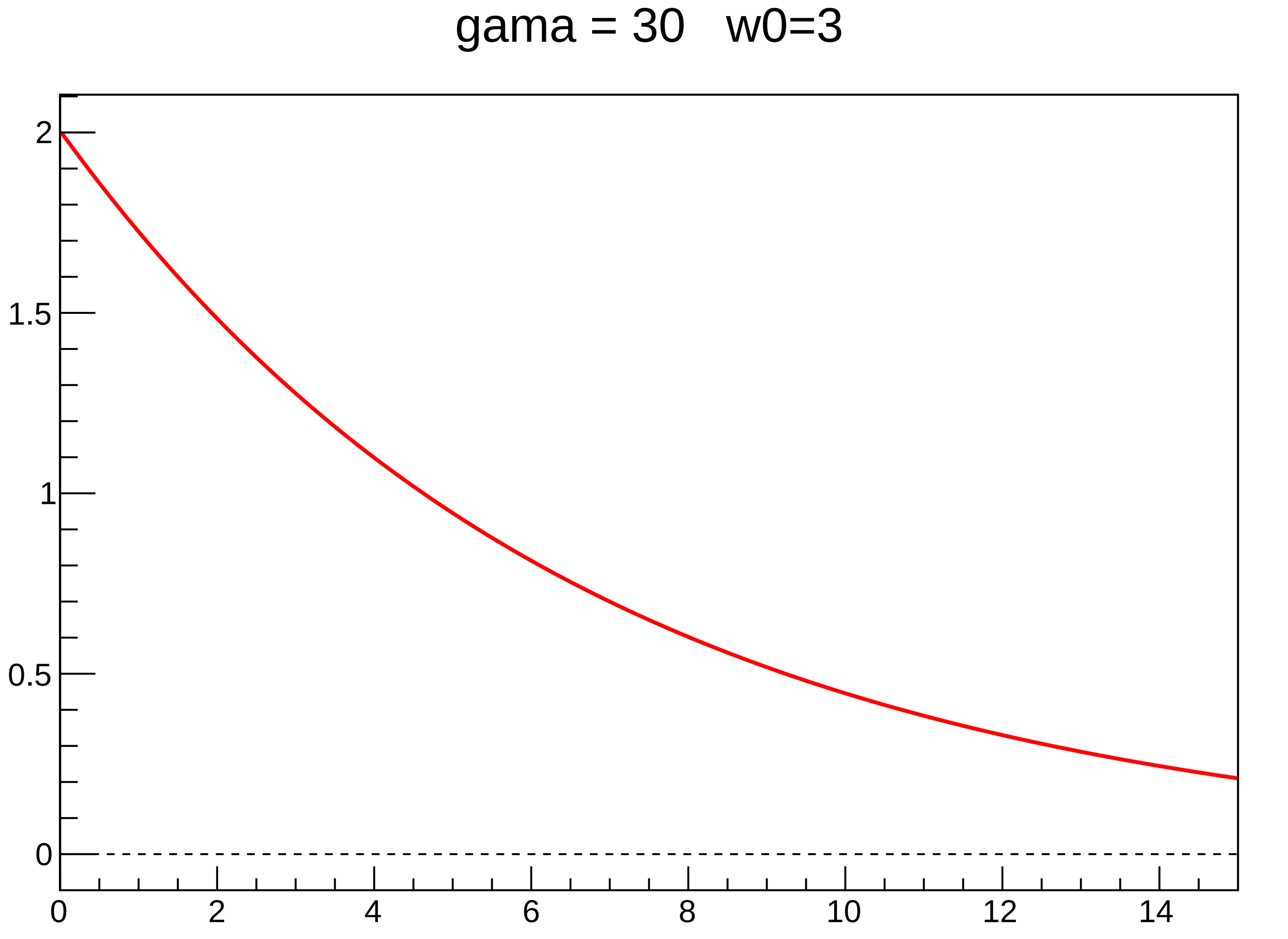
gama = 3.5   w0=3
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10
12
14

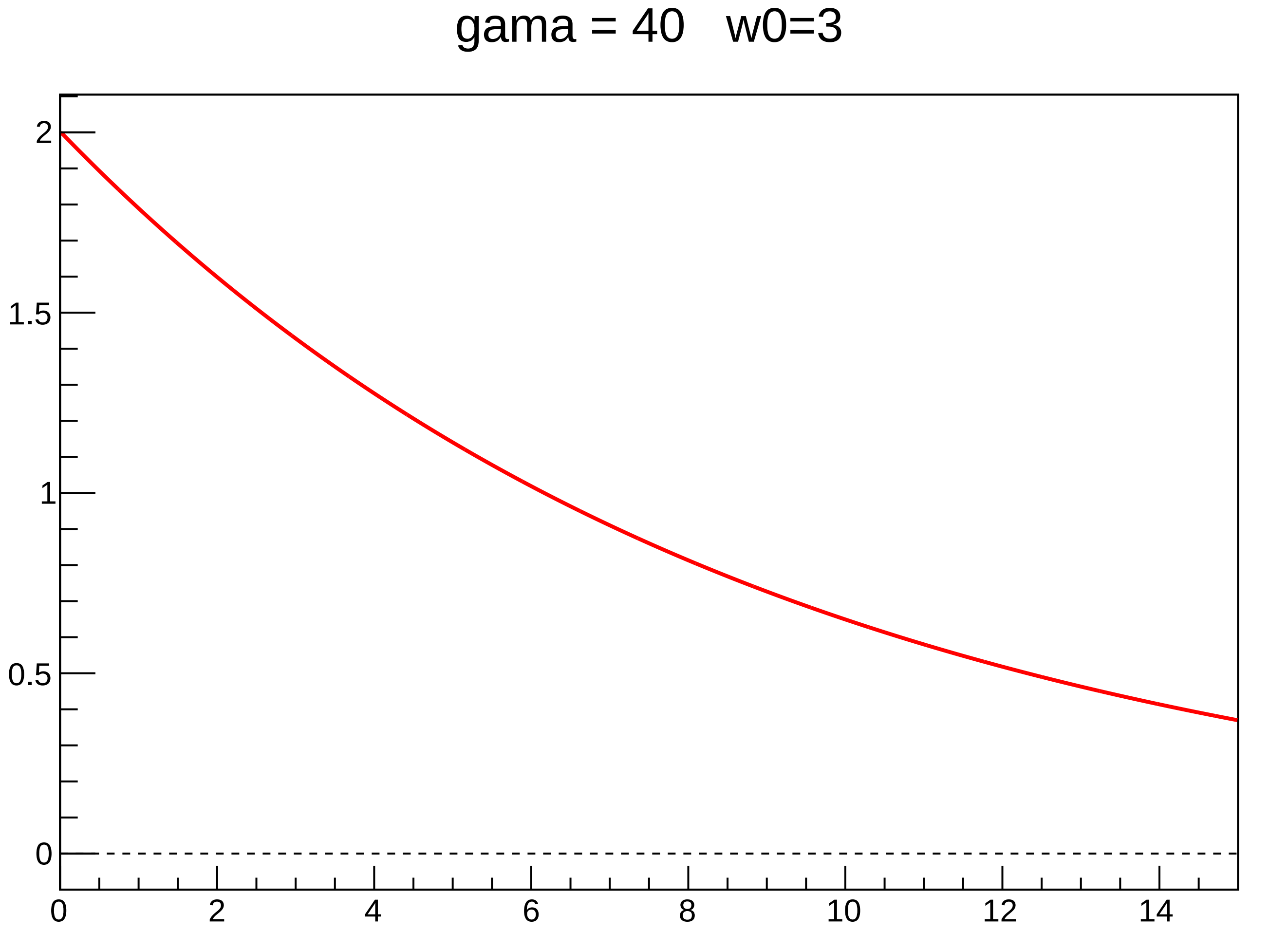

gama = 4.5   w0=3
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10
12
14


gama = 6   w0=3
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10
12
14


gama = 10   w0=3
0
0.5
1
1.5
2
0
2
4
6
8
10
12
14

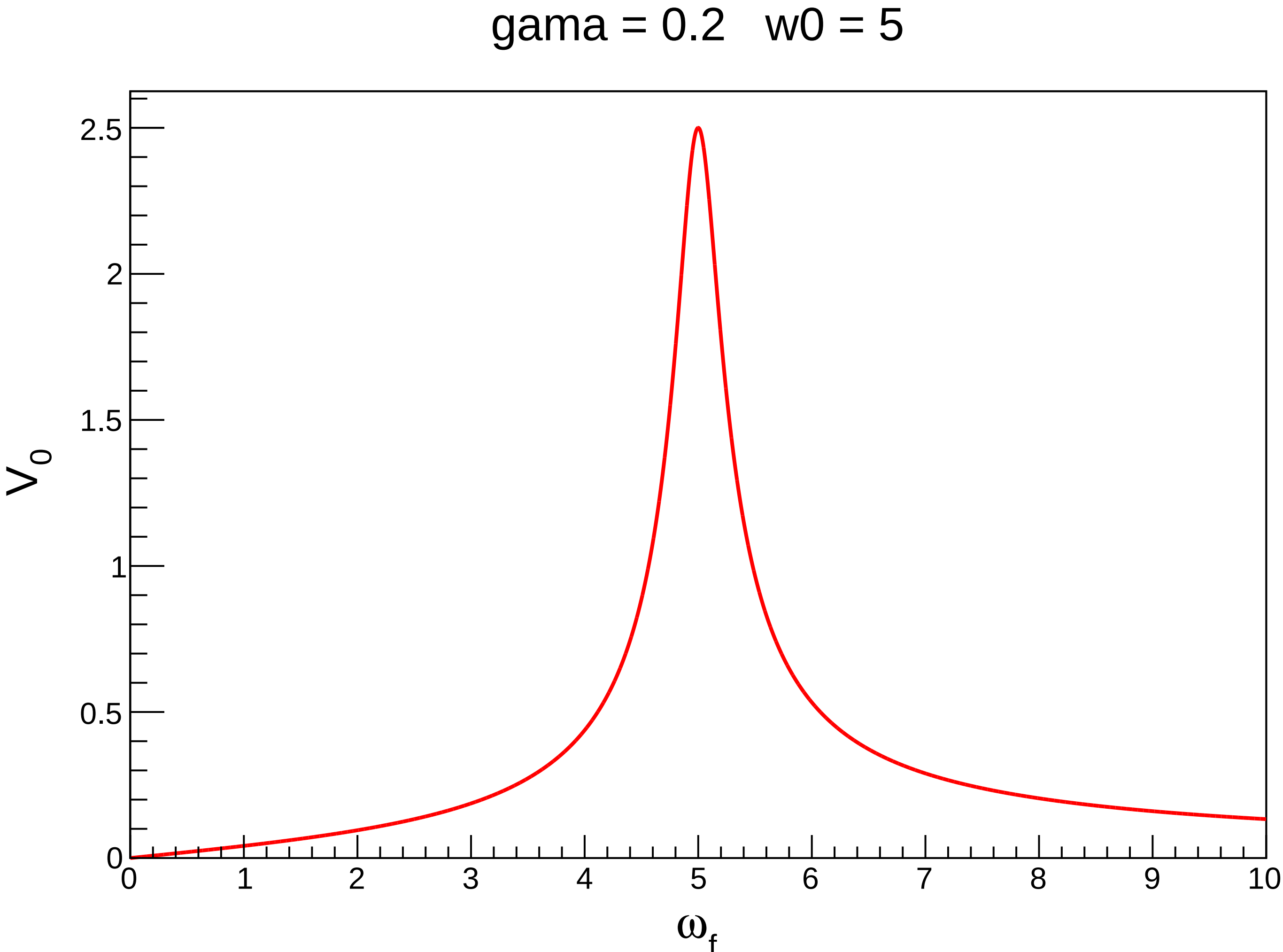

gama = 20   w0=3
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10
12
14

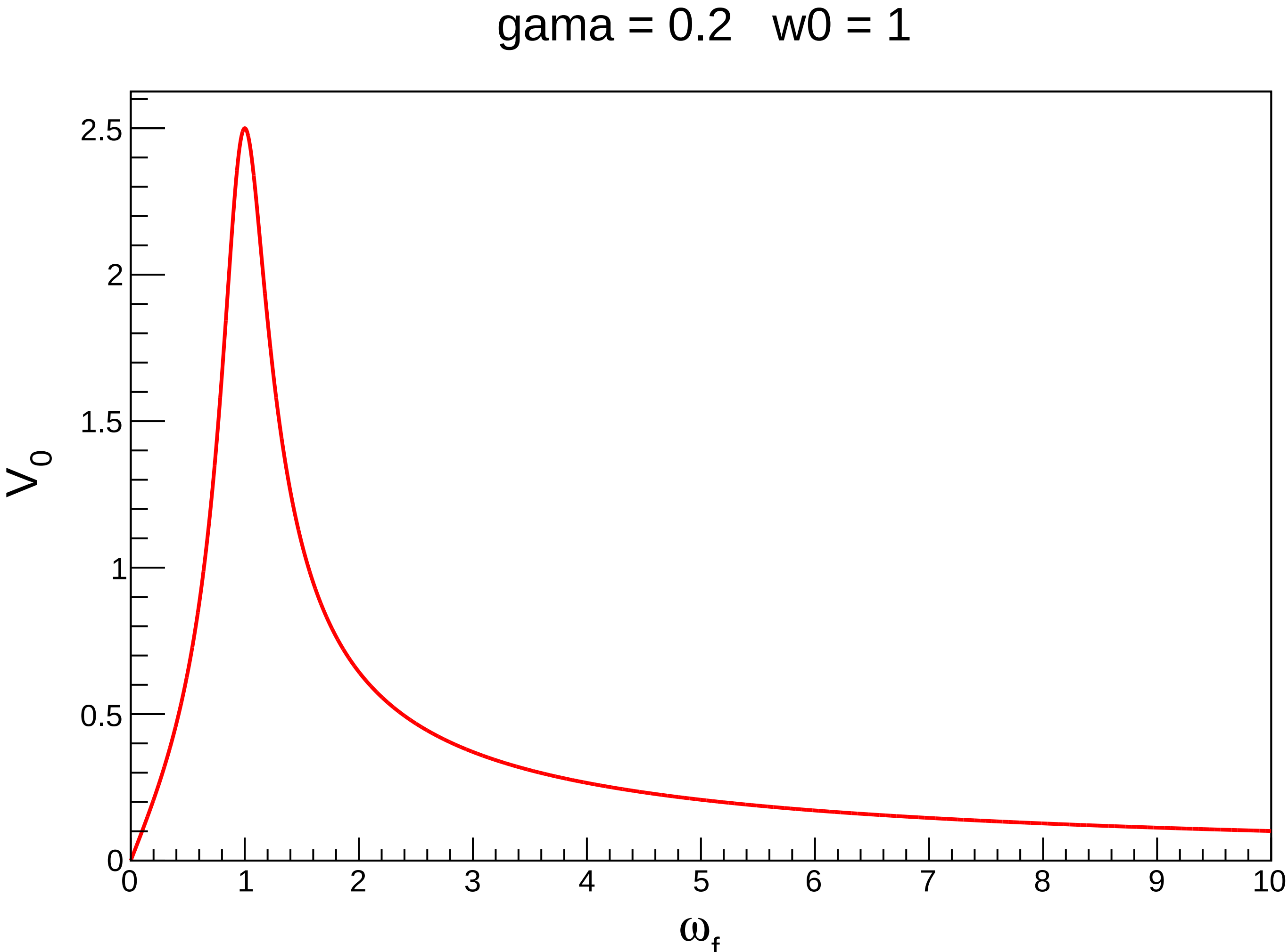

gama = 30   w0=3
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10
12
14

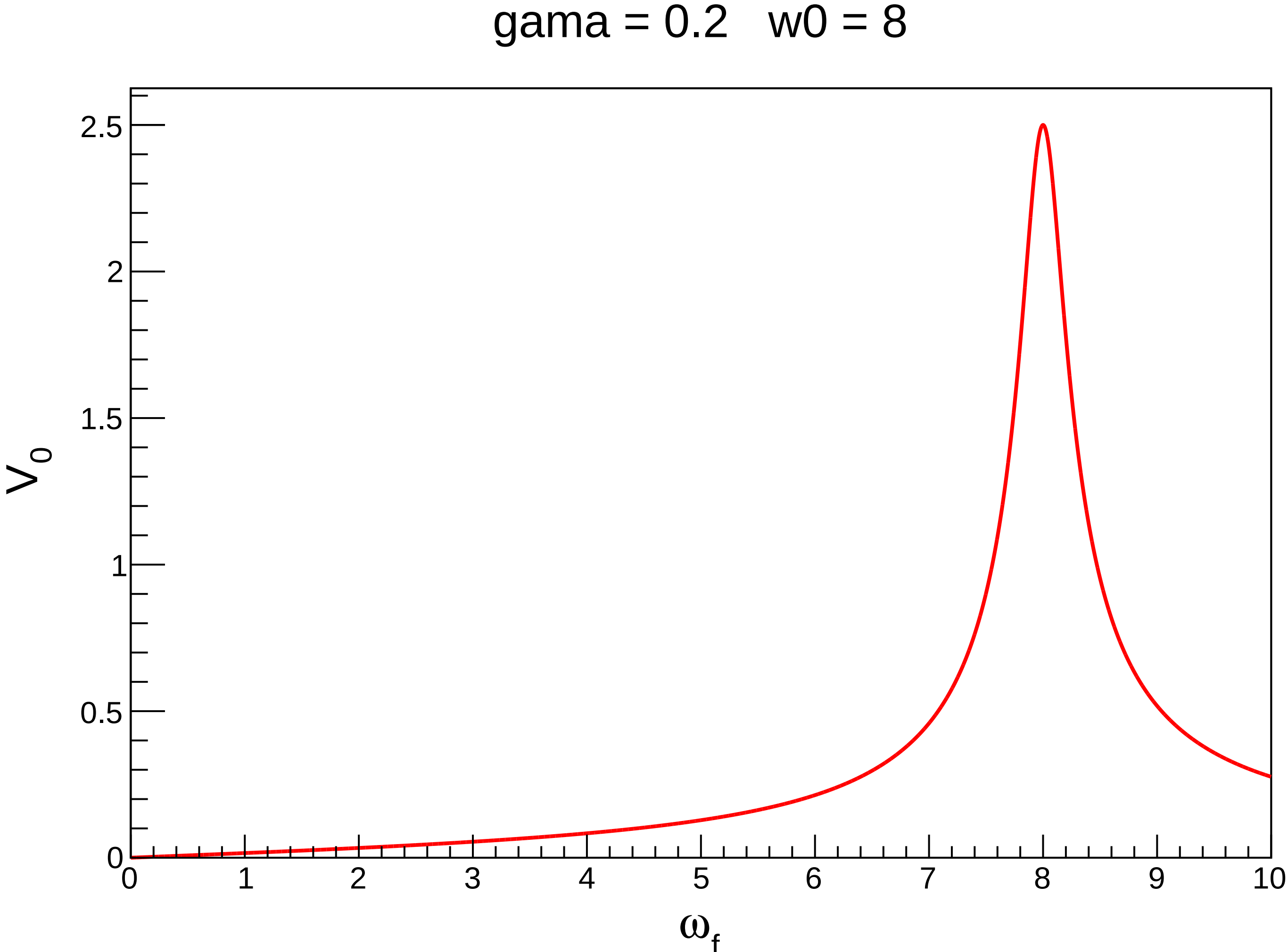

gama = 40   w0=3
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10
12
14

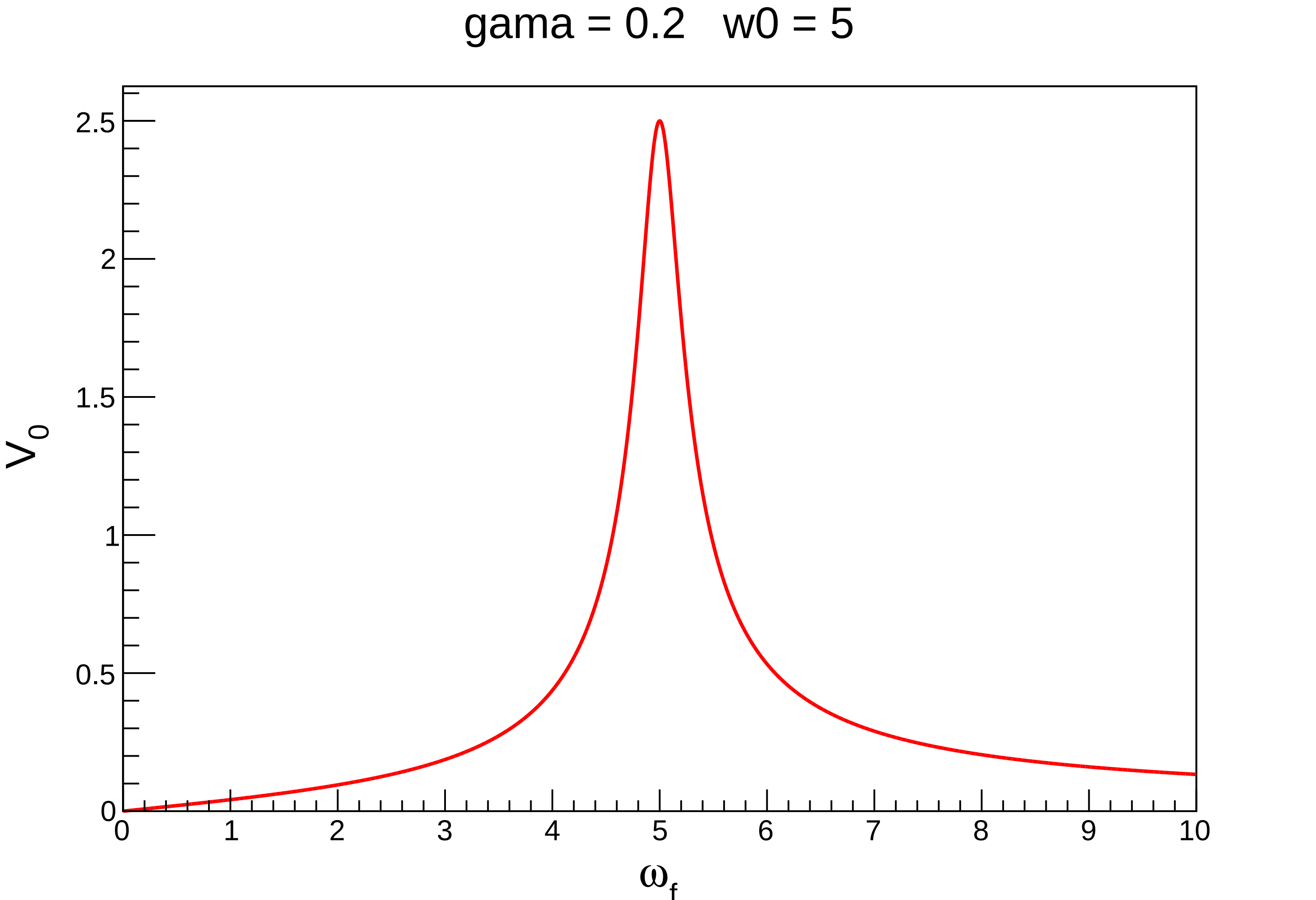
Movimiento oscilatorio forzado:

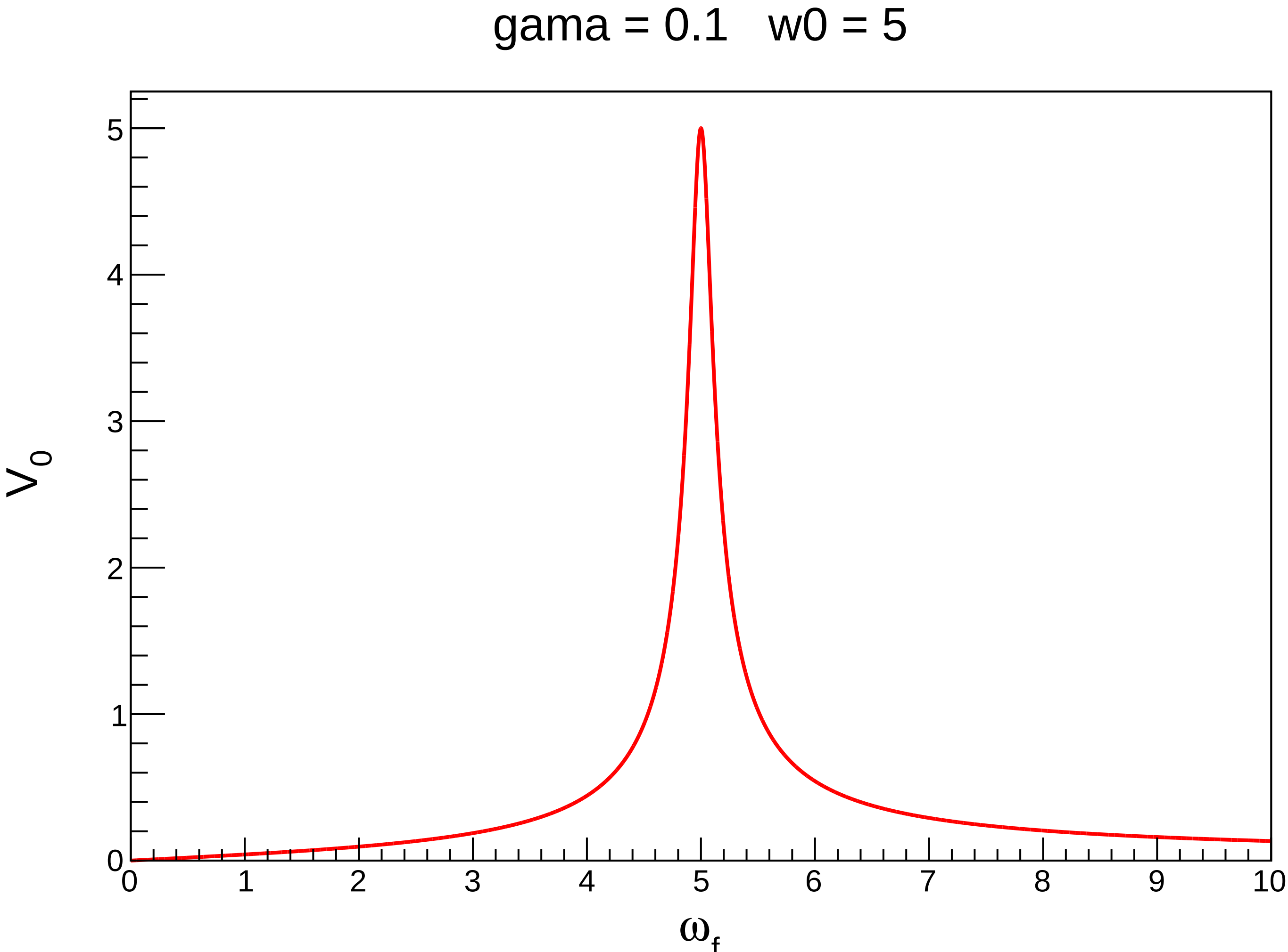
Curvas de resonancia

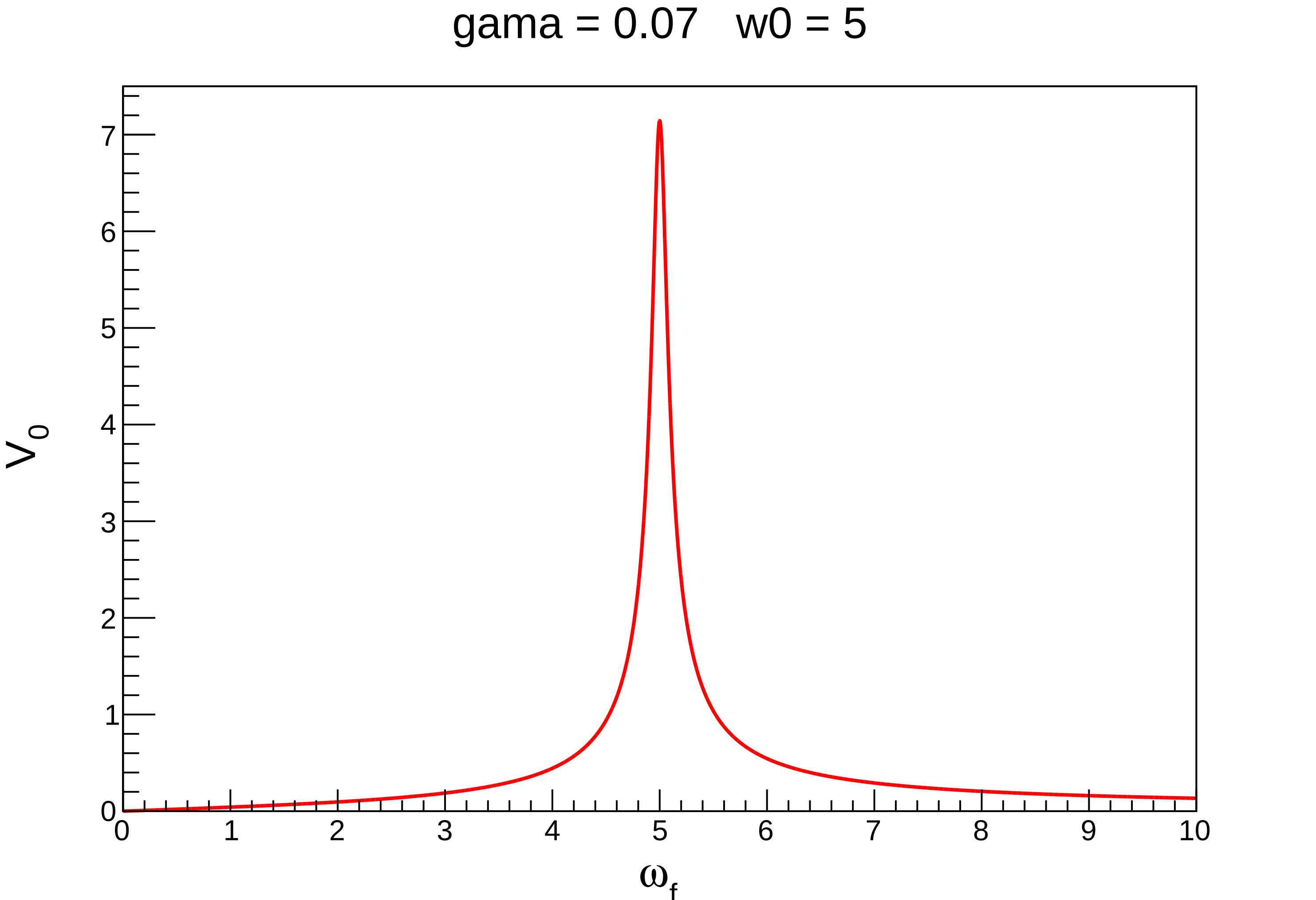

gama = 0.2   w0 = 5
V_0
ω_f
0
0.5
1
1.5
2
2.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

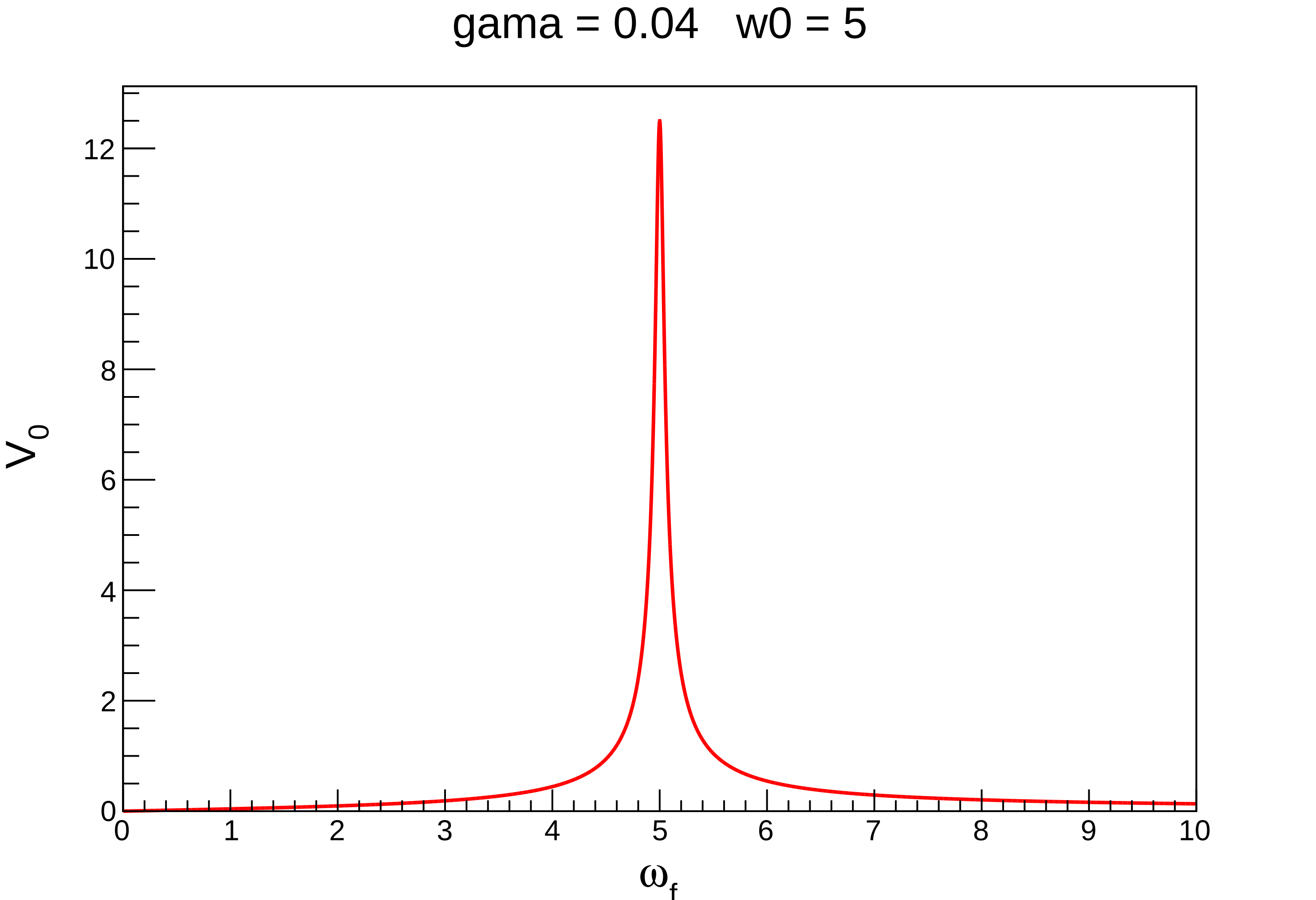

gama = 0.2 w0 = 1
2.5
2
1.5
1
0.5
0
V_0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
ω_f

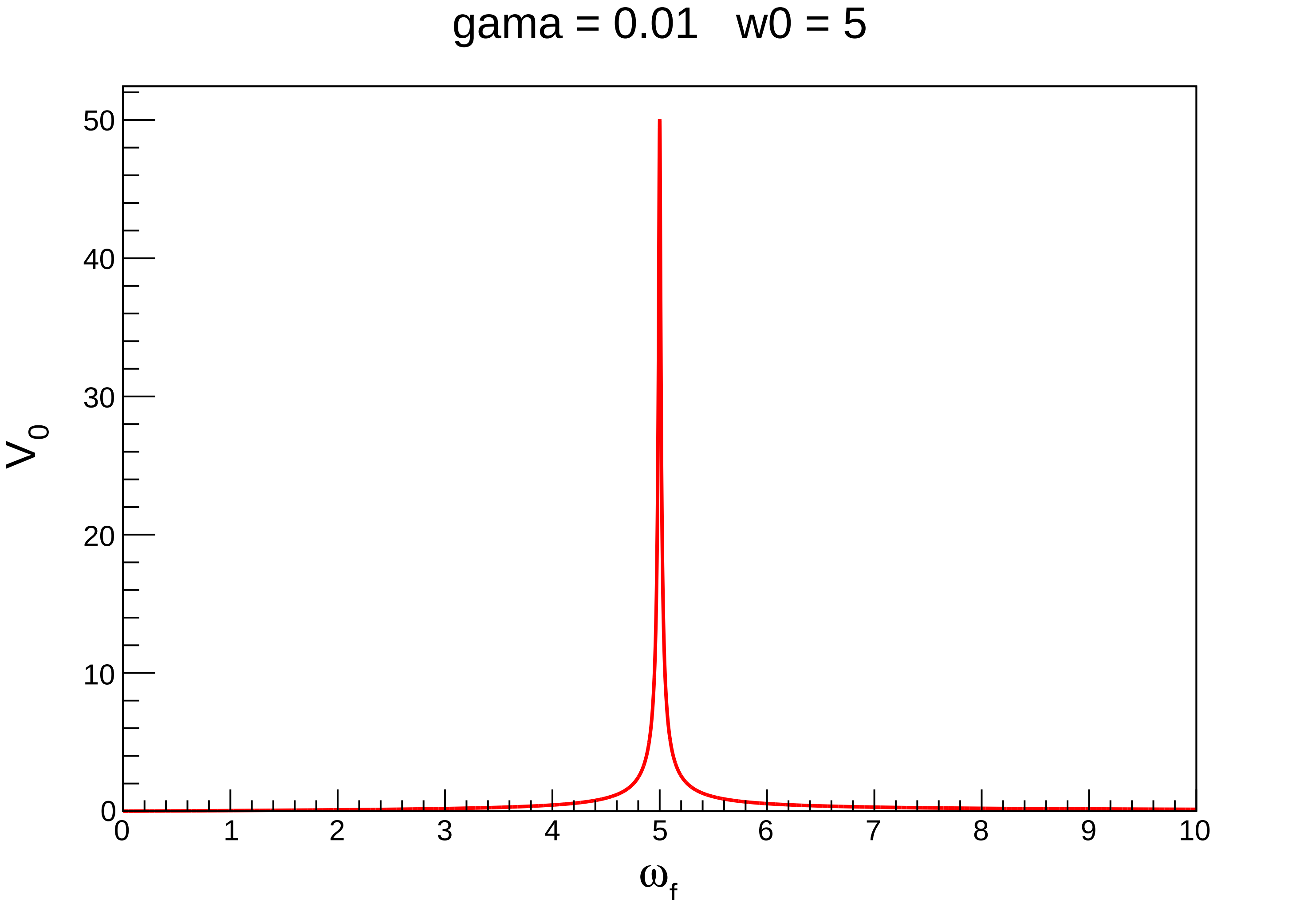

gama = 0.2   w0 = 8
V_0
ω_f
0
0.5
1
1.5
2
2.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

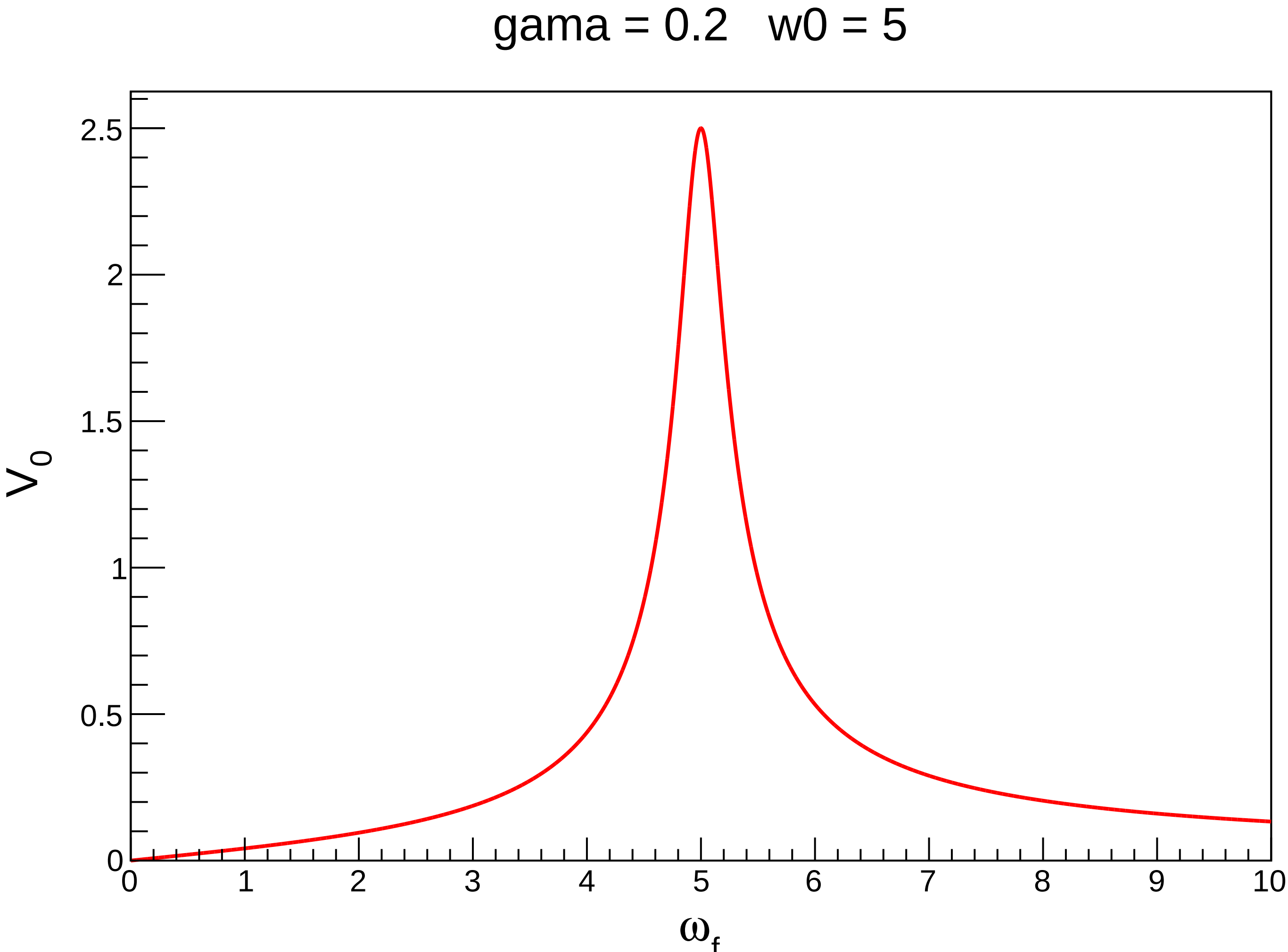

gama = 0.2   w0 = 5
V_0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
ω_f

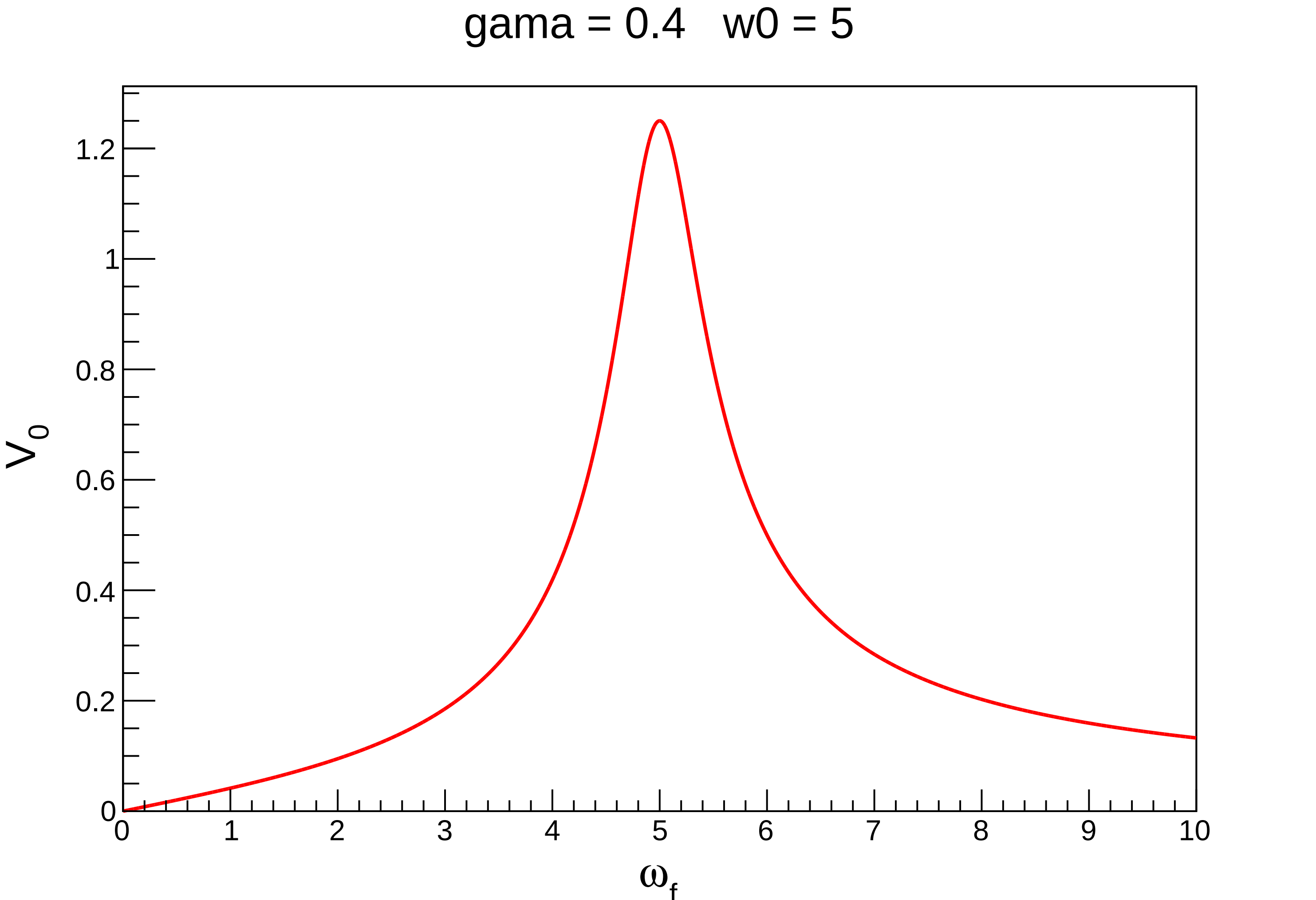

gama = 0.1   w0 = 5
V_0
ω_f
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

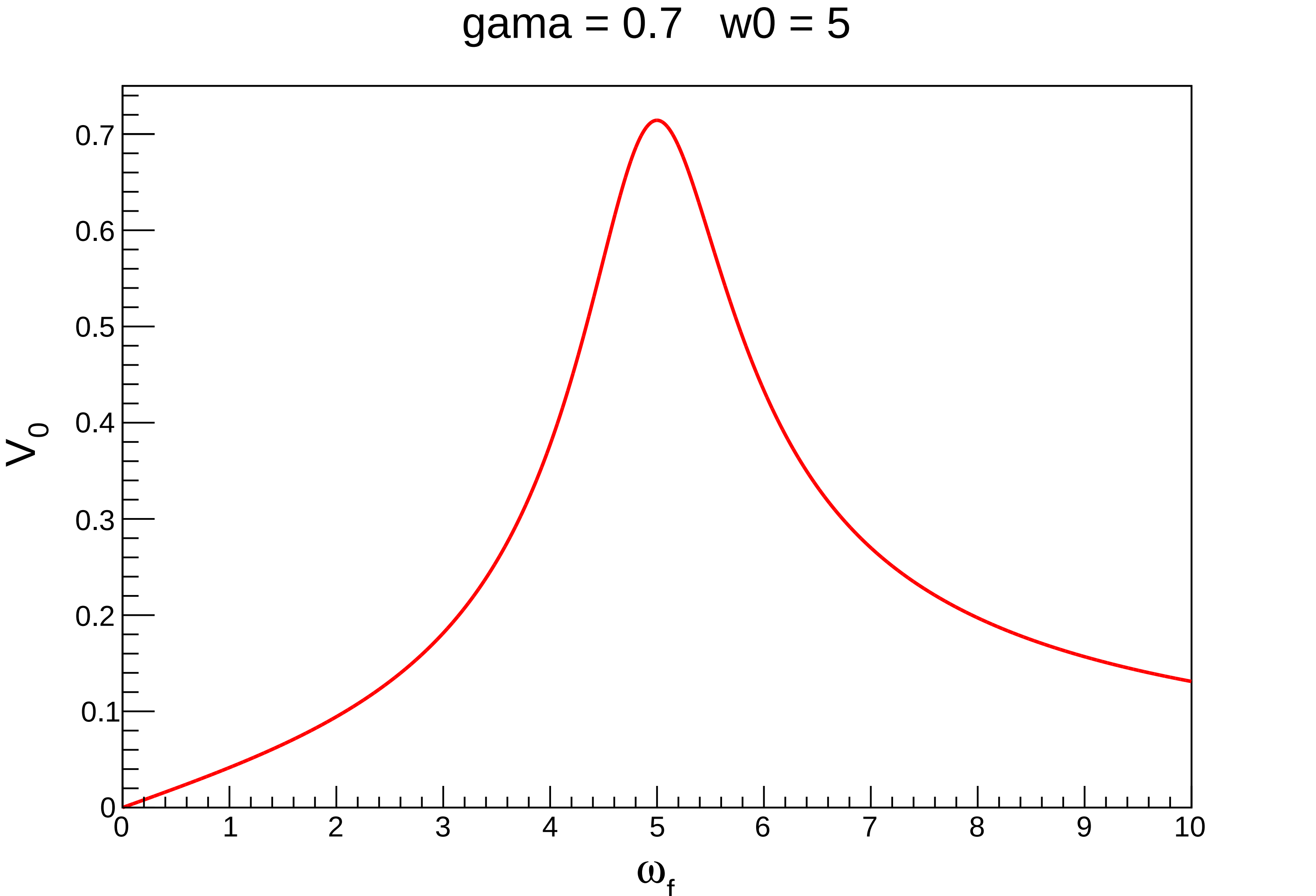

gama = 0.07   w0 = 5
V_0
ω_f
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


gama = 0.04   w0 = 5
V_0
ω_f
0
2
4
6
8
10
12
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

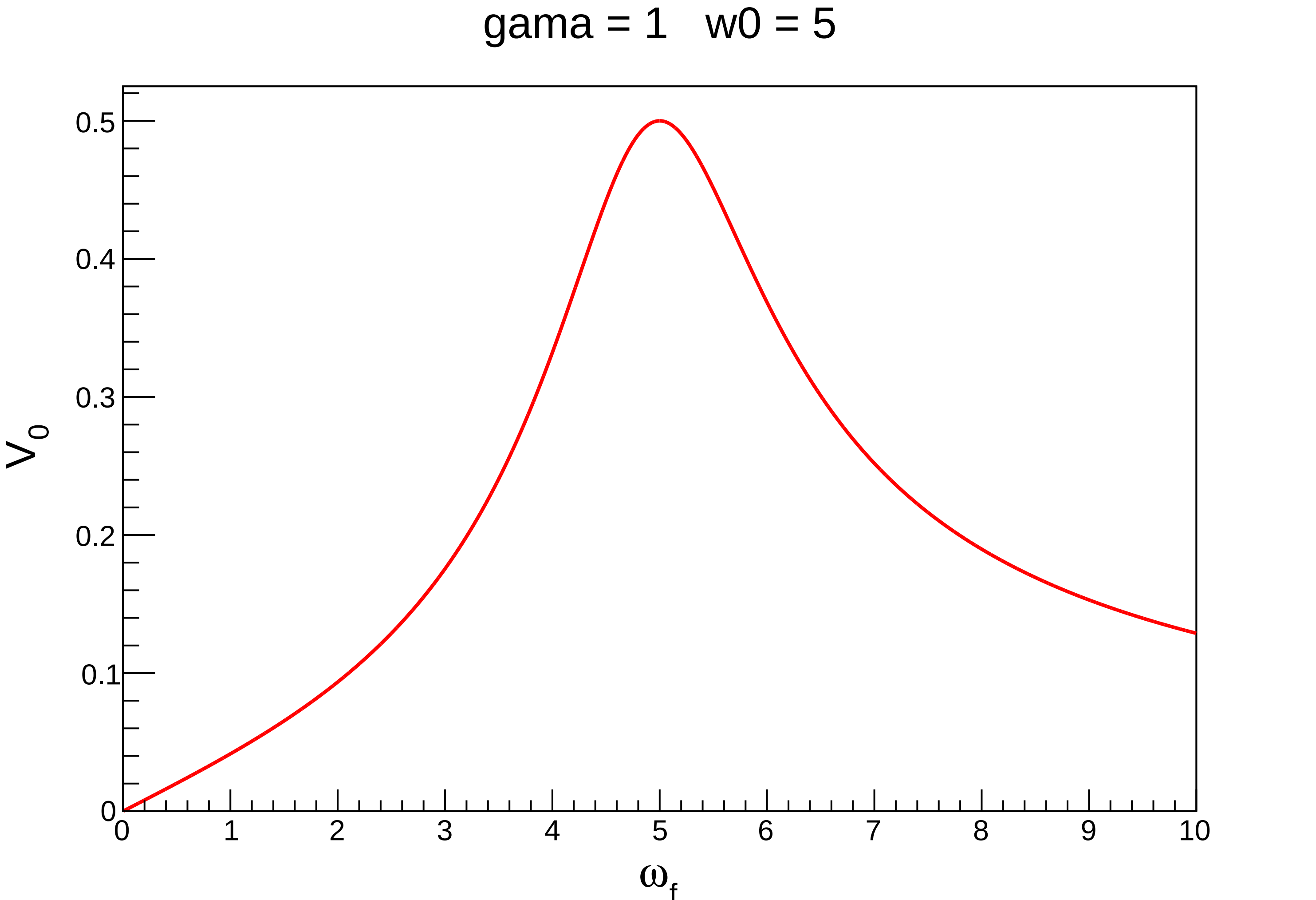

gama = 0.01 w0 = 5
V_0
0
10
20
30
40
50
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
ω_f

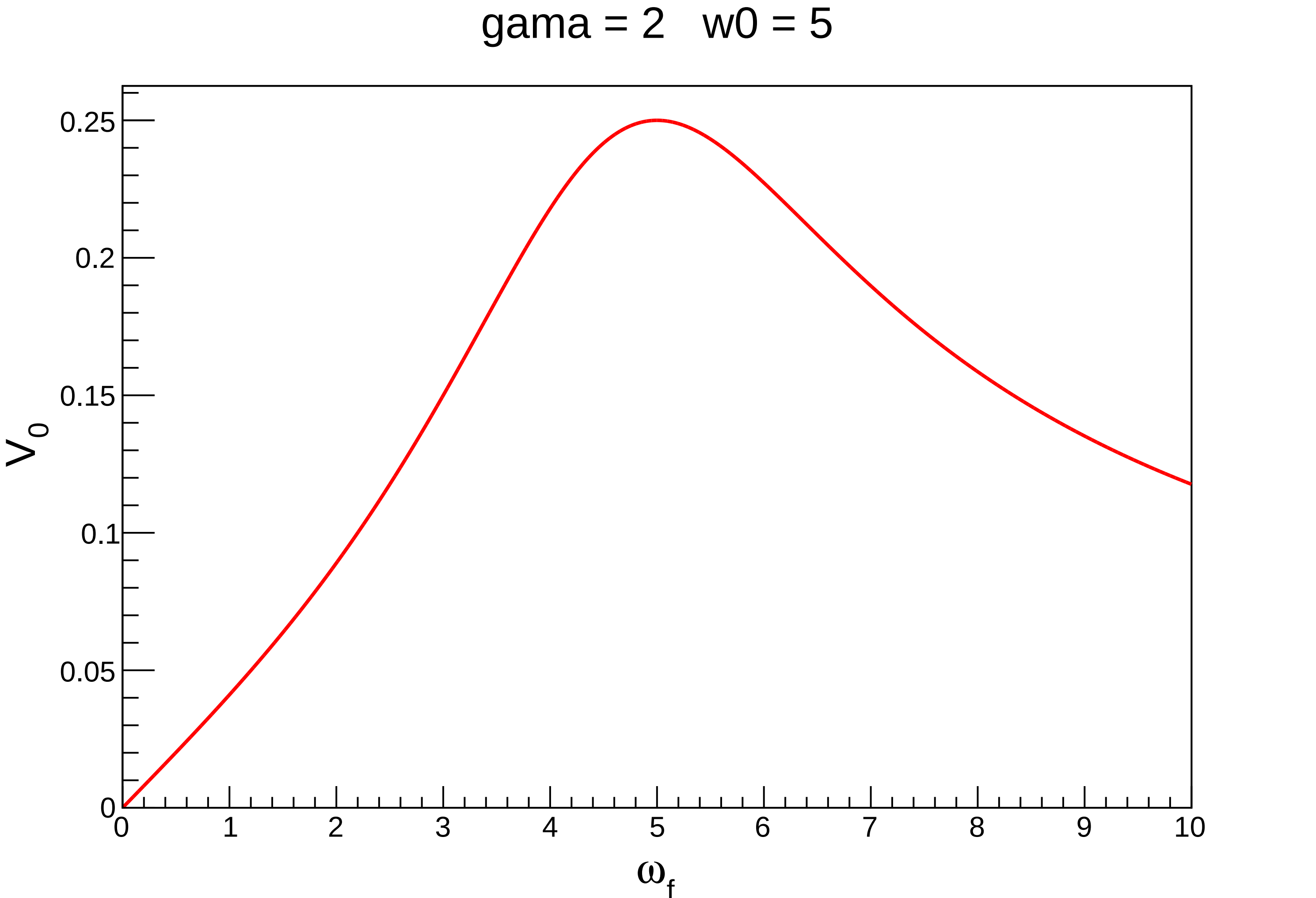

gama = 0.2   w0 = 5
V_0
ω_f
0
0.5
1
1.5
2
2.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


gama = 0.4 w0 = 5
V_0
ω_f
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

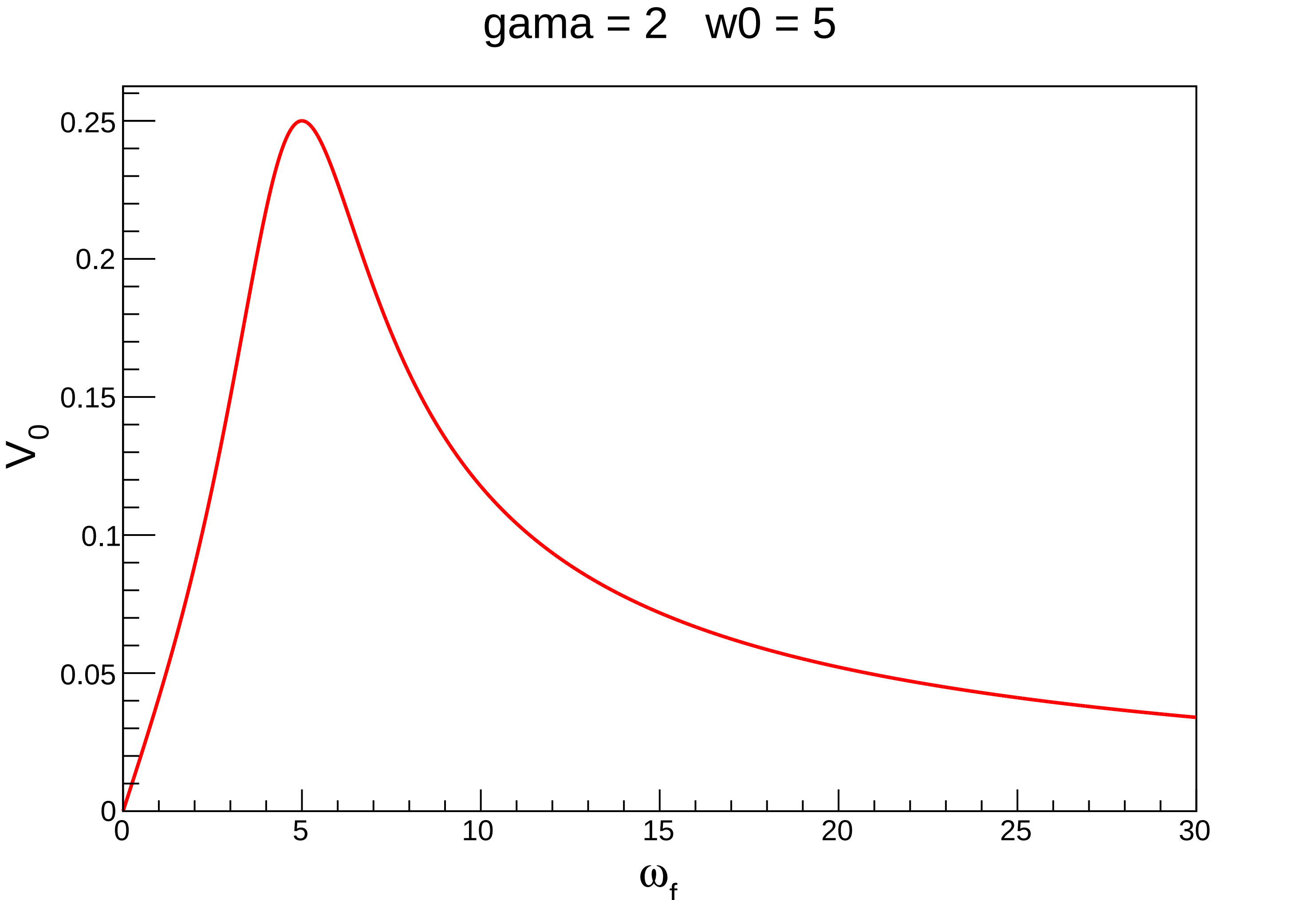


gama = 0.7 w0 = 5
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
V_0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
ω_f


gama = 1   w0 = 5
V_0
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
ω_f



gama = 2   w0 = 5
V_0
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
ω_f


gama = 2   w0 = 5
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
V_0
0
5
10
15
20
25
30
ω_f