

DINÁMICA EN SISTEMAS NO INERCIALES

Sistemas inerciales y no inerciales

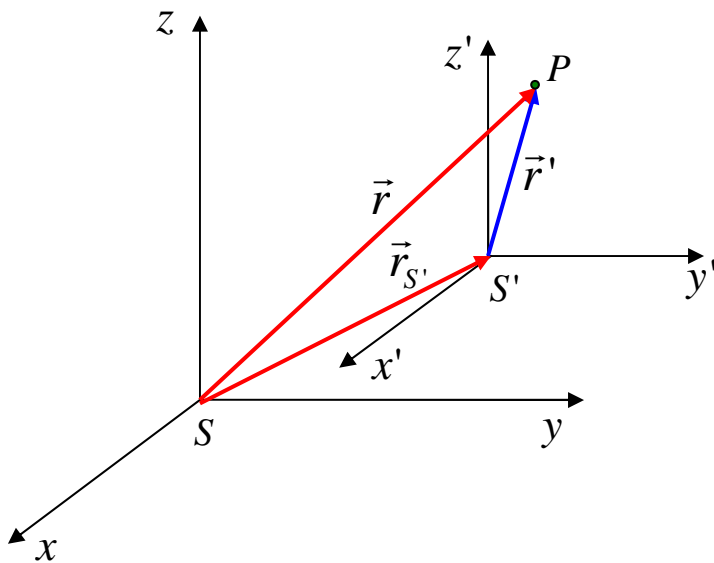
- *Sistemas no inerciales en traslación*

Se define un sistema inercial (SI) como aquel sistema de referencia para el cual son válidas las leyes de Newton. Vale decir, un sistema no interactuante (o tal que la resultante de todas las interacciones es nula), no puede estar acelerado respecto de un SI. Equivalentemente, en un SI, si conozco las interacciones a las que está sometido un sistema (es decir, conozco las fuerzas de interacción que están actuando sobre él), conozco también la aceleración, ya que *esta aceleración es producto de las fuerzas de interacción*:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{donde } \vec{F} \text{ es la resultante de todas las fuerzas aplicadas, debidas a las distintas}$$

interacciones a las que está sometido el sistema.

Sean S y S' dos observadores con sus respectivos sistemas de referencia, observando el movimiento de un móvil P :



Como vimos en el capítulo de Cinemática, las descripciones que cada uno hace del movimiento de P están relacionadas por:

$$\vec{r}_P = \vec{r}'_P + \vec{r}_{S'}$$

donde $\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_P \equiv \text{posición de } P \text{ respecto de } S \\ \vec{r}'_P \equiv \text{posición de } P \text{ respecto de } S' \\ \vec{r}_{S'} \equiv \text{posición de } S' \text{ respecto de } S \end{array} \right.$

Igualmente, al derivar la expresión anterior, se obtiene una relación entre las velocidades que miden S y S' para P :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{S'}$$

Esto es lo que se conoce como *ley de adición de velocidades de Galileo* y, como ya vimos, nos dice que *la velocidad de P que mide S es la velocidad que mide S' , sumándole la velocidad de S' respecto de S* . O, equivalentemente, para obtener la

velocidad de P que él mide, S' debe restarle su propia velocidad a lo que mide S . Parece un trabalenguas, pero la relación que liga las mediciones de S y S' es sumamente sencilla, y la idea detrás de ella es muy intuitiva, como vimos en el capítulo de Cinemática.

El “problema” surge si volvemos a derivar para obtener las aceleraciones que miden ambos observadores para P :

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_{S'}$$

Supongamos que S es un SI; sabemos, entonces que para S vale el segundo principio de Newton:

$$\vec{a}_P = \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{donde, otra vez, } \vec{F} \text{ representa las fuerzas aplicadas sobre } P \text{ debido a las}$$

interacciones. Pero, entonces, la aceleración de P que mide S' :

$$\vec{a}'_P = \vec{a}_P - \vec{a}_{S'} = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}_{S'}$$

Aquí vemos el problema:

- Si S' *no* está acelerado respecto de S ($\vec{a}_{S'} = \vec{0}$), entonces, ambos miden la misma aceleración para P , y ésta es el resultado de las fuerzas de interacción; ergo, se cumple el segundo principio de Newton y S' *también es un SI*:

Todo sistema de referencia que se mueva con MRU respecto de un SI, es un SI

- Por el contrario, si S' está acelerado respecto de S ($\vec{a}_{S'} \neq \vec{0}$), ambos miden distintas aceleraciones para P y la aceleración que mide S' *no se puede explicar teniendo en cuenta solamente las fuerzas de interacción*. Es decir, para S' no se cumple el segundo principio de Newton y, por lo tanto, no es un SI. En ese caso, decimos que S' es *un sistema no inercial (SNI)*:

Todo sistema de referencia acelerado respecto de un SI, es un SNI

- Si volvemos sobre la ecuación dinámica en el SNI S' , multiplicándola por la masa de P :

$$m\vec{a}'_P = \vec{F} - m\vec{a}_{S'}$$

Qué se observa? Todo ocurre *como si*, además de las fuerzas de interacción, actuara una “fuerza”:

$$\vec{f}^* = -m\vec{a}_S,$$

a la que llamamos *fuerza ficticia*, o *seudofuerza*, o *fuerza inercial*, o *fuerza no inercial*, o, más correctamente *efecto de inercia*. Notemos que no se trata de una verdadera fuerza, sino de un término que hay que agregar a la ecuación dinámica para poder explicar la aceleración que se mide desde un SNI. Entonces:

- \vec{f}^* no proviene de ninguna interacción sino que es un *efecto de inercia*.
- Por no ser una fuerza real *no tiene reacción* (es decir, no cumple el principio de acción y reacción)
- Notar que, a diferencia de las fuerzas reales¹, depende del sistema de referencia, ya que es el producto de la masa del objeto por la aceleración del SNI.

Entonces, en un SNI, en el segundo principio deben tenerse en cuenta estos efectos de inercia:

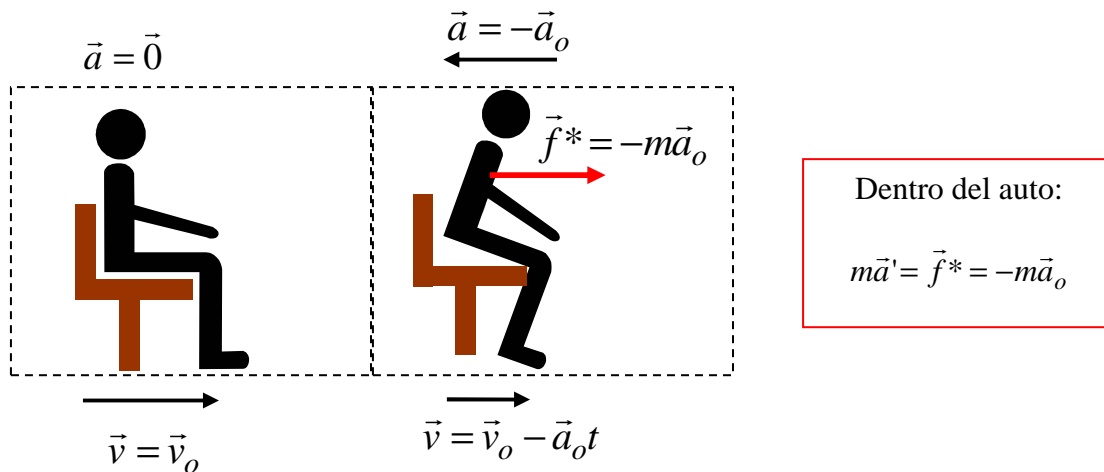
$$m\vec{a}_P' = \vec{F} + \vec{f}^*$$

• Veamos, con varios ejemplos, qué representan estas fuerzas inerciales y por qué las llamamos efectos de inercia:

- Vamos en un auto y éste comienza a frenar. Nuestro cuerpo, *respecto del auto (SNI)*, se va para adelante. Es *como si* algo nos empujara hacia delante. En realidad, no existe nada que nos empuje. La razón por la cual nos vamos para adelante es que nuestro cuerpo se movía, respecto de la calle² con el MRU del auto. Cuando éste comienza a frenar, nuestro cuerpo trata de continuar con ese mismo MRU (es decir, *el movimiento por inercia*) con el que venía (no continúa con dicho movimiento porque está vinculado al auto). Desde adentro del auto se observa, por el contrario, como si nuestro cuerpo se acelerara hacia delante. Entonces, para describir ese movimiento desde el SNI del auto, debemos agregar una fuerza ficticia que dé cuenta de la aceleración que se observa.

¹ Las fuerzas reales *no dependen del sistema de referencia*. Esto es obvio, ya que las interacciones no pueden depender de quién las esté observando.

² Podemos, como una buena aproximación en este caso, considerar a la calle como un SI.

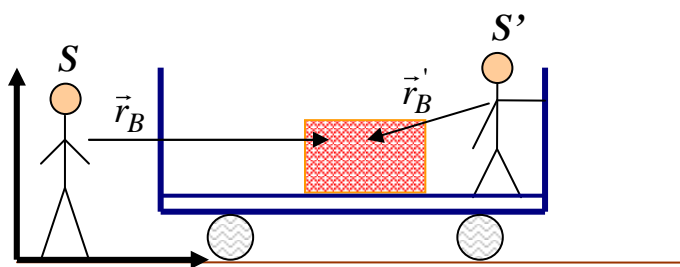


❖ En consecuencia, vemos por qué se llama a estas fuerzas ficticias, *efectos de inercia*: desde un SNI, el movimiento por inercia se ve como un movimiento acelerado, provocado por la fuerza inercial \vec{f}^* .

- Veamos esto mismo, con algunos ejemplos:

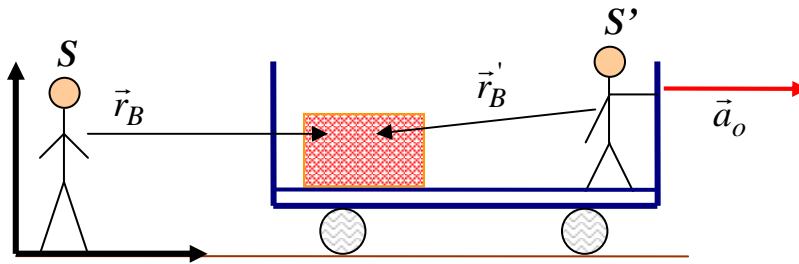
➤ *Ejemplo 1:* Sobre el piso de un vehículo descansa un bloque B de masa m . Supongamos, por el momento, que el rozamiento entre el bloque y el piso del vehículo es despreciable. Veamos cómo se observan algunos movimientos desde a) un sistema de referencia S fijo a la calle, y b) un sistema de referencia S' fijo al vehículo, en varios casos:

(1) El vehículo está en reposo respecto de la calle.



Mientras el vehículo está en reposo, ambos observadores razonan que B está en equilibrio y su estado de movimiento es de reposo respecto de ambos.

(2) Ahora el vehículo arranca, acelerando con aceleración \vec{a}_o respecto de S .



Para S , el bloque permanece en la misma posición (mientras no choque con la parte de atrás del vehículo).

No hay fuerzas aplicadas sobre el bloque y, por lo tanto, no cambia su estado de movimiento:

$$S) \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow m\vec{a}_B = \vec{0}$$

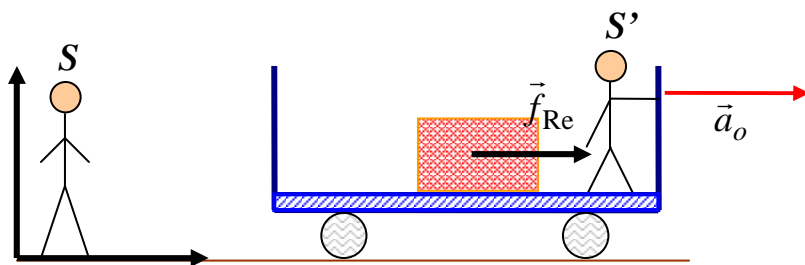
Por el contrario, S' , que se mueve solidario con el vehículo, observa que B se va para atrás con aceleración $-\vec{a}_o$. Razona, entonces, que sobre el bloque debe estar actuando una “fuerza”:

$$S') \vec{f}^* = -m\vec{a}_o \Leftrightarrow m\vec{a}'_B = -m\vec{a}_o$$

❖ ¿Qué pasó? En el SI (S), B no cambia su estado de movimiento pues, sobre él *no actúa ninguna fuerza de interacción*. Es decir, B cumple con el *primer principio de Newton o principio de inercia*. En el SNI, S' observa que B cambia, respecto de él, su estado de movimiento, y debe suponer la existencia de una “fuerza” \vec{f}^* (en realidad, desde el SI, es S' el que acelera con \vec{a}_o). Pero esta “seudofuerza” no es real (no proviene de ninguna interacción), sino que es lo que debe agregar S' para explicar el (para él) cambio en el estado de movimiento de B , cuando, desde el SI, B cumple con el principio de inercia. Por eso se llama a esta fuerza ficticia, *efecto de inercia*.

➤ Supongamos ahora que existe rozamiento entre el piso del auto y el bloque, de coeficientes estático y dinámico μ_e y μ_d , respectivamente y el vehículo acelera con aceleración \vec{a}_o . Dependiendo del valor de \vec{a}_o puede suceder que:

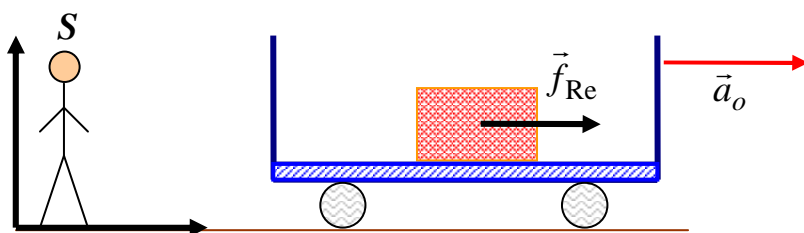
(1) El bloque B no se mueve respecto del piso del vehículo. ¿Cómo razonan S y S' ?



i) S observa que B está acelerado respecto de él. Efectivamente:

$$\vec{a}_B = \underbrace{\vec{a}'_B}_0 + \vec{a}_o = \vec{a}_o$$

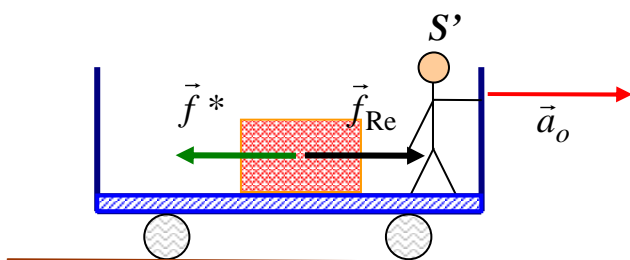
Por lo tanto, debe existir alguna fuerza de interacción que provea esa aceleración. El bloque interactúa con el piso del vehículo. Como B no desliza respecto de la superficie del vehículo, ésta le aplica una fuerza de rozamiento *estática*. Como el bloque tiende a permanecer con el MRU que traía antes de que el vehículo acelerara, entonces *tiende a ir hacia atrás respecto del vehículo*. Entonces, la fuerza de rozamiento estática es hacia adelante:



$$S) \vec{f}_{Re} = m\vec{a}_B = m\vec{a}_o$$

Notar que es la fuerza de rozamiento estática la que hace que el bloque tenga la misma aceleración que el vehículo.

ii) S' observa que la aceleración del bloque es nula respecto de él: $\vec{a}'_B = \vec{0}$. Como S' es un observador no inercial, sabe que el segundo principio solo puede aplicarlo si tiene en cuenta los efectos de inercia:



$$\begin{aligned} S') m\vec{a}'_B &= \vec{f}_{Re} + \vec{f}^* = \vec{0} \\ \vec{f}_{Re} - m\vec{a}_o &= \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{f}_{Re} &= m\vec{a}_o \end{aligned}$$

Notar que a S' le resulte más sencillo darse cuenta del sentido de la fuerza de rozamiento.

(1) Ya que estamos, ¿para que rango de \vec{a}_o (aceleración del vehículo) el bloque no deslizará?

i) Desde el punto de vista de S :

$$f_{Re} = ma_o \leq \mu_e N = \mu_e mg \Rightarrow a_o \leq \mu_e g$$

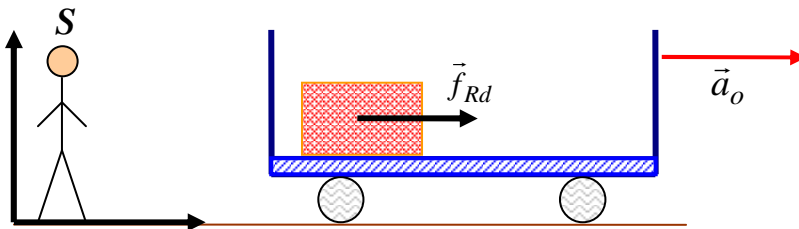
ii) Desde el punto de vista de S' :

$$-f^* \leq \mu_e N = \mu_e mg$$

$$ma_o \leq \mu_e mg \Rightarrow a_o \leq \mu_e g$$

(2) Suponiendo que el bloque desliza, solo puede deslizar hacia atrás respecto de S' .

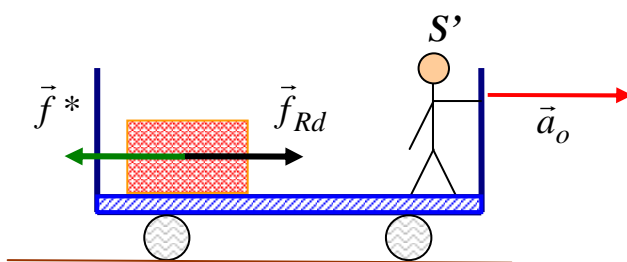
i) Para S :



$$S) \vec{f}_{Rd} = \mu_d \vec{N} = m\vec{a}_B$$

$$x) \mu_d mg = ma_B \Rightarrow a_B = \mu_d g$$

ii) Para S' :



$$S') m\vec{a}'_B = \vec{f}_{Rd} + \vec{f}^*$$

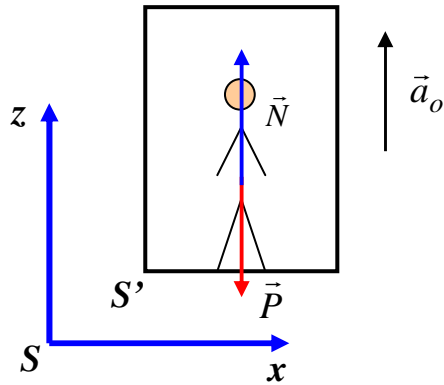
$$m\vec{a}'_B = \vec{f}_{Rd} - m\vec{a}_o$$

$$x') ma'_B = \mu_d mg - ma_o$$

$$\Rightarrow a'_B = \mu_d g - a_o$$

Observar que $a'_B < 0$, es decir, que el bloque desliza hacia atrás respecto de S' . ¿Cómo lo sabemos? Pues, como vimos en el punto anterior, para que el bloque comience a deslizar se debe cumplir que $a_o > \mu_e g$. Como $\mu_d < \mu_e$, entonces $a'_B = \mu_d g - a_o < 0$.

➤ *Ejemplo2:* Supongamos ahora una persona de masa m dentro de un ascensor que asciende con aceleración \vec{a}_o . Sea S un SI fijo a tierra y S' un SNI solidario al ascensor. Veamos cómo escribimos las ecuaciones dinámicas en ambos sistemas.



S) En el SI, las únicas fuerzas de interacción actuantes son \vec{P} y \vec{N} y, por ser un SI, *no hay fuerzas inerciales*:

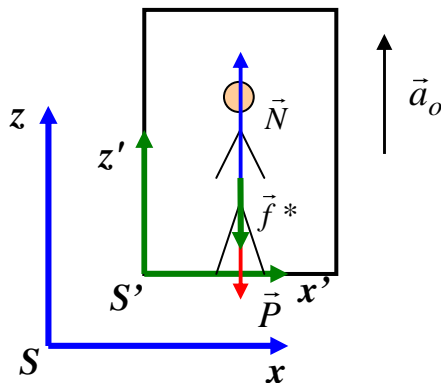
$$z) N - P = ma_z$$

Con la condición de vínculo de que el hombre tiene la misma aceleración que el ascensor:

$$a_z = a_o$$

Resulta:

$$z) N - P = ma_o \Rightarrow N = m(a_o + g)$$



S') En el SNI S' , obviamente tenemos las mismas fuerzas de interacción, pero además, hay un efecto de inercia \vec{f}^* :

$$\vec{f}^* = -ma_o \hat{z}$$

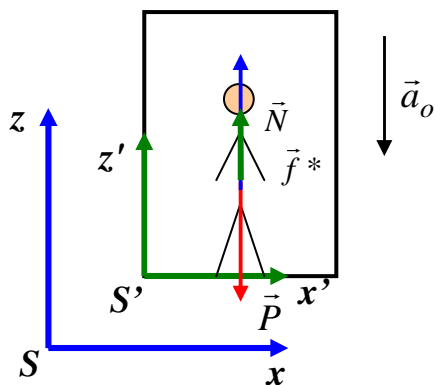
Entonces, como el hombre está en reposo respecto del ascensor, $a'_z = 0$:

$$z') N - P - ma_o = 0$$

Notemos que, desde un punto de vista matemático, las ecuaciones dinámicas en z y z' son *totalmente equivalentes* (parece como si lo único que se hubiera hecho es pasar el término ma_o de miembro). Sin embargo, desde un punto de vista físico, estas ecuaciones están dando la descripción dinámica del sistema desde S y S' (en S , $a_z = a_o$; en S' , $a'_z = 0$).

Observemos, además que la normal \vec{N} , fuerza de vínculo, es la que hace que se cumpla la relación de vínculo, es decir, que el hombre tenga la misma aceleración que el ascensor, en cualquiera de los dos sistemas

➤ Supongamos ahora que el ascensor desciende con aceleración $\vec{a}_o = -a_o \hat{z}$. En S y S' :



$$S) N - P = -ma_o$$

$$S') N - P + ma_o = 0$$

Observemos que la fuerza inercial invierte su sentido. La normal, en este caso, resulta:

$$N = m(g - a_o)$$

Cuanto mayor sea el módulo de \vec{a}_o , menor es la magnitud de la normal.

En particular, si $\vec{a}_o = -g\hat{z}$ (por ejemplo, se rompe la soga del ascensor y éste cae en caída libre):

$$S') N - P + mg = 0 \Rightarrow N = 0$$

Se observa que desaparece la condición de vínculo. El hombre también está en caída libre, y el piso del ascensor ya no lo arrastra más (es decir, el hombre no siente que el piso del ascensor tenga ningún efecto sobre él). Como su marco de referencia son las paredes del ascensor, la sensación es que está “flotando”. Esto se hace aún más notable si el ascensor cae con una aceleración $\vec{a}_o > -g\hat{z}$. Por ejemplo, si $\vec{a}_o = -2g\hat{z}$, la ecuación dinámica en S' será:

$$S') -mg + 2mg = ma'_z \Rightarrow a'_z = g > 0 \quad (\text{notar que la normal es } N = 0)$$

En S' , el hombre parece ascender con $\vec{a}'_z = g\hat{z}'$

- ❖ Este ejemplo nos hace pensar en lo siguiente. Una importante característica de las fuerzas de inercia es que siempre son proporcionales a la masa inercial. Lo mismo vale para la fuerza gravitatoria, que siempre es proporcional a la masa gravitatoria. Como ambas masas son indistinguibles, la fuerza gravitatoria misma tiene apariencia de fuerza de inercia. En las ecuaciones anteriores, no se puede distinguir qué parte corresponde a un efecto de inercia y qué parte es fuerza gravitatoria. Es decir que, por ejemplo, el hombre en el ascensor en caída libre no puede distinguir si a) el ascensor es un SI y no existe campo gravitatorio, o bien b) el ascensor es un SNI con $\vec{a}_o = -g\hat{z}$, o c) cualquier situación intermedia (campo gravitatorio más o menos intenso, etc.). A partir de esto, Albert Einstein postuló que las fuerzas inerciales no pueden distinguirse de las de gravitación (equivalentemente, las fuerzas gravitatorias podrían ser también efectos de inercia). Es decir, no se puede precisar cuánto corresponde a la presencia de un campo gravitatorio y cuánto a efectos de inercia. Sin embargo, se podría argumentar que, si la gravitación es un efecto de inercia, ésta

tendría que tener la misma dirección y sentido en todo punto. Einstein resolvió este punto postulando que la geometría del Universo no es euclídea sino riemanniana (es decir, la geometría que se puede describir sobre la superficie de una esfera). Estas consideraciones son las que dieron origen a la Teoría de la Relatividad General.

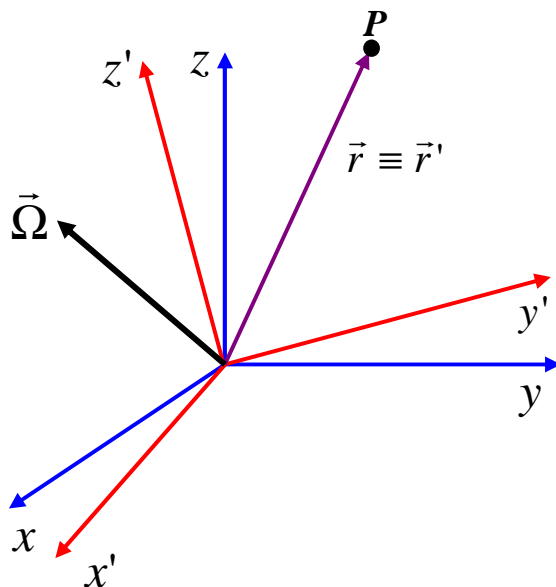


- *Sistemas no inerciales rotantes (SR)*

Vamos a ver cómo se relaciona el movimiento de un objeto visto desde un SI, con el mismo movimiento visto desde un SR. Este tema tiene interés más allá de lo académico, ya que nosotros mismos somos observadores parados en un laboratorio rotante, la Tierra.

Sea S un SI, y S' un sistema de referencia que rota respecto del primero con un vector rotación $\vec{\Omega}$. Este vector, en principio, puede variar tanto en módulo como en dirección y sentido. Ambos sistemas de referencia coinciden en el origen, ya que solo nos interesa tener en cuenta la rotación.

Como siempre, vamos a usar variables primadas para caracterizar lo que medimos desde S' , y sin primar para S . Supongamos que queremos describir el movimiento de una partícula P desde ambos sistemas.



Como el origen de ambos sistemas coincide, la posición de P está dada por el mismo vector en ambos sistemas:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) \tag{1}$$

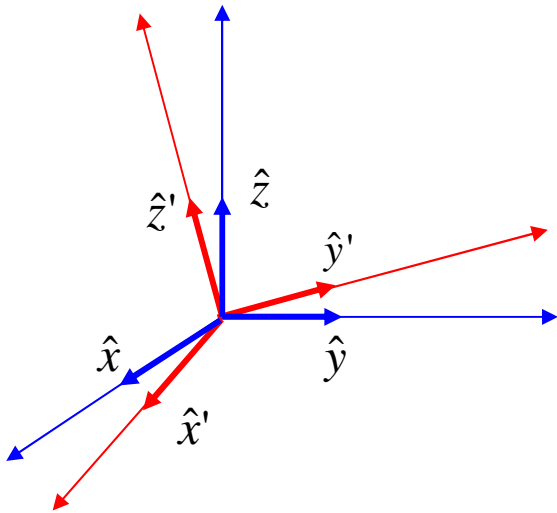
¿Qué varía, entonces, al pasar de un sistema a otro? El vector *es el mismo*, pero *varía su descripción en coordenadas*:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} \tag{2a}$$

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\hat{x}' + y'(t)\hat{y}' + z'(t)\hat{z}' \tag{2b}$$

Vamos a ver qué pasa con las velocidades. Si derivamos respecto del tiempo la expresión (1):

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \quad (3)$$



Tengo, en principio, que decidir *en qué sistema de referencia voy a hacer la derivada*. La razón es que, si me paro en el sistema S , los versores $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ son versores *fijos* (es decir, independientes del tiempo ya que no se mueven), y los versores $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ son versores *móviles* (es decir, dependientes del tiempo, pues rotan con el sistema S'); mientras que, si me paro en S' , los versores fijos son $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$, y los móviles son $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$.

Resumiendo:

- *Derivar en el sistema de referencia S significa que $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ son versores fijos y, por lo tanto, tienen derivada nula, mientras que $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ son móviles y su derivada no es nula.*
- *Derivar en el sistema de referencia S' significa que $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ son versores fijos y, por lo tanto, tienen derivada nula, mientras que $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ son móviles y su derivada no es nula.*

Teniendo esto en cuenta, vamos a hacer la derivada (3) parados en el sistema S :

$$\left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_S = \left. \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \right|_S \quad (4)$$

donde la barra vertical y el subíndice indican en qué sistema de referencia estamos derivando.

- Para derivar el primer miembro, tomamos la expresión (2a):

$$\left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_S = \frac{dx(t)}{dt} \hat{x} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{y} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{z} = \vec{v}(t) \quad (5)$$

Esta derivada, no cabe duda, es la *velocidad de P respecto del sistema S* (notar que los versores $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ no se derivan).

- Para derivar el segundo miembro de (4), tomamos la expresión (2b) (es decir, el vector posición expresado en las coordenadas del sistema S'):

$$\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \Big|_S = \frac{dx'(t)}{dt} \hat{x}' + x'(t) \frac{d\hat{x}'}{dt} + \frac{dy'(t)}{dt} \hat{y}' + y'(t) \frac{d\hat{y}'}{dt} + \frac{dz'(t)}{dt} \hat{z}' + z'(t) \frac{d\hat{z}'}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \Big|_S = \underbrace{\left(\frac{dx'(t)}{dt} \hat{x}' + \frac{dy'(t)}{dt} \hat{y}' + \frac{dz'(t)}{dt} \hat{z}' \right)}_{\vec{v}'(t)} + \left(x'(t) \frac{d\hat{x}'}{dt} + y'(t) \frac{d\hat{y}'}{dt} + z'(t) \frac{d\hat{z}'}{dt} \right) \quad (6)$$

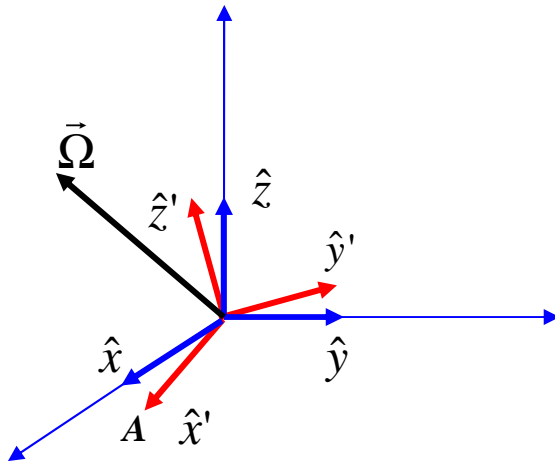
donde se han derivado los versores $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ porque en el sistema S son versores móviles. Claramente, la expresión (6) *no* es la velocidad de P respecto del sistema S' . La velocidad de P respecto de S' debe tener la siguiente expresión:

$$\vec{v}'(t) = \frac{dx'(t)}{dt} \hat{x}' + \frac{dy'(t)}{dt} \hat{y}' + \frac{dz'(t)}{dt} \hat{z}'$$

que coincide con el primer paréntesis de la ecuación (6):

$$\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \Big|_S = \vec{v}'(t) + \left(x'(t) \frac{d\hat{x}'}{dt} + y'(t) \frac{d\hat{y}'}{dt} + z'(t) \frac{d\hat{z}'}{dt} \right) \quad (7)$$

Falta saber, entonces, a qué corresponde el segundo paréntesis. En cada término de éste, tenemos que calcular la derivada de un versor. En vez de entrar en cálculos laboriosos, pensémoslo de la siguiente manera:



Cada uno de estos versores, por ejemplo, \hat{x}' , puede representar la posición de una partícula (como la A en la figura). Entonces, $\frac{d\hat{x}'}{dt}$ va a ser la velocidad de dicha partícula medida en S . Como \hat{x}' tiene módulo constante ($|\hat{x}'|=1$), solo es velocidad tangencial de rotación, ya que el versor \hat{x}' rota con el sistema S' . Tal como vimos en el capítulo de Cinemática, esta

velocidad se escribe, en función del vector $\vec{\Omega}$:

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{x}' \quad (8)$$

Entonces, cada término del segundo paréntesis de (6) resulta (seguimos ejemplificando con la componente en \hat{x}')

$$x'(t) \frac{d\hat{x}'}{dt} = \vec{\Omega} \times (x'(t)\hat{x}') = \vec{\Omega} \times \vec{x}'(t) \quad (9)$$

Sumando las tres componentes, finalmente resulta:

$$\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \vec{v}'(t) + \vec{\Omega} \times \vec{r}' \quad (10)$$

Entonces, en (4):

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (11a)$$

En esta última expresión, puede ponerse indistintamente \vec{r} o \vec{r}' . Obtuvimos una relación entre las velocidades de P medidas desde ambos sistemas. Notemos que es nuestra archi-conocida ley de adición de velocidades:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{v}_{arrastr}$$

donde la velocidad de arrastre (o velocidad de S' respecto de S) es, como debe ser, una velocidad de rotación.

La expresión (11a) es fácil de interpretar si nos paramos en el sistema S' :

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (11b)$$

Vemos que el observador S' debe restar su propia velocidad a la velocidad de P medida desde el SI, para obtener la velocidad que él mide. Por ejemplo, si estamos parados sobre una calesita que gira en sentido horario, y observamos un árbol, veremos que el árbol gira con la misma velocidad angular, pero en sentido antihorario.

Un detalle matemático

Notemos un detalle interesante. La relación (11) que obtuvimos se puede escribir:

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_S = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (12)$$

Donde, como ya vimos $\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_S$ significa *derivar \vec{r} en el sistema S* , es decir, derivarlo

considerando a los versores $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ como versores fijos, y $\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{S'}$ significa *derivar \vec{r} en el*

sistema S' , es decir, derivarlo considerando a los versores $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ como versores fijos.

Notar que la ecuación (12) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_S \vec{r} = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{S'} + \vec{\Omega} \times \right) \vec{r}$$

donde hemos definido un *operador*, es decir, un símbolo matemático que nos indica qué operación debemos hacer:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_S = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{S'} + \vec{\Omega} \times \right) \quad (13)$$

(Esto no es nuevo. Son operadores, por ejemplo, “+”, “ $\frac{d}{dt}$ ”, “ \times ”).

Este operador nos indica cómo relacionar la derivada de un vector en un SI, con la derivada del mismo vector en un sistema que rota respecto del SI con $\vec{\Omega}$. En este caso, este operador está aplicado sobre el vector \vec{r} . Sin embargo, esto es totalmente válido para cualquier vector. Si en vez de \vec{r} , aplicamos el operador sobre un vector \vec{A} , resulta:

$$\frac{d}{dt}\Big|_S \vec{A} = \left(\frac{d}{dt}\Big|_{S'} + \vec{\Omega} \times \right) \vec{A}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_S = \frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

y esta expresión nos dice que la derivada de \vec{A} en el sistema S (es decir, donde $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ son versores fijos), es igual a la derivada de \vec{A} en el sistema S' (donde los versores fijos son $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$), más el producto vectorial $\vec{\Omega} \times \vec{A}$.

- Vamos a encontrar ahora la relación entre las aceleraciones de P medidas desde ambos sistemas. Lo haremos siguiendo el mismo método que para encontrar la relación entre las velocidades, y luego, usando el operador (13).

Derivemos la expresión (11) respecto del tiempo, *parados en el sistema S*:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\Big|_S = \underbrace{\frac{d\vec{v}'(t)}{dt}\Big|_{S'}}_1 + \underbrace{\frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt}\Big|_S}_2 \quad (14)$$

Analicemos cada término de la ecuación (14):

- $\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\Big|_S = \vec{a}(t)$: este término es la aceleración de P respecto de S
- $\frac{d\vec{v}'(t)}{dt}\Big|_{S'} \neq \vec{a}'(t)$: nuevamente, este término, *no* es la aceleración de P respecto de S'

Calculemos ambos términos del segundo miembro de la ecuación (14). Por simplicidad, vamos a trabajar con una única componente, ya que todas son equivalentes:

$$1) \frac{d\vec{v}'_x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v'_x \hat{x}') = \frac{dv'_x}{dt} \hat{x}' + v'_x \frac{d\hat{x}'}{dt}$$

(15)

En esta última expresión:

- $\frac{dv'_x}{dt} \hat{x}' = \vec{a}'_x$: sí es la componente x' de la aceleración de P medida en S'
- $\frac{d\hat{x}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{x}'$: esta derivada ya la calculamos.

Entonces:

$$\frac{d\vec{v}'_x(t)}{dt} = \vec{a}'_x + \vec{\Omega} \times (v'_x \hat{x}')$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}'_x(t)}{dt} = \vec{a}'_x + \vec{\Omega} \times \vec{v}'_x} \quad (16)$$

$$2) \left. \frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \right|_S = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\gamma} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (17)$$

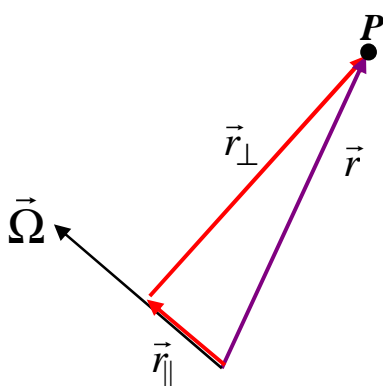
donde hemos llamado $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$ al vector aceleración angular del sistema S' respecto de S .

El último término queda escrito en función de \vec{v} , la velocidad de P respecto del SI S (ya que la derivada $\frac{d\vec{r}}{dt}$ la estamos haciendo parados en el sistema S). Como queremos que la expresión quede en función de las variables primadas de S' , reemplazamos \vec{v} por $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ (ecuación (11)):

$$\left. \frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \right|_S = \vec{\gamma} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r})$$

$$\left. \frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \right|_S = \vec{\gamma} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (18)$$

En la ecuación (18) tenemos un doble producto vectorial que, aunque puede quedar escrito de esa manera, vamos a re-escribir de una forma más conveniente. Para ello, notemos que:



El vector \vec{r} puede descomponerse como:

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$$

donde:

- \vec{r}_{\parallel} es la componente de \vec{r} *paralela* al vector rotación $\vec{\Omega}$;
- \vec{r}_{\perp} es la componente de \vec{r} *perpendicular* al vector rotación $\vec{\Omega}$.

Entonces:

$$\vec{\Omega} \times \vec{r} = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{\perp}$$

ya que $\vec{\Omega} \times \vec{r}_{\parallel} = 0$. Entonces, en la ecuación (18):

$$\left. \frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \right|_S = \vec{\gamma} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{\perp}) \quad (19)$$

Todavía podemos hacer algo más. Vamos a aplicar la siguiente identidad vectorial:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

conocida comúnmente usando la regla mnemotécnica “vaca-caballo” (con perdón de la falta de ortografía)

Entonces:

$$\left. \frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \right|_S = \vec{\gamma} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \vec{v}' + \underbrace{\vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_{\perp})}_0 - \vec{r} \underbrace{(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega})}_{\Omega^2}$$

Hemos, así, conseguido una expresión mucho más sencilla que el doble producto vectorial:

$$\boxed{\left. \frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \right|_S = \vec{\gamma} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \vec{v}' - \Omega^2 \vec{r}_{\perp}} \quad (20)$$

• Juntando ahora las expresiones (16) y (20), finalmente resulta:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{\gamma} \times \vec{r} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' - \Omega^2 \vec{r}_{\perp} \quad (21a)$$

O bien, si queremos la aceleración de P medida desde el sistema rotante S' :

$$\boxed{\vec{a}'(t) = \vec{a}(t) + \vec{r} \times \vec{\gamma} + 2\vec{v}' \times \vec{\Omega} + \Omega^2 \vec{r}_{\perp}} \quad (21b)$$

Usemos el operador (13) que definimos anteriormente para encontrar este mismo resultado. Como queremos encontrar la aceleración en el sistema rotante, usamos:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{S'} = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_S - \vec{\Omega} \times \right)$$

aplicado a \vec{v}' :

$$\left. \frac{d\vec{v}'}{dt} \right|_{S'} = \left(\left. \frac{d\vec{v}'}{dt} \right|_S - \vec{\Omega} \times \vec{v}' \right)$$

Como la derivada del segundo miembro es en S , escribimos \vec{v}' en función de \vec{v} (ecuación (11b)):

$$\underbrace{\frac{d\vec{v}'}{dt}}_{\vec{a}'} \Big|_{S'} = \left(\frac{d(\vec{v} - \vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \Big|_S - \vec{\Omega} \times \vec{v}' \right) = \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}} \Big|_S - \frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \Big|_S - \vec{\Omega} \times \vec{v}'$$

Entonces:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt}}_{\vec{\gamma}} \Big|_S \times \vec{r} - \vec{\Omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \Big|_S - \vec{\Omega} \times \vec{v}' = \vec{a} + \vec{r} \times \vec{\gamma} + \vec{v} \times \vec{\Omega} + \vec{v}' \times \vec{\Omega}$$

donde hemos permutado el orden de los factores en los productos vectoriales para que los términos resulten positivos. Finalmente, como queremos que la expresión de \vec{a}' quede en función de las variables del SR, volvemos a escribir \vec{v} en función de \vec{v}' :

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \vec{a} + \vec{r} \times \vec{\gamma} + (\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} + \vec{v}' \times \vec{\Omega} \\ &= \vec{a} + \vec{r} \times \vec{\gamma} + \vec{v}' \times \vec{\Omega} + (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} + \vec{v}' \times \vec{\Omega} \\ &= \vec{a} + \vec{r} \times \vec{\gamma} + 2\vec{v}' \times \vec{\Omega} + (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} \end{aligned}$$

Si volvemos a usar la identidad vectorial “vaca-caballo”, finalmente resulta la expresión (21b):

$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{r} \times \vec{\gamma} + 2\vec{v}' \times \vec{\Omega} + \Omega^2 \vec{r}_\perp$$

• Esta expresión no es tan sencilla de interpretar como la expresión (11b). Vamos a ver qué representa cada término y algunos ejemplos nos van a facilitar su interpretación:

- ❖ $\vec{a}'(t)$: es la aceleración de P medida en el sistema rotante S'
- ❖ $\vec{a}(t)$: es la aceleración de P medida en el sistema inercial S
- ❖ $\vec{r} \times \vec{\gamma}$: este término tiene en cuenta que el vector rotación $\vec{\Omega}$ con el que rota el sistema rotante S' puede variar con el tiempo (si $\vec{\Omega} = c\vec{e}$, este término es nulo)
- ❖ $2\vec{v}' \times \vec{\Omega}$: *aceleración de Coriolis*. Es ortogonal a \vec{v}' y a $\vec{\Omega}$. Notar que solo aparece si el móvil se mueve respecto de S' .
- ❖ $\Omega^2 \vec{r}_\perp$: *aceleración centrífuga*. Tiene dirección perpendicular a $\vec{\Omega}$ (\vec{r}_\perp) y su sentido siempre es alejándose del centro de rotación. Esta aceleración aparece aun cuando el móvil esté en reposo respecto de S' .

• Si ahora multiplicamos la expresión (11b) por la masa m de P , obtenemos una ecuación que describe la situación dinámica de P en el sistema S' :

$$m\vec{a}'(t) = m\vec{a}(t) + m\vec{r} \times \vec{\gamma} + m2\vec{v}' \times \vec{\Omega} + m\Omega^2 \vec{r}_\perp \quad (22)$$

¿Qué parte de esta ecuación se puede relacionar con las fuerzas de interacción? Solo $m\vec{a}(t)$, dado que $\vec{a}(t)$ es la aceleración de P en el sistema inercial:

$$\vec{F}_{\text{int}} = m\vec{a}(t)$$

El resto de los términos corresponde a efectos de inercia o fuerzas inerciales, es decir, aparecen en el SR para explicar el tipo de descripción que hace el observador no inercial del movimiento de P . Entonces, el segundo principio en el SR se escribe:

$$m\vec{a}'(t) = \vec{F}_{\text{int}} + \vec{f}_\gamma^* + \vec{f}_C^* + \vec{f}_{Cf}^* \quad (23)$$

donde:

❖ $\vec{f}_\gamma^* = m\vec{r} \times \vec{\gamma}$ es el efecto de inercia que aparece cuando el vector rotación $\vec{\Omega}$ no es constante.

❖ $\vec{f}_C^* = m2\vec{v}' \times \vec{\Omega}$ es el efecto de inercia llamado *fuerza de Coriolis*, que aparece cuando P tiene velocidad respecto del SR.

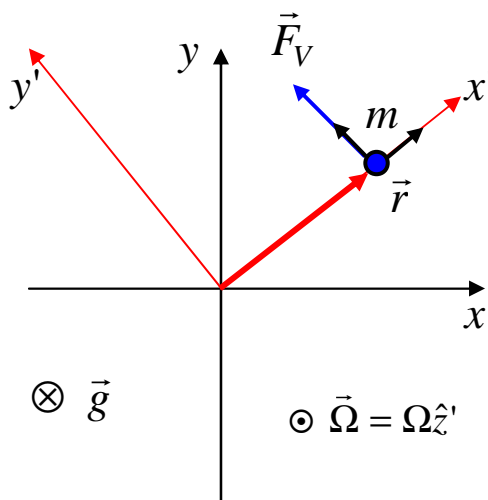
❖ $\vec{f}_{Cf}^* = m\Omega^2\vec{r}_\perp$ es el efecto de inercia llamado *fuerza centrífuga*, que aparece siempre.

• Veamos en algunos ejemplos cómo aparecen estos efectos de inercia y cuál es su función.

➤ *Ejemplo 3:* Estudiemos el movimiento de una masa m engarzada en un riel que gira con $\vec{\Omega} = c\vec{e}$, sobre una mesa sin rozamiento, desde dos sistemas de referencia:

a) SR que rota respecto de la mesa con el mismo vector rotación que el riel (S')

b) SI fijo a la mesa (S)



a) Se nos pide describir el movimiento de m respecto de un SR que rota con el mismo vector rotación que el riel. Es evidente que el movimiento de m va a ser rectilíneo en dicho SR, ya que, si eliminamos la rotación del riel, m solo puede moverse a lo largo de éste. Nos conviene, entonces, adosar a S' un sistema de coordenadas cartesiano (x', y', z') de tal manera que uno de los ejes (x') coincida con la dirección del riel.

La ecuación dinámica en S' es la ecuación (22), es decir:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + m\vec{r} \times \vec{\gamma} + m2\vec{v}' \times \vec{\Omega} + m\Omega^2 \vec{r}_\perp \quad (24)$$

Vamos a expresar cada elemento de esta ecuación en función de las coordenadas de S' :

➤ $m\vec{a} = \vec{F}_V = F_V \hat{y}'$

Como \vec{a} es la aceleración vista desde el SI, está relacionada con las fuerzas de interacción. La única fuerza de interacción presente es la fuerza de vínculo del riel, \vec{F}_V , (además del peso y la normal que no consideramos pues no afectan la dinámica del sistema-se compensan-) que, como ya hemos visto, resulta perpendicular al riel.

➤ $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}'$

Éste es el vector rotación del SR S' respecto del SI S . Notar que la dirección \hat{z}' coincide con \hat{z} .

➤ $m\vec{r} \times \vec{\gamma} = \vec{0}$

Como $\vec{\Omega} = c\vec{e}$, $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{0}$

➤ $\vec{r} = \vec{r}_\perp = x' \hat{x}'$

La posición de m siempre es sobre el eje x' . Notar que, en este caso, $\vec{r} = \vec{r}_\perp$.

➤ $\vec{v}' = \dot{x}' \hat{x}'$

Como el movimiento es rectilíneo, la velocidad de m en S' tiene dirección x' .

➤ $\vec{a}' = \ddot{x}' \hat{x}'$

Vale la misma consideración anterior.

- Con todo esto, volvemos a la ecuación (24):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' \hat{x}' &= F_V \hat{y}' + m \left[2(\dot{x}' \hat{x}') \times (\Omega \hat{z}') + \Omega^2 x' \hat{x}' \right] \\ &= F_V \hat{y}' + m \left[2\dot{x}' \Omega \underbrace{(\hat{x}' \times \hat{z}')}_{-\hat{y}'} + \Omega^2 x' \hat{x}' \right] \\ &= F_V \hat{y}' + m \left[-2\dot{x}' \Omega \hat{y}' + \Omega^2 x' \hat{x}' \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Separando la ecuación en componentes:

$$x') \quad m\ddot{x}' = m\Omega^2 x' = f_{Cf}^* \quad (26)$$

$$y') \quad 0 = F_V - 2m\dot{x}' \Omega = F_V - f_C^* \quad (27)$$

➤ La ecuación en x' es la ecuación de movimiento, Reordenándola:

$$x') \quad \ddot{x}' - m\Omega^2 x' = 0$$

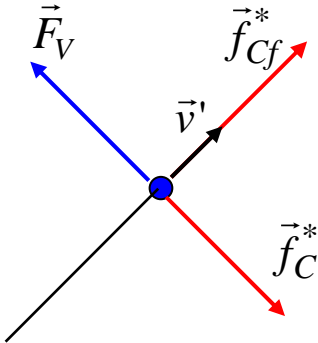
Resulta una ecuación de Euler homogénea, cuya solución se puede escribir (ver capítulo de Oscilaciones):

$$x'(t) = Ach(\Omega t + \varphi)$$

(28)

donde A y φ son dos constantes de integración que se determinan, por ejemplo, con las condiciones iniciales. Se observa que la masa tiende a alejarse del centro. En el SR, es la fuerza centrífuga, $\vec{f}_{Cf}^* = m\Omega^2 \vec{r}_\perp$ (es decir, el efecto de inercia representado por \vec{f}_{Cf}^*) la que gobierna (*explica*) el movimiento.

➤ La ecuación en y' es la ecuación de vínculo. En ella, interviene la fuerza de Coriolis, $\vec{f}_C^* = m2\vec{v}' \times \vec{\Omega}$. Noten que este efecto de inercia compensa a la fuerza de vínculo \vec{F}_V , verdadera fuerza de interacción, de tal manera que el movimiento en S' resulte lineal:



En el sistema S' , en todo instante, la fuerza de vínculo es perpendicular a \vec{v}' , por lo que actuaría, en parte, como fuerza centrípeta, cambiando la dirección de la velocidad. Como \vec{v}' no cambia de dirección en S' , debe haber un efecto de inercia que anule el efecto de \vec{F}_V . Este efecto de inercia es la fuerza de Coriolis.

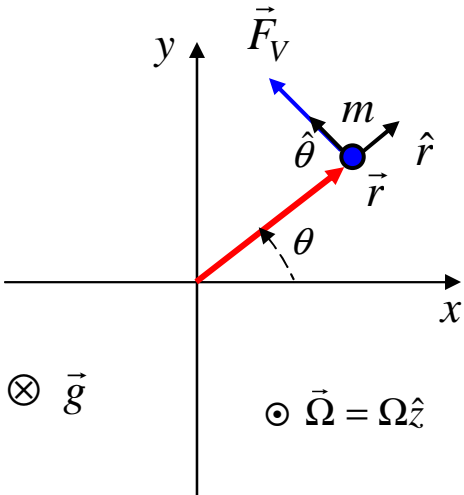
La ecuación en y' , nos da el valor de la fuerza de vínculo:

$$F_V = 2m\dot{x}'\Omega = f_C^*$$

Este valor, debe coincidir con el valor que encontremos al plantear este mismo problema en el SI, ya que *las fuerzas de interacción no dependen del sistema de referencia*.

b) Veamos cómo describimos el movimiento de m desde el SI S . Si nos paramos en S , el

movimiento va a ser curvilíneo, por lo que nos conviene usar coordenadas polares (ver figura)



Nótese que las direcciones (\hat{x}', \hat{y}') del SR coinciden, respectivamente, con $(\hat{r}, \hat{\theta})$, por lo que, es de esperar que obtengamos para $(\hat{r}, \hat{\theta})$, ecuaciones

similares a las que obtuvimos para (\hat{x}', \hat{y}') . Sin embargo, es importante notar la diferencia. (\hat{x}', \hat{y}') es un sistema de ejes rotantes, pero que, respecto del sistema S' , son *fijos*. $(\hat{r}, \hat{\theta})$ son coordenadas que siguen a m en su movimiento, es decir, se mueven respecto de S (su variación nos muestra cómo se mueve la masa m vista desde el sistema S).

- Escribamos, entonces, la aceleración \vec{a} de m en coordenadas polares:

$$m\vec{a} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

Con la condición de vínculo $\dot{\theta} = \Omega = cte$:

$$m\vec{a} = m(\ddot{r} - r\Omega^2)\hat{r} + 2m\dot{r}\Omega\hat{\theta}$$

En S se cumple el segundo principio, es decir:

$$m\vec{a} = m(\ddot{r} - r\Omega^2)\hat{r} + 2m\dot{r}\Omega\hat{\theta} = \vec{F}_V = F_V\hat{\theta}$$

En componentes:

$$r) \ddot{r} - r\Omega^2 = 0 \tag{29}$$

$$\theta) 2m\dot{r}\Omega\hat{\theta} = F_V \tag{30}$$

(Confrontar las ecuaciones (29) y (30) con las (26) y (27), respectivamente)

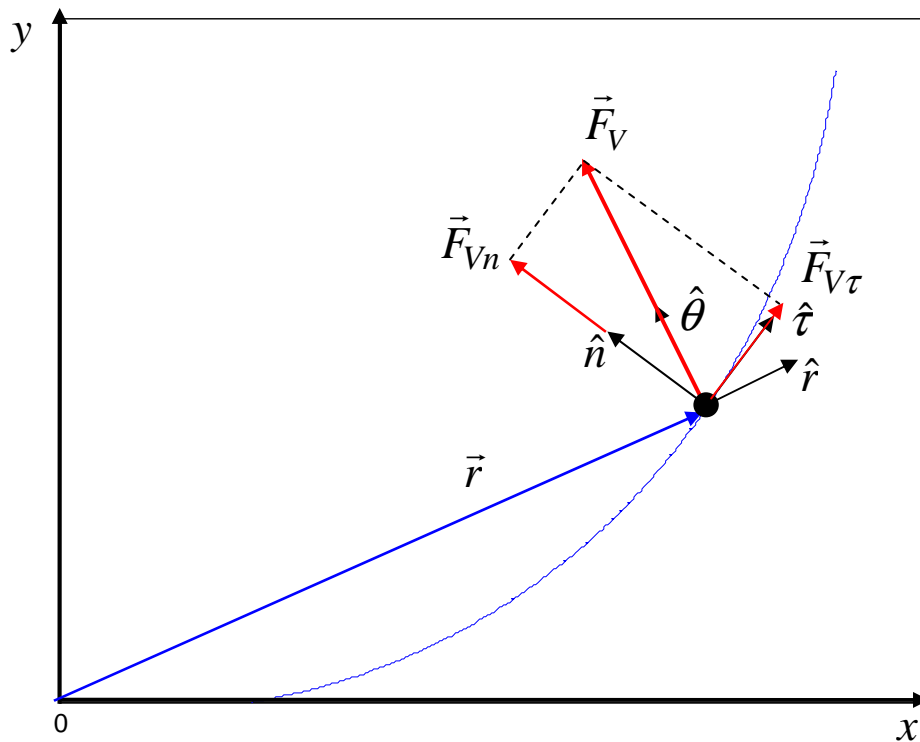
- La solución de la ecuación (29) se puede escribir:

$$r(t) = Ach(\Omega t + \varphi) \tag{31}$$

y la ecuación (30) nos da la fuerza de vínculo (obviamente, debemos encontrar el mismo resultado que en la ecuación (27)). En función del tiempo:

$$F_V = 2mA\Omega sh(\Omega t + \varphi) \tag{32}$$

- Las ecuaciones (28) y (31) son idénticas Sin embargo, aquí vemos la diferencia entre la descripción del movimiento en S' y en S . En el sistema S' tenemos una única coordenada de movimiento (x') y la trayectoria es una recta (en S' , el versor \hat{x}' es fijo). En S , hay dos coordenadas de movimiento (r y θ) y el movimiento es en el plano (\hat{r} y $\hat{\theta}$ no son versores fijos en S):



Vemos cómo se comporta la fuerza de vínculo:

- \vec{F}_{Vn} provee la aceleración centrípeta
- $\vec{F}_{V\tau}$ provee una aceleración tangencial, de tal manera que el movimiento es a $\dot{\theta} = \Omega = cte$ (¡la dirección tangencial dada por $\hat{\tau}$ no coincide con la dirección de $\hat{\theta}$!)
- Notemos finalmente, lo siguiente. La aceleración que obtuvimos en S' , \vec{a}' , (de ecuación (25)) es:

$$\ddot{x}'\hat{x}' = \vec{a} - 2\dot{x}'\Omega\hat{y}' + \Omega^2 x'\hat{x}'$$

Vamos a escribir \vec{a} con su expresión en polares:

$$\ddot{x}'\hat{x}' = \underbrace{(\ddot{r} - r\Omega^2)\hat{r} + 2\dot{r}\Omega\hat{\theta}}_{\vec{a}} - 2\dot{x}'\Omega\hat{y}' + \Omega^2 x'\hat{x}'$$

Pero como $\hat{x}' \equiv \hat{r}$ y $\hat{y}' \equiv \hat{\theta}$, $x' \equiv r$ y, por lo tanto, $\dot{x}' \equiv \dot{r}$, $\ddot{x}' \equiv \ddot{r}$, ponemos toda la expresión en función de un solo juego de coordenadas:

$$\ddot{x}'\hat{x}' = \underbrace{(\ddot{x}' - x'\Omega^2)\hat{x}' + 2\dot{x}'\Omega\hat{y}'}_{\vec{a}} - 2\dot{x}'\Omega\hat{y}' + \Omega^2 x'\hat{x}'$$

Observamos que:

- \vec{f}_{Cf}^* compensa a $(-x'\Omega^2\hat{x}' \equiv -r\Omega^2\hat{r})$ de la aceleración en polares, y

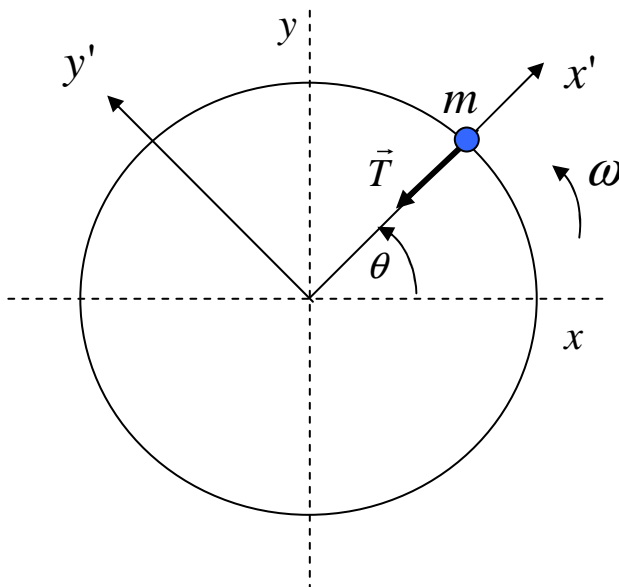
➤ \vec{f}_C^* compensa a $(2\dot{x}'\Omega\hat{y}' \equiv 2\dot{r}\Omega\hat{r})$ de la aceleración en polares, de tal manera que la aceleración en S' resulte lineal.



Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 4: Sea una bolita de masa m que realiza un movimiento circular uniforme con velocidad angular ω , atada a un hilo de longitud R , cuyo otro extremo está fijo al centro de la circunferencia. Calcular la tensión del hilo y las fuerzas inerciales para los siguientes sistemas de referencia.

- a) SNI que rota con ω (la misma velocidad angular de la bolita)
- b) SNI que rota con $\Omega < \omega$



a) Como el SNI gira con la misma velocidad angular que la masa m , ésta estará en reposo respecto de él. Elegimos un sistema de coordenadas cartesianas (\hat{x}', \hat{y}') como en la figura, de tal manera que la masa se encuentra sobre el eje x' .

La única fuerza de interacción es la tensión \vec{T} . Entonces:

$$\underbrace{m\vec{a}'}_{\vec{0}} = \underbrace{m\vec{a}}_{\vec{T}} + \underbrace{m\vec{r} \times \vec{\gamma}}_{\vec{0} \text{ (}\omega = \text{cte)}} + \underbrace{m2\vec{v}' \times \vec{\omega}}_{\vec{0} \text{ (}\vec{v}' = \vec{0})} + \omega^2 \vec{r}_\perp$$

De donde resulta:

$$\vec{0} = -T\hat{x}' + m\omega^2 \vec{r}_\perp$$

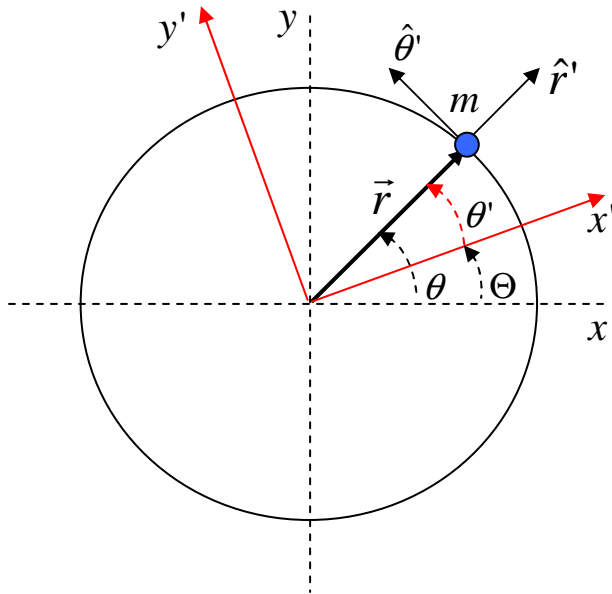
Se observa que la fuerza centrífuga compensa a la tensión, de tal manera que la masa se observa “detenida” en el SNI.

Recordando que \vec{r}_\perp es la componente del vector posición perpendicular al vector rotación, entonces $\vec{r}_\perp = R\hat{x}'$ y finalmente resulta:

$$\vec{T} = -m\omega^2 R\hat{x}'$$

resultado esperado, ya que nos dice que la tensión se comporta como fuerza centrípeta.

b) Ahora el SNI gira con $\Omega < \omega$, es decir, la masa m no estará en reposo respecto de él. Intuitivamente, se ve que m va a realizar un movimiento circular (en el SNI tenemos también la condición de vínculo $r = R$)



Vamos, entonces, a elegir un sistema de coordenadas polares, pero referidas al SR. Vemos que el ángulo que el vector posición \vec{r} forma con el eje x' es θ' , es decir, la posición de m respecto del SNI forma un ángulo θ' con el eje x' que es:

$$\theta' = \theta - \Theta$$

donde:

- θ es el ángulo que forma \vec{r} con el eje x ,
- Θ es el ángulo que va

describiendo el eje x' respecto del eje x del SI

Derivando la expresión anterior:

$$\dot{\theta}' = \dot{\theta} - \dot{\Theta}$$

$$\omega' = \omega - \Omega$$

Escribimos, entonces, la ecuación dinámica en el SNI:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{f}_C^* + \vec{f}_{Cf}^*$$

1) $m\vec{a} = \vec{T}$ (como siempre). Ya lo calculamos y es $\vec{T} = -m\omega^2 R\hat{x}'$. Es la misma fuerza que en el caso anterior, ya que, como ya hemos mencionado, *las fuerzas de interacción no dependen del sistema de referencia.*

$$\left. \begin{array}{l} 2) \vec{f}_{Cf}^* = m\Omega^2 \vec{r}_\perp = m\Omega^2 R\hat{r}' \\ 3) \vec{f}_C^* = 2m\vec{v}' \times \vec{\Omega} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{notar que la velocidad angular que aparece en los efectos}$$

de inercia es *la del SR respecto del SI.*

\vec{v}' es la velocidad de la masa m respecto del SR. La calculamos usando la ecuación (11b):

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\Omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} - \vec{\Omega} \times \vec{r} = (\vec{\omega} - \vec{\Omega}) \times \vec{r}$$

$$\vec{v}' = (\omega - \Omega) R (\hat{z} \times \hat{r}') = (\omega - \Omega) R \hat{\theta}'$$

Calculemos ahora la fuerza de Coriolis \vec{f}_C^* :

$$\vec{f}_C^* = 2m \underbrace{(\omega - \Omega)}_{\omega'} R \hat{\theta}' \times \Omega \hat{z}'$$

$$\vec{f}_C^* = 2m \omega' \Omega R \hat{r}'$$

Notar que, en este caso, \vec{f}_C^* también tiene dirección radial. La aceleración de m en el SNI será, entonces:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{T}}{m} + 2\omega' \Omega R \hat{r}' + \Omega^2 R \hat{r}' =$$

$$= \left[-\omega'^2 R + 2(\omega - \Omega)\Omega R + \Omega^2 R \right] \hat{r}'$$

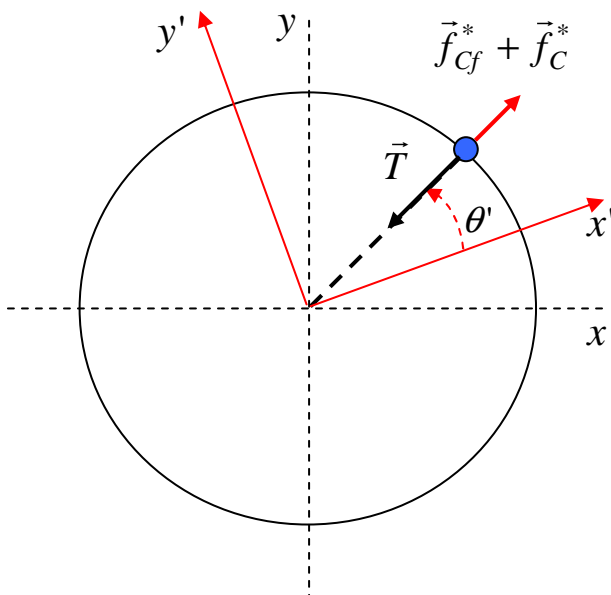
$$= -R \left[\omega'^2 - 2\omega\Omega + 2\Omega^2 - \Omega^2 \right] \hat{r}'$$

$$= -R \left[\omega - \Omega \right]^2 \hat{r}'$$

$$= -R \omega'^2 \hat{r}'$$

Es decir, obtuvimos la aceleración que esperábamos. Notar que se trata de la aceleración centrípeta que corresponde a un movimiento circular con velocidad angular constante $\omega' = \omega - \Omega$.

Analicemos el resultado obtenido. Vista desde el SNI, m realiza un movimiento circular con ω' . Por lo tanto, la suma de la fuerza de interacción presente y las seudofuerzas debe comportarse como fuerza centrípeta:



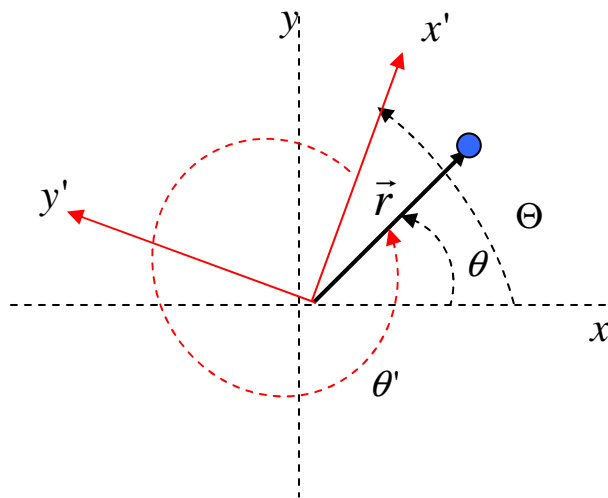
- \vec{T} provee la aceleración centrípeta que se observa desde el SI;
- \vec{f}_{Cf}^* compensa la aceleración centrípeta del SR ($-\Omega^2 R \hat{r}'$).
- \vec{f}_C^* agrega lo que falta para que la descripción del movimiento de m en el SR sea un movimiento circular uniforme con $\omega' = \omega - \Omega$.

\vec{f}_{Cf}^* y \vec{f}_C^* deben ser ambas radiales y salientes pues $\omega' < \omega$ (es decir, la

aceleración centrípeta en el SR es menor, en módulo, que la que se obtiene en el SI).

Cabría preguntarse qué resultado se hubiera obtenido si $\Omega > \omega$ (y, por lo tanto, $\omega' < 0$).

(Notar que \vec{f}_{Cf}^* no cambia...). En ese caso:



$$\theta' = 2\pi - (\Theta - \theta)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}' = \dot{\theta} - \dot{\Theta} < 0 \Rightarrow \omega' < 0$$

$$\Rightarrow \vec{f}_C^* = -2m|\omega|\Omega R\hat{r}'$$

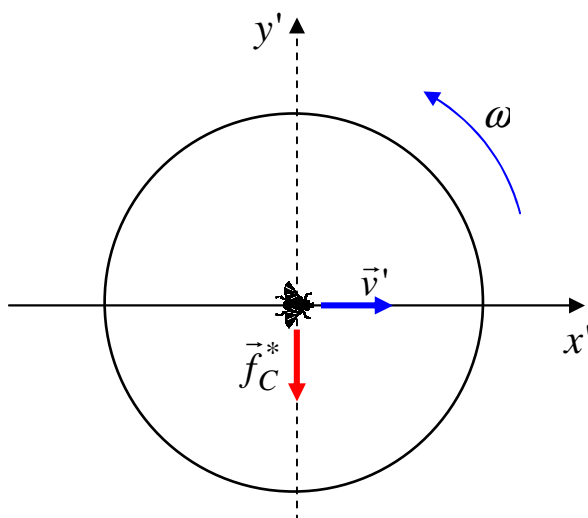
$$\text{y } \vec{v}' = \omega' R\hat{\theta}' = -|\omega|R\hat{\theta}'$$

Luego, desde el SR, m se ve girar en sentido contrario que desde el SI.

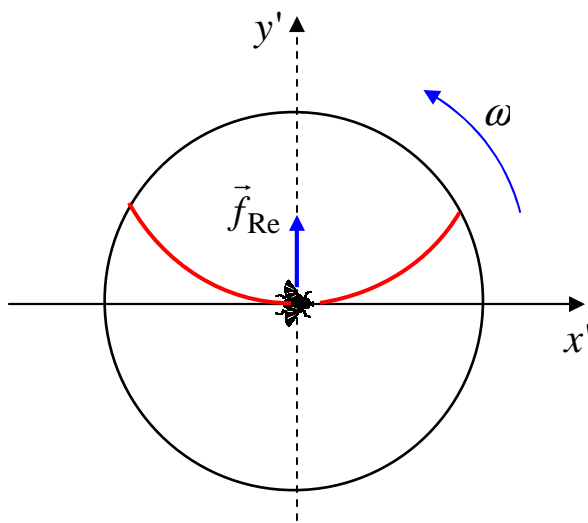


Lo que observamos de estos ejemplos es que los efectos de inercia que aparecen en un SR se adaptan a las características del movimiento del sistema en estudio. La fuerza centrífuga tiende a compensar la aceleración centrípeta del SR, de tal manera de “anular” la rotación del sistema para un observador parado sobre él. Por su parte, \vec{f}_γ^* , anula la aceleración angular del SR (en el caso en que $\vec{\Omega} \neq c\vec{t}\vec{e}$). El efecto de Coriolis aparece si el cuerpo está en movimiento respecto del SR, de tal forma que “completa” la descripción del movimiento en este sistema.

Por ejemplo, supongamos una partícula que se mueve en línea recta respecto del SR (por ejemplo, una mosca sobre una plataforma giratoria), de tal manera que pasa por el origen:



En el origen, el único efecto de inercia es la fuerza de Coriolis (la fuerza centrífuga $\vec{f}_{Cf}^* = \vec{0}$, ya que $\vec{r}_\perp = \vec{0}$).
¿Por qué aparece Coriolis en este caso?



Desde el SI, la trayectoria de la mosca sería aproximadamente como se ve en la figura. Es evidente que tiene que estar actuando alguna fuerza de interacción para que la trayectoria sea curva. ¿Cuál es esta fuerza? Nada menos que la fuerza de rozamiento *estática* (suponiendo que la mosca camina normalmente, sin resbalar). El efecto de Coriolis en el centro de la

plataforma es, entonces, compensar esta fuerza de interacción para “enderezar” la trayectoria en el SR. Notar que, en cualquier otro punto de la trayectoria, \vec{f}_{Cf}^* y \vec{f}_C^* cumplen esa función.



La Tierra como sistema rotante

La Tierra es un SNI por excelencia, si tenemos en cuenta la rotación alrededor de su propio eje, más su movimiento de traslación alrededor del Sol. A estos movimientos, además, deberíamos sumar el movimiento del sistema solar en la Vía Láctea, más la traslación de la galaxia, más... Despreciando todos estos últimos movimientos, cuyos efectos son pequeños frente a los efectos debidos a la rotación, vamos a estudiar a la Tierra como un SR.

La Tierra gira sobre un eje propio, que pasa por los Polos y forma un ángulo de $23^\circ 27'$ respecto de la normal al plano de la eclíptica (es decir, al plano que contiene a la órbita terrestre alrededor del Sol). Esta inclinación hace que la Tierra se comporte como un trompo, pero de ese fenómeno nos vamos a ocupar más adelante.

El período de rotación de la Tierra es de un día sidéreo, es decir, de 23 hs 56' 4'', por lo que su velocidad angular es:

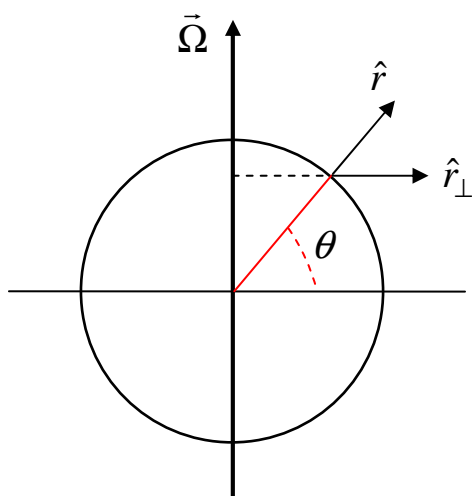
$$\Omega = \frac{2\pi}{86164 \text{ s}} \cong 7,29212 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

que resulta un valor bastante pequeño. Consideremos como modelo, una Tierra esférica³, con un radio $R \cong 6400 \text{ km}$ y una masa $M = 5,9736 \times 10^{24} \text{ kg}$ ⁴

³ En realidad, la forma de la Tierra se denomina *geoide*, es decir, ligeramente aplastada en los Polos y más abultada en el Ecuador, por efecto de la rotación.

⁴ <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>

- Un observador situado sobre la superficie de la Tierra experimenta una *aceleración centrífuga* que depende de la latitud en la que se encuentra. En efecto:



$$\begin{aligned}\vec{a}_{Cf}^* &= \Omega^2 \vec{r}_\perp = \Omega^2 R \cos \theta \hat{r}_\perp \\ &= 0.034 \cos \theta \hat{r}_\perp \left(\frac{m}{s^2} \right)\end{aligned}$$

siendo θ la latitud geográfica.

Esto produce varios efectos:

- La aceleración de la gravedad *aparente* o *efectiva* que sufre un objeto en reposo sobre la superficie de la Tierra, \vec{g}_{ef} , difiere de la que observaría un observador en un SI, no solo en

módulo, sino también en dirección:

$$\vec{g}_{ef} = \vec{g} + \vec{a}_{Cf}^* = -g \hat{r} + \Omega^2 R \cos \theta \hat{r}_\perp$$

Nótese que este efecto es máximo en el Ecuador ($\theta = 0^\circ$), donde la aceleración centrífuga tiene la misma dirección que la aceleración de la gravedad, pero sentido contrario, mientras que en los polos, $\vec{g}_{ef} = \vec{g}$ (es decir, la aceleración centrífuga es nula y se experimenta solo la aceleración de la gravedad).

La aceleración centrífuga crece con la distancia al centro de la Tierra. Por ejemplo, un satélite ubicado en el plano ecuatorial, a unos 42000 km del centro de la Tierra, experimenta una aceleración centrífuga que iguala en módulo a la aceleración gravitatoria. Efectivamente:

$$\vec{g}_{ef}(\theta = 0) = \vec{g} + \vec{a}_{Cf}^* = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} + \Omega^2 r \hat{r} = \vec{0} \Rightarrow r = \left(\frac{GM}{\Omega^2} \right)^{1/3} = 42206,9 \text{ km}$$

donde hemos usado $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$, es decir, la expresión exacta de la aceleración de la gravedad, ya que el satélite se encuentra a gran altura respecto de la superficie de la Tierra (ver capítulo de Interacción Gravitatoria). G es la constante de gravitación universal, cuyo valor es⁵:

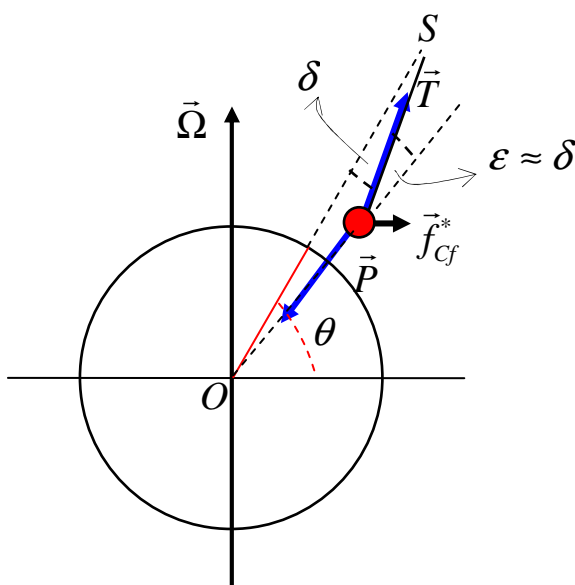
$$G \cong 6,693 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \ s^2}$$

A esa distancia, un satélite, visto desde el sistema de referencia de la Tierra, estaría en equilibrio y, para un observador en el Ecuador, permanecería siempre en la misma

⁵ J. B. Fixler, G. T. Foster, J. M. McGuirk y M. A. Kasevich, Science **315**, 74 (2007)

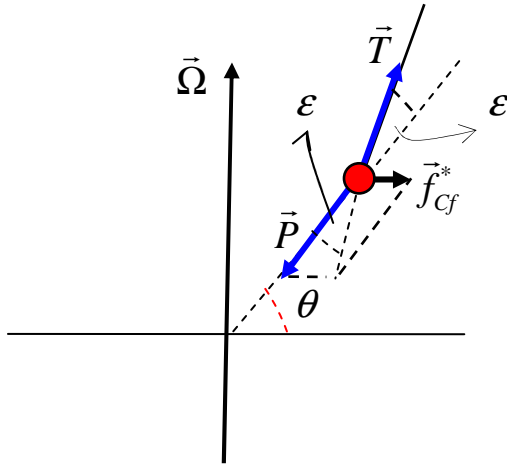
posición respecto de él. Esto es lo que se denomina un *satélite geoestacionario* y su período de revolución es igual al período de revolución terrestre. Notar que, dado que se encuentra en reposo respecto del sistema de referencia terrestre, no es afectado por la aceleración de Coriolis.

o Un segundo efecto debido a la aceleración centrífuga, relacionado con el anterior, es la desviación de la vertical del lugar respecto de la dirección radial terrestre. La vertical del lugar se determina mediante una plomada en equilibrio respecto de la Tierra. Calculemos dicha desviación. Supongamos una plomada de masa m , sostenida por un hilo ideal.



El efecto centrífugo desvía el hilo de la plomada respecto de la dirección radial. La dirección del hilo (y, en consecuencia, la de la tensión \vec{T}) determina la dirección de la vertical aparente del lugar.

De no haber efecto centrífugo, el hilo tendría la dirección radial $O\bar{S}$. Por lo tanto, la desviación de la vertical debida a la fuerza centrífuga es el ángulo entre esta dirección radial y la de la vertical aparente, δ , para la latitud θ del punto de suspensión S del hilo de la plomada. Por supuesto, el esquema está extremadamente exagerado. Teniendo en cuenta la enorme longitud del radio de la Tierra, comparada con la longitud del hilo, puede considerarse que la dirección radial definida por el peso \vec{P} y la dada por $O\bar{S}$ son prácticamente paralelas. En consecuencia, el ángulo ϵ entre la dirección de \vec{P} y la de \vec{T} es prácticamente igual a δ . Podemos, entonces, desprestigiar la ínfima diferencia entre la latitud del punto de suspensión y la de la masa m y considerar a ϵ como el ángulo de desviación de la vertical.

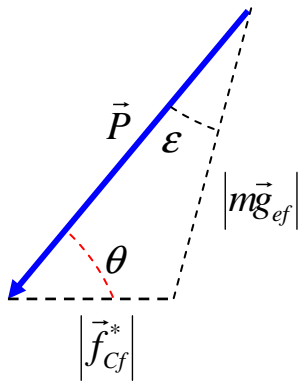


Como la masa m está en equilibrio en el sistema rotante:

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{f}_{cf}^* = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = -(\vec{P} + \vec{f}_{cf}^*)$$

es decir que la dirección de la vertical aparente va a estar dada por la resultante $(\vec{P} + \vec{f}_{cf}^*)$. El módulo de \vec{T} se considera el peso aparente del cuerpo, es decir:

$$|\vec{T}| = mg_{ef}$$



Usando el teorema del coseno:

$$g^2 + (\Omega^2 r_{\perp})^2 - 2g\Omega^2 r_{\perp} \cos \theta = g_{ef}^2$$

$$g^2 + (\Omega^2 R \cos \theta)^2 - 2g\Omega^2 R \cos^2 \theta = g_{ef}^2$$

Por el teorema del seno:

$$\frac{\Omega^2 R \cos \theta}{\text{sen} \epsilon} = \frac{g_{ef}}{\text{sen} \theta} \Rightarrow g_{ef} = \frac{\Omega^2 R \cos \theta \text{sen} \theta}{\text{sen} \epsilon} = \frac{\Omega^2 R \text{sen}(2\theta)}{2 \text{sen} \epsilon}$$

donde hemos usado que $\cos x \text{sen} x = \frac{1}{2} \text{sen}(2x)$. Con lo que

resulta:

$$g^2 + (\Omega^2 R \cos \theta)^2 - 2g\Omega^2 R \cos^2 \theta = \left(\frac{\Omega^2 R \text{sen}(2\theta)}{2 \text{sen} \epsilon} \right)^2$$

$$g^2 + \Omega^4 R^2 \cos^2 \theta - 2g\Omega^2 R \cos^2 \theta = \frac{\Omega^4 R^2 \text{sen}^2(2\theta)}{4 \text{sen}^2 \epsilon}$$

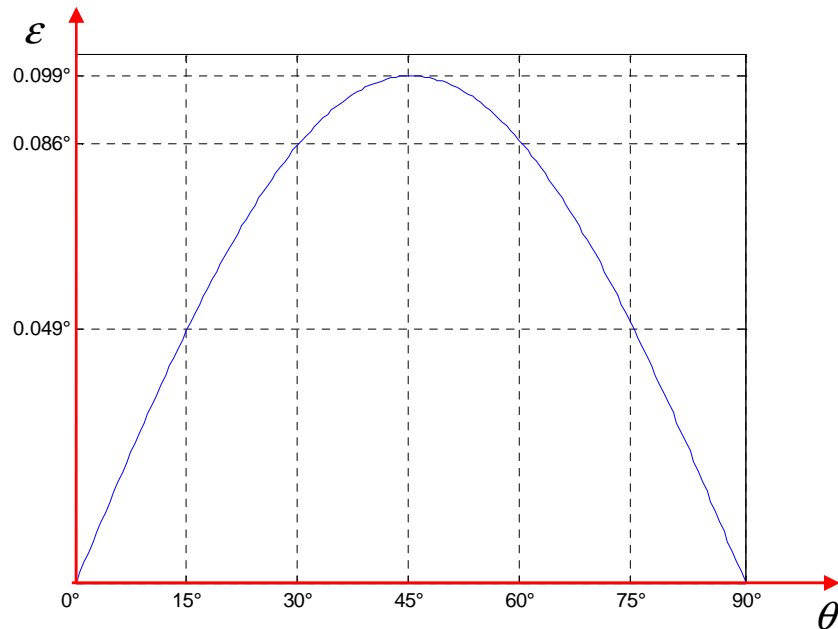
Reordenando la expresión:

$$4 \text{sen}^2 \epsilon = \frac{\Omega^4 R^2 \text{sen}^2(2\theta)}{g^2 + \Omega^4 R^2 \cos^2 \theta - 2g\Omega^2 R \cos^2 \theta}$$

$$\boxed{\text{sen} \epsilon = \frac{\Omega^2 R \text{sen}(2\theta)}{2(g^2 + \Omega^4 R^2 \cos^2 \theta - 2g\Omega^2 R \cos^2 \theta)^{1/2}}}$$

Hemos encontrado la desviación que presenta la vertical del lugar en función de la latitud. Sin embargo, teniendo en cuenta que Ω es muy pequeño, se justifica despreciar los términos en $\Omega^2 R$ frente a g en el denominador, con lo que:

$$\varepsilon \cong \arcsen\left(\frac{\Omega^2 R \operatorname{sen}(2\theta)}{2g}\right) \cong \arcsen(0,00173 \operatorname{sen}(2\theta))$$



Desviación de la vertical del lugar, ε , en función de la latitud θ

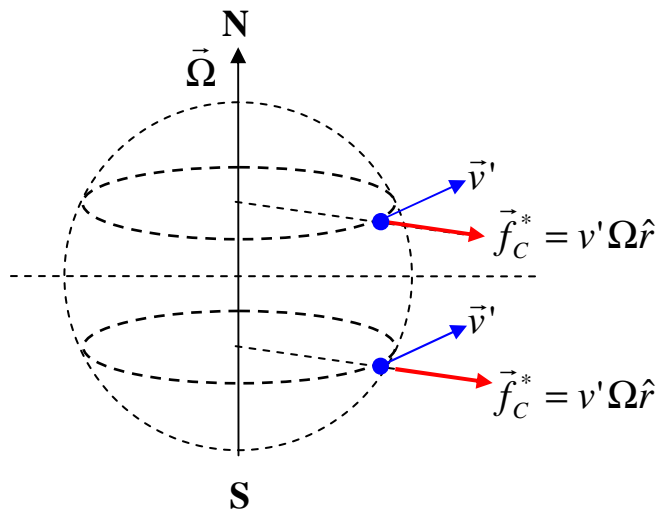
Nótese que la desviación es nula para los Polos ($\theta = 90^\circ$) y para el Ecuador ($\theta = 0^\circ$), mientras que es máxima para los 45° de latitud, si bien aun este valor máximo es muy pequeño (del orden de la centésima de grado).

➤ Si el objeto que se está considerando está en movimiento respecto de la Tierra, al efecto debido a la aceleración centrífuga, se le suma el de la *aceleración de Coriolis*. El efecto de Coriolis sobre el movimiento de los objetos suele ser muy pequeño. Por ejemplo, para que un objeto experimente una aceleración de Coriolis igual en módulo a g , su velocidad respecto de la Tierra debe ser:

$$v \propto \frac{g}{2\Omega} \approx 1,4 \times 10^5 \frac{m}{s}$$

Sin embargo, aunque la magnitud de la aceleración de Coriolis pueda resultar pequeña, puede originar grandes desviaciones para recorridos extensos, por ejemplo, en el caso de vientos o proyectiles de largo alcance. Veamos algunos ejemplos.

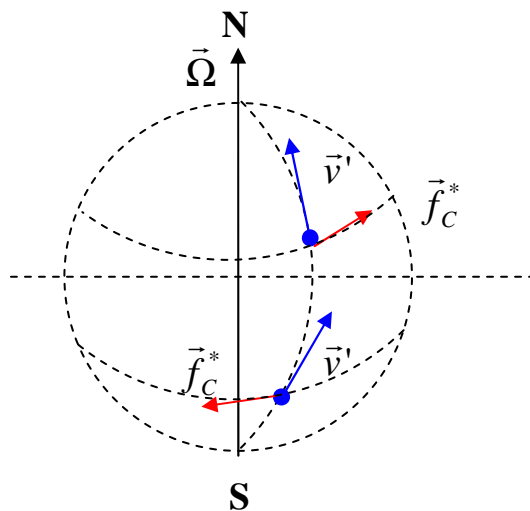
- Supongamos un movimiento en un plano horizontal, siguiendo un paralelo, a una cierta latitud, en el hemisferio norte y en el hemisferio sur.



En este caso, la aceleración de Coriolis tiene la misma dirección y sentido que la aceleración centrífuga.

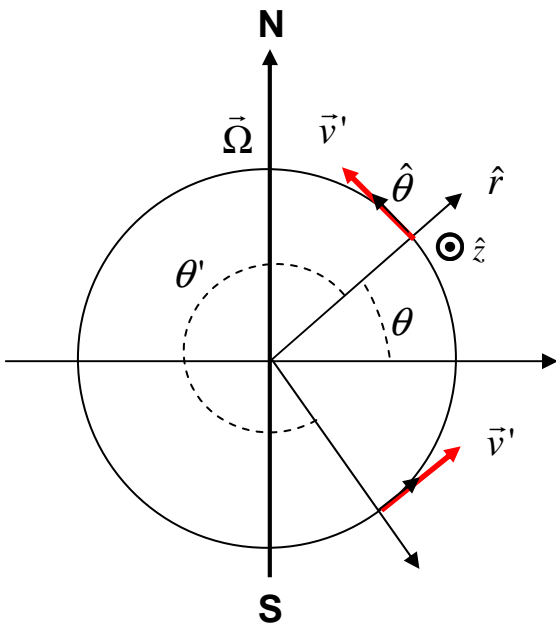
El movimiento sobre un paralelo es un movimiento circular; por lo tanto, tanto la fuerza centrífuga como la fuerza de Coriolis, (junto con la verdadera fuerza de interacción-la gravitatoria-) proveen la aceleración centrípeta en el SR.

- Si el movimiento es a lo largo de un meridiano:



La fuerza de Coriolis tiene sentido contrario en el hemisferio norte que en el hemisferio sur. Por ejemplo, si el movimiento es de sur a norte, en el hemisferio norte tiende a desviar la trayectoria hacia el este, mientras que en el hemisferio sur, lo hace hacia el oeste.

Podemos calcular este efecto. Para ello, consideremos el siguiente esquema:



$$\vec{v}' = v' \hat{\theta}$$

$$\vec{\Omega} = \Omega(\cos \theta \hat{\theta} + \text{sen} \theta \hat{r})$$

La fuerza de Coriolis será, entonces:

$$\begin{aligned} \vec{f}_C^* &= 2m\vec{v}' \times \vec{\Omega} = 2mv' \Omega \hat{\theta} \times (\cos \theta \hat{\theta} + \text{sen} \theta \hat{r}) \\ &= 2mv' \Omega \text{sen} \theta (\hat{\theta} \times \hat{r}) \\ &= -2mv' \Omega \text{sen} \theta \hat{z} \end{aligned}$$

En el hemisferio N, entonces, la desviación es en $(-\hat{z})$ (entrante), es decir, hacia el E.

En el hemisferio S, el ángulo es, para la misma latitud S:

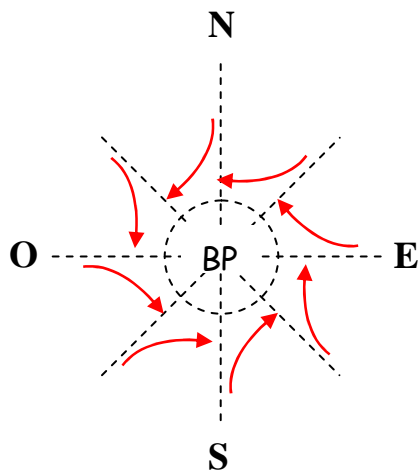
$$\theta' = 2\pi - \theta$$

con lo que $\text{sen}(2\pi - \theta) = -\text{sen} \theta$. Por lo tanto:

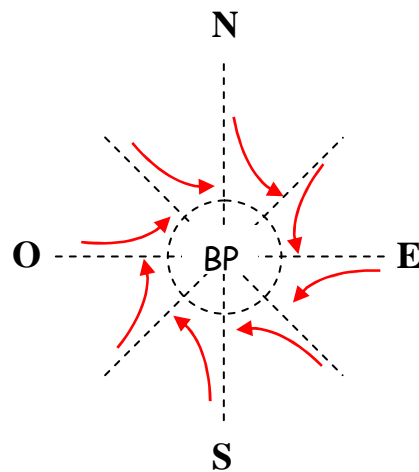
$$\vec{f}_C^* = 2mv' \Omega \text{sen} \theta \hat{z}$$

y la desviación es en \hat{z} (saliente), es decir, hacia el O.

o El efecto horizontal puede verse también en el remolino de un huracán. Si se desarrolla un centro de baja presión en la atmósfera, el viento fluirá hacia el centro. Visto desde un SI, dicho movimiento será radial hacia el centro de baja presión. Observado desde el sistema terrestre, la aceleración de Coriolis desvía las moléculas de aire hacia la izquierda de sus trayectorias en el hemisferio sur, dando por resultado un movimiento en el sentido de las agujas del reloj. En el hemisferio norte, la rotación de los vientos resulta en sentido antihorario. En el esquema, el círculo representa un centro ciclónico (baja presión); las líneas radiales, las direcciones de los vientos vistas desde un SI, y las flechas curvas, las direcciones de los vientos vistas desde el SR de la Tierra.



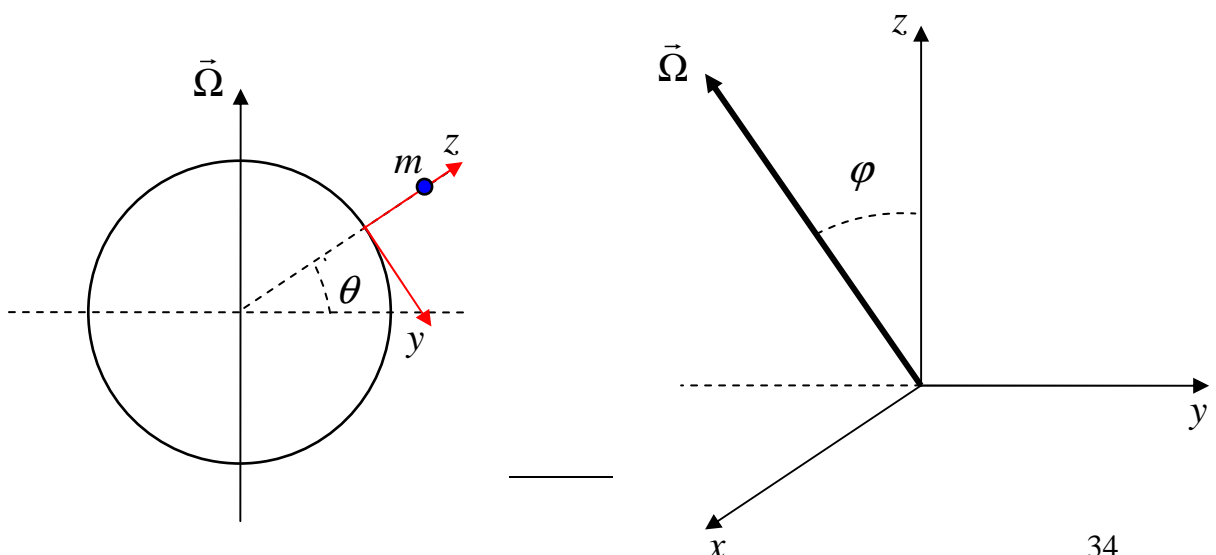
Hemisferio N



Hemisferio S

Tema avanzado: Objeto en caída libre.

Un objeto en caída libre se observa desde un SI siguiendo un movimiento radial, es decir, dirigido radialmente hacia el centro de la Tierra. Desde el sistema de referencia terrestre se observa que el objeto sufre una desviación hacia el este, debida a la aceleración de Coriolis. Calculemos la trayectoria de dicho objeto, considerando las ecuaciones de movimiento resultantes en un sistema fijo a la Tierra. Para simplificar el cálculo, supongamos que el objeto cae desde una altura tal que puede despreciarse la variación de la aceleración gravitatoria con la altura. Nuestro sistema de referencia se encuentra a una cierta latitud θ . Adosamos a este sistema de referencia un sistema de coordenadas, de tal manera que el eje z tiene la dirección que coincide con la trayectoria del objeto en el SI, es decir, radial, y el vector rotación terrestre $\vec{\Omega}$ queda contenido en el plano zy . Como en los casos que hemos estudiado anteriormente, *no* usamos variables primadas en los ejes, para simplificar la, notación.



Con esta elección del sistema de coordenadas, el vector rotación queda escrito como:

$$\vec{\Omega} = \Omega \cos \varphi \hat{z} - \Omega \sin \varphi \hat{y}$$

donde $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ es el ángulo polar y, respecto de la Tierra, se denomina *colatitud*.

La aceleración en el SR es:

$$\vec{a}' = -g\hat{z} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{v}' \times \vec{\Omega}$$

donde:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad \text{es la posición de la partícula (en el SI o en el SR)}$$

$$\vec{v}' = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} \quad \text{es la velocidad del objeto en el SR}$$

$$\vec{a}_{cf}^* = -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad \text{es la aceleración centrífuga}$$

$$\vec{a}_c^* = 2\vec{v}' \times \vec{\Omega} \quad \text{es la aceleración de Coriolis}$$

$$\vec{a} = -g\hat{z} \quad \text{es la aceleración "real", provista por la interacción gravitatoria}$$

Calculemos las aceleraciones debidas a efectos de inercia. La aceleración centrífuga:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{cf}^* &= -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -[\vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega})] \\ &= \Omega^2 \{(\cos \varphi \hat{z} - \sin \varphi \hat{y})[(\cos \varphi \hat{z} - \sin \varphi \hat{y}) \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})] - (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})\} \end{aligned}$$

donde hemos usado la identidad vectorial ya conocida.

$$\begin{aligned} \vec{a}_{cf}^* &= -\Omega^2 \{(\cos \varphi \hat{z} - \sin \varphi \hat{y})(z \cos \varphi - y \sin \varphi) - (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})\} = \\ &= -\Omega^2 \{z \cos^2 \varphi \hat{z} - z \cos \varphi \sin \varphi \hat{y} - y \sin \varphi \cos \varphi \hat{z} + y \sin^2 \varphi \hat{y} - (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})\} = \\ &= -\Omega^2 [z \underbrace{(\cos^2 \varphi - 1)}_{-\sin^2 \varphi} \hat{z} + y \underbrace{(\sin^2 \varphi - 1)}_{-\cos^2 \varphi} \hat{y} - z \cos \varphi \sin \varphi \hat{y} - y \sin \varphi \cos \varphi \hat{z} - x\hat{x}] = \\ &= \Omega^2 [(y \cos \varphi + z \sin \varphi)(\sin \varphi \hat{z} + \cos \varphi \hat{y}) + x\hat{x}] \end{aligned}$$

La aceleración de Coriolis:

$$\begin{aligned} \vec{a}_c^* &= 2\vec{v}' \times \vec{\Omega} = 2\Omega(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}) \times (\cos \varphi \hat{z} - \sin \varphi \hat{y}) = \\ &= 2\Omega(-\dot{x} \cos \varphi \hat{y} + \dot{y} \cos \varphi \hat{x} - \dot{x} \sin \varphi \hat{z} + \dot{z} \sin \varphi \hat{x}) = \\ &= 2\Omega[(\dot{y} \cos \varphi + \dot{z} \sin \varphi)\hat{x} - \dot{x} \cos \varphi \hat{y} - \dot{x} \sin \varphi \hat{z}] \end{aligned}$$

Ahora podemos escribir las ecuaciones de movimiento en cada uno de los ejes:

$$x) \ddot{x} = \Omega^2 x + 2\Omega(\dot{y} \cos \varphi + \dot{z} \sin \varphi)$$

$$y) \ddot{y} = \Omega^2 (y \cos \varphi + z \sin \varphi) \cos \varphi - 2\Omega \dot{x} \cos \varphi$$

$$z) \ddot{z} = -g + \Omega^2 (y \cos \varphi + z \sin \varphi) \sin \varphi - 2\Omega \dot{x} \sin \varphi$$

De acuerdo a la forma de las ecuaciones de movimiento, conviene hacer un cambio de variables:

$$n = y \cos \varphi + z \operatorname{sen} \varphi - \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi$$

$$u = z \cos \varphi - y \operatorname{sen} \varphi$$

Puede notarse que esto es equivalente a rotar los ejes y y z en un ángulo φ :

$$\begin{pmatrix} n + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \\ -\operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

por lo que, la transformación inversa se obtiene rotando los ejes u y n en un ángulo $(-\varphi)$:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi \\ u \end{pmatrix}$$

Con lo que resulta:

$$y(t) = \left(n(t) + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi \right) \cos \varphi - u(t) \operatorname{sen} \varphi$$

$$z(t) = \left(n(t) + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi \right) \operatorname{sen} \varphi + u(t) \cos \varphi$$

La variable n se define restando la constante $\frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi$ para que no aparezca en las ecuaciones de movimiento. Notar que esta primera variable, n , corresponde a una dirección en el espacio

$$\hat{n} = \hat{y} \cos \varphi + \hat{z} \operatorname{sen} \varphi$$

que es perpendicular a $\hat{\Omega}$:

$$\hat{n} \cdot \overline{\Omega} = (\hat{y} \cos \varphi + \hat{z} \operatorname{sen} \varphi) \cdot (\Omega \cos \varphi \hat{z} - \Omega \operatorname{sen} \varphi \hat{y}) = \Omega(-\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi) = 0$$

mientras que la segunda, u , corresponde a una dirección

$$\hat{u} = \hat{z} \cos \varphi - \hat{y} \operatorname{sen} \varphi$$

paralela a $\hat{\Omega}$:

$$\hat{u} \cdot \overline{\Omega} = (\hat{z} \cos \varphi - \hat{y} \operatorname{sen} \varphi) \cdot (\Omega \cos \varphi \hat{z} - \Omega \operatorname{sen} \varphi \hat{y}) = \Omega(\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) = \Omega$$

Con estas nuevas variables, las ecuaciones de movimiento resultan:

$$x) \ddot{x} = \Omega^2 x + 2\Omega \dot{n}$$

$$n) \ddot{n} = \Omega^2 n - 2\Omega \dot{x}$$

$$u) \ddot{u} = -g \cos \varphi$$

➤ La tercera ecuación corresponde a un MRUV: en la dirección de $\hat{\Omega}$, los efectos de inercia son nulos. La solución es:

$$u(t) = C + Dt - \frac{1}{2} g \cos \varphi t^2$$

Las primeras dos ecuaciones están *acopladas*. Para resolverlas, podemos definir una variable compleja

$$\eta = x + in$$

de tal manera que $x = \text{Re } \eta$ y $n = \text{Im } \eta$.

Multiplicando la segunda ecuación por la unidad imaginaria, y sumando ambas ecuaciones, resulta:

$$\ddot{x} + i\ddot{n} = \Omega^2 x + 2\Omega\dot{n} + i\Omega^2 n - 2i\Omega\dot{x}$$

$$\ddot{x} + i\ddot{n} = \Omega^2 (x + in) - 2\Omega i (\dot{x} + i\dot{n})$$

$$\ddot{\eta} = \Omega^2 \eta - 2\Omega i \dot{\eta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\eta} + 2\Omega i \dot{\eta} - \Omega^2 \eta = 0$$

Resulta una ecuación diferencial de Euler, por lo que planteamos una solución de la forma $\eta \propto e^{\omega t}$. La ecuación característica resulta:

$$\omega^2 + 2\Omega i \omega - \Omega^2 = 0$$

cuya solución es:

$$\omega = \frac{-2\Omega i \pm \sqrt{-4\Omega^2 + 4\Omega^2}}{2} = -i\Omega$$

Obtenemos una única raíz doble. Como se trata de una ecuación diferencial de segundo grado, necesitamos dos constantes de integración, por lo que, para una ecuación de Euler, la solución será (ver capítulo de Oscilaciones):

$$\eta(t) = f(t)e^{-i\Omega t}$$

donde $f(t)$ es una función lineal. Para mayor libertad, planteamos que los coeficientes de la función lineal sean complejos de la forma $\rho e^{i\phi}$:

$$\eta(t) = (Ae^{-i\alpha} + tBe^{-i\beta})e^{-i\Omega t}$$

$$\eta(t) = Ae^{-i(\Omega t + \alpha)} + tBe^{-i(\Omega t + \beta)}$$

Quedan, entonces, cuatro constantes de integración: A , B , α y β . Notar que, con la notación usada, A y B son reales. Considerando la parte real y la imaginaria de $\eta(t)$, y teniendo en cuenta la solución para la ecuación en u :

$$x(t) = \text{Re } \eta(t) = A \cos(\Omega t + \alpha) + tB \cos(\Omega t + \beta)$$

$$n(t) = \text{Im } \eta(t) = -A \text{sen}(\Omega t + \alpha) - tB \text{sen}(\Omega t + \beta)$$

$$u(t) = C + Dt - \frac{1}{2} g \cos \varphi t^2$$

Recuperando las variables $y(t)$ y $z(t)$:

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \alpha) + tB \cos(\Omega t + \beta)$$

$$y(t) = [-A \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha) - tB \operatorname{sen}(\Omega t + \beta) + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi] \cos \varphi - [C + Dt - \frac{1}{2} g \cos \varphi t^2] \operatorname{sen} \varphi$$

$$z(t) = [-A \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha) - tB \operatorname{sen}(\Omega t + \beta) + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi] \operatorname{sen} \varphi + [C + Dt - \frac{1}{2} g \cos \varphi t^2] \cos \varphi$$

➤ Planteemos condiciones iniciales para determinar las seis constantes. Por ejemplo:

$$x(t=0) = 0 \quad \dot{x}(t=0) = 0$$

$$y(t=0) = 0 \quad \dot{y}(t=0) = 0$$

$$z(t=0) = h \quad \dot{z}(t=0) = 0$$

Es decir, el objeto cae desde una altura h , sin velocidad inicial respecto de la Tierra.

$$1) x(t=0) = A \cos(\alpha) = 0$$

$$2) y(t=0) = [-A \operatorname{sen}(\alpha) + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi] \cos \varphi - C \operatorname{sen} \varphi = 0$$

$$3) z(t=0) = [-A \operatorname{sen}(\alpha) + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi] \operatorname{sen} \varphi + C \cos \varphi = h$$

$$4) \dot{x}(t=0) = -A\Omega \operatorname{sen}(\alpha) + B \cos(\beta) = 0$$

$$5) \dot{y}(t=0) = [-A\Omega \cos(\alpha) - B \operatorname{sen}(\beta)] \cos \varphi - D \operatorname{sen} \varphi = 0$$

$$6) \dot{z}(t=0) = [-A\Omega \cos(\alpha) - B \operatorname{sen}(\beta)] \operatorname{sen} \varphi + D \cos \varphi = 0$$

De la primera ecuación resulta:

$$\cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad A = 0$$

Consideremos la primera opción. Entonces:

$$2) [-A + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi] \cos \varphi - C \operatorname{sen} \varphi = 0$$

$$3) [-A + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi] \operatorname{sen} \varphi + C \cos \varphi = h$$

$$4) -A\Omega + B \cos(\beta) = 0$$

$$5) -B \operatorname{sen}(\beta) \cos \varphi - D \operatorname{sen} \varphi = 0$$

$$6) -B \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen} \varphi + D \cos \varphi = 0$$

Multiplicando 2) por $\operatorname{sen} \varphi$ y 3) por $\cos \varphi$, y sumando ambas ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2) -A \cos^2 \varphi + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi - C \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = 0 \\ 3) -A \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen}^3 \varphi + C \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi = h \operatorname{sen} \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow A = \left(\frac{g}{\Omega^2} - h \right) \operatorname{sen} \varphi$$

Multiplicando ahora 3) por $\operatorname{sen} \varphi$ y 2) por $\cos \varphi$, y restando ambas ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2) - A \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi - C \operatorname{sen}^2 \varphi = 0 \\ 3) - A \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi + C \cos^2 \varphi = h \cos \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow C = h \cos \varphi$$

Procediendo en forma similar con 5) y 6):

$$\left. \begin{array}{l} 5) - B \operatorname{sen}(\beta) \cos^2 \varphi - D \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = 0 \\ 6) - B \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}^2 \varphi + D \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 5) - B \operatorname{sen}(\beta) \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi - D \operatorname{sen}^2 \varphi = 0 \\ 6) - B \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + D \cos^2 \varphi = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow D = 0$$

Finalmente, de la ecuación 4):

$$4) - A \Omega + B = 0 \Rightarrow B = \Omega \left(\frac{g}{\Omega^2} - h \right) \operatorname{sen} \varphi$$

De esta forma, la solución resulta:

$$\begin{aligned} x(t) &= - \left(\frac{g}{\Omega^2} - h \right) \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}(\Omega t) + (\Omega t) \left(\frac{g}{\Omega^2} - h \right) \operatorname{sen} \varphi \cos(\Omega t) \\ y(t) &= \left[- \left(\frac{g}{\Omega^2} - h \right) \operatorname{sen} \varphi \cos(\Omega t) - (\Omega t) \left(\frac{g}{\Omega^2} - h \right) \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}(\Omega t) + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi \right] \cos \varphi - \\ &\quad - \left[h \cos \varphi - \frac{1}{2} g \cos \varphi t^2 \right] \operatorname{sen} \varphi \\ z(t) &= \left[- \left(\frac{g}{\Omega^2} - h \right) \operatorname{sen} \varphi \cos(\Omega t) - (\Omega t) \left(\frac{g}{\Omega^2} - h \right) \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}(\Omega t) + \frac{g}{\Omega^2} \operatorname{sen} \varphi \right] \operatorname{sen} \varphi + \\ &\quad + \left[h \cos \varphi - \frac{1}{2} g \cos \varphi t^2 \right] \cos \varphi \end{aligned}$$

Ordenando los términos y escribiéndolos en función de la latitud θ :

$$\begin{aligned} x(t) &= - \left(\frac{g}{\Omega^2} - h \right) \cos \theta \left[\operatorname{sen}(\Omega t) - (\Omega t) \cos(\Omega t) \right] \\ y(t) &= \left[- \left(\frac{g}{\Omega^2} - h \right) \left[\cos(\Omega t) + (\Omega t) \operatorname{sen}(\Omega t) \right] + \frac{g}{\Omega^2} - \left[h - \frac{1}{2} g t^2 \right] \right] \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ z(t) &= \left[- \left(\frac{g}{\Omega^2} - h \right) \left[\cos(\Omega t) + (\Omega t) \operatorname{sen}(\Omega t) \right] + \frac{g}{\Omega^2} \right] \cos^2 \theta + \left[h - \frac{1}{2} g t^2 \right] \operatorname{sen}^2 \theta \end{aligned}$$

Hemos encontrado la solución exacta, compatible con la única aproximación que hemos hecho (esto es, considerar el cuerpo cae desde una altura tal que puede considerarse que la aceleración gravitatoria es constante). Sin embargo, podemos encontrar expresiones

aproximadas, que nos van a permitir interpretar más fácilmente el resultado obtenido.

Para ello, tengamos en cuenta que, dado que $\Omega \approx 10^{-5} \frac{rad}{s}$:

➤ la cantidad $\frac{g}{\Omega^2} \gg h$ (dado que la altura desde la que cae el objeto es pequeña, como para que $g \approx cte$).

➤ $\Omega t \approx 0$, con lo que podemos aproximar $\begin{cases} \text{sen}(\Omega t) \cong \Omega t - \frac{1}{3}(\Omega t)^3 \\ \text{cos}(\Omega t) \cong 1 - \frac{1}{2}(\Omega t)^2 \end{cases}$

Entonces:

$$x(t) \cong -\frac{g}{\Omega^2} \left[(\Omega t) - \frac{1}{3}(\Omega t)^3 - (\Omega t) + \frac{1}{2}(\Omega t)^3 \right] \cos \theta$$

$$y(t) \cong \left\{ -\frac{g}{\Omega^2} \left[1 - \frac{1}{2}(\Omega t)^2 + (\Omega t)^2 - \frac{1}{3}(\Omega t)^4 - 1 \right] + h \left[1 - \frac{1}{2}(\Omega t)^2 + (\Omega t)^2 - \frac{1}{3}(\Omega t)^4 \right] - \left[h - \frac{1}{2}gt^2 \right] \right\} \text{sen} \theta \cos \theta \cong \left(-\frac{1}{2}gt^2 + h - h + \frac{1}{2}gt^2 \right) \text{sen} \theta \cos \theta = 0$$

$$z(t) \cong -\frac{g}{\Omega^2} \left[1 - \frac{1}{2}(\Omega t)^2 + (\Omega t)^2 - \frac{1}{3}(\Omega t)^4 - 1 \right] \cos^2 \theta + h \left[1 - \frac{1}{2}(\Omega t)^2 + (\Omega t)^2 - \frac{1}{3}(\Omega t)^4 \right] \cos^2 \theta + \left[h - \frac{1}{2}gt^2 \right] \text{sen}^2 \theta \cong -\frac{1}{2}gt^2 \cos^2 \theta + h \cos^2 \theta + h \text{sen}^2 \theta - \frac{1}{2}gt^2 \text{sen}^2 \theta$$

donde hemos despreciado términos en Ω^2 y superiores.

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{6}g\Omega \cos \theta t^3 \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Finalmente:

En esta solución aproximada se observa que el objeto en caída libre experimenta una desviación hacia el Este, visto desde el sistema rotante de la Tierra. Estimemos dicha desviación, en función de la altura. El tiempo total de caída será:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

con lo que, la desviación resulta:

$$x(h) = -\frac{1}{6}g\Omega \cos \theta \left(\frac{2h}{g} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Por ejemplo, si el objeto cae desde una altura de 100 m:

$$x(h = 100 \text{ m}) \cong 1,1 \text{ cm} \cos \theta$$

donde el máximo desplazamiento se observaría en el Ecuador. Notar que no hemos tenido en cuenta la variación de la aceleración de la gravedad con la altura, por lo que no puede usarse esta expresión para objetos que caen desde alturas muy grandes⁶, o bien debe tomarse este resultado como una cota máxima para dicha desviación.

o Otro efecto notable debido a la aceleración de Coriolis es el movimiento de precesión que experimenta el plano de oscilación de un péndulo. En efecto, este plano se desvía continuamente hacia la izquierda en el sur y hacia la derecha, en el norte, completando una vuelta en un tiempo que depende de la latitud del lugar. Por supuesto, dado que la aceleración de Coriolis depende de la velocidad del objeto vista desde el SR, y de la velocidad angular del SR, este efecto, muy pequeño, puede no observarse si no se realiza la experiencia en condiciones óptimas, es decir, evitando que otros efectos (vibraciones, corrientes, etc.) puedan contrarrestar el efecto de Coriolis. Una experiencia de estas características se describe en la próxima sección.

Tema avanzado: El péndulo de Foucault

En 1851, el físico francés Bernard León Foucault emplazó un péndulo de grandes dimensiones bajo la cúpula del Panteón de París, para comprobar el movimiento de rotación de la Tierra en torno a su eje y mostrar así que la Tierra constituye un sistema de referencia no inercial. El péndulo, de una longitud de 70 m y una masa de 28 kg, oscilaba sobre una superficie cubierta de arena, y poseía una aguja metálica colocada en la parte inferior de la “lenteja”, con la que barría la arena en cada oscilación. Se vio de esta manera que el plano de oscilación del péndulo rotaba en sentido horario (por encontrarse en el hemisferio norte) y, (en París), completaba una vuelta en aproximadamente 32 hs.

El plano de oscilación de un péndulo, como sabemos, es único, visto desde un sistema inercial. Si ubicáramos el péndulo de Foucault en el Polo Norte, y lo observáramos desde un SI, veríamos que el péndulo oscila en un único plano y la Tierra rota bajo él, completando una vuelta en aproximadamente 24 hs. Por el contrario, un observador no inercial, fijo a la Tierra, vería que el plano de oscilación del péndulo rota en sentido contrario al sentido de rotación terrestre, dando una vuelta cada 24 hs.

⁶ En rigor, puede ser una buena aproximación para $\frac{h}{R} \ll 1$, donde R es el radio terrestre.