Sistemas de masa variable.

Vimos que el segundo principio se puede expresar:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{ext} \qquad (2)$$

y dedujimos esta expresión considerando que la masa del sistema es constante. Sin embargo, esta expresión del segundo principio es más general que $\vec{F}^{ext} = m\vec{a}$ [1] y es válida aun cuando la masa del sistema es variable[2]. De acuerdo a esto, el segundo principio de Newton va a escribirse, en forma más general:

$$\vec{F}^{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}^{ext}}{m} - \frac{\vec{v}}{m}\frac{dm}{dt} \qquad (33)$$

es decir, la aceleración que experimenta el sistema se debe, no solo a las fuerzas externas aplicadas sobre él, sino también a los cambios de su masa.

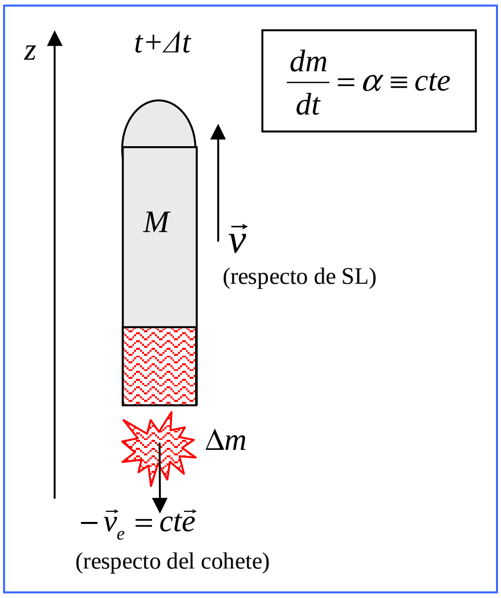
–

[1] En rigor, el segundo principio de Newton es un caso particular de (2).

[2] Esto se aplica, incluso, en el caso de la Relatividad Especial.

Ejemplo 4: Dinámica de un cohete. Vamos a discutir cómo hace un cohete en el espacio exterior para propulsarse. Un cohete es un proyectil que, en vez de recibir un impulso inicial, va ganando impulso lineal debido principalmente a la expulsión de gases que se producen en la cámara de combustión del cohete.

Supongamos un cohete, que parte de la Tierra con una velocidad $\vec{v}_0$, y cuya masa $M=M(t)$ va variando con el tiempo debido a la expulsión de los gases. La masa del cohete inicialmente es M_0 y dispone de una masa total de combustible m. Sea $\vec{v}$ la velocidad del cohete *respecto de la Tierra* (sistema laboratorio SL), y $(-\vec{v}_e)$, la velocidad de escape, constante, de los gases *respecto del cohete*. Entonces, respecto de SL:



$$\vec{v}_g = -\vec{v}_e + \vec{v} \quad \text{(SL)}$$

Supongamos que todo el movimiento se realiza en una única dirección (z). Si bien la expulsión de los gases se realiza en forma continua, vamos a proceder, en principio, como si en cada Δt el cohete expulsara una cierta cantidad Δm de gas.

En un cierto instante t, antes de expulsar la masa Δm de gases, el impulso del sistema es:

$$\vec{p}_i = (M + \Delta m)\vec{v} \tag{34}$$

Luego de expulsar la masa Δm de gases, en $t+\Delta t$:

$$\begin{aligned} \vec{p}_f &= M(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m\vec{v}_g \\ &= M\vec{v} + M\Delta\vec{v} + \Delta m(\vec{v} - \vec{v}_e) \\ &= (M + \Delta m)\vec{v} + M\Delta\vec{v} - \Delta m\vec{v}_e \end{aligned} \tag{35}$$

donde $\Delta\vec{v}$ es el incremento de la velocidad del cohete al haber variado su masa en Δm.

La variación del impulso lineal es:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = M\Delta\vec{v} - \Delta m\vec{v}_e \tag{36}$$

Para considerar que los gases son expulsados en forma continua, dividimos la expresión (36) por Δt y hacemos tender Δt a cero:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e \frac{dm}{dt} \tag{37}$$

De acuerdo a la expresión (2):

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e \frac{dm}{dt} \tag{38}$$

En el caso del cohete, la fuerza externa actuante puede ser la fuerza gravitatoria de algún cuerpo celeste. Supongamos, por simplicidad, que nuestro cohete se encuentra en el espacio, lejos de toda influencia gravitatoria. En ausencia de fuerzas externas, el impulso lineal del sistema ($M+\Delta m$) (cohete+gases expulsados) se conserva:

$$\vec{0} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e \frac{dm}{dt} \Rightarrow M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_e \frac{dm}{dt} \tag{39}$$

El término $\vec{v}_e \frac{dm}{dt}$ se denomina *empuje de cohete*, y es igual a la “fuerza” que actúa sobre el cohete debido al escape de los gases. Aun cuando el cohete esté libre de fuerzas externas, adquiere una aceleración debido a su empuje. La cantidad $\frac{dm}{dt} \equiv \alpha$ es el *flujo de masa* e indica cómo va variando la masa del cohete (por la expulsión de los gases) con el tiempo. Esta cantidad es propia del diseño del cohete y, en general, podemos considerarla constante.

Para encontrar cómo varía la velocidad del cohete con el tiempo, debemos resolver la ecuación (39). Teniendo en cuenta que el movimiento es unidimensional:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{M(t)} v_e \frac{dm}{dt} = \frac{1}{M(t)} v_e \alpha \tag{40}$$

Sin embargo, aún nos resta saber cómo varía *M(t)*. Para ello, consideremos:

- Al tiempo t, la masa del cohete es ($M+\Delta m$)
- Al tiempo $t+\Delta t$, la masa del cohete es M

Con estos datos, nos “fabricamos” la derivada:

$$\frac{dM}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = -\alpha \tag{41}$$

Integrando:

$$M(t) = M_0 - \alpha t \tag{42}$$

Notemos que la ecuación (42) nos dice lo que sabíamos desde el principio: la masa del cohete disminuye de la misma manera que aumenta la masa de gas expulsado.

Conociendo *M(t)*, ahora podemos integrar la ecuación (40):

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t \frac{\alpha v_e}{M_0 - \alpha t} dt \qquad (43)$$

Resulta, finalmente:

$$v(t) = v_0 + v_e \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - \alpha t}\right) = v_0 + v_e \ln\left(\frac{M_0}{M(t)}\right) \qquad (44)$$

Podemos aún averiguar cuál va a ser la velocidad final v_f del cohete. Teniendo en cuenta que, aproximadamente, el 90% de la masa total del cohete es combustible, entonces:

$$v_f \cong v_0 + v_e \ln \frac{M_o}{M_f} = v_0 + v_e \ln \frac{M_o}{M_0/10}$$

$$v_f \cong v_0 + 2.3 v_e \qquad (45)$$

Se observa que, debido a la conservación del impulso lineal, cuanto mayor sea la velocidad con la que son expulsados los gases, mayor será la velocidad que alcance el cohete.