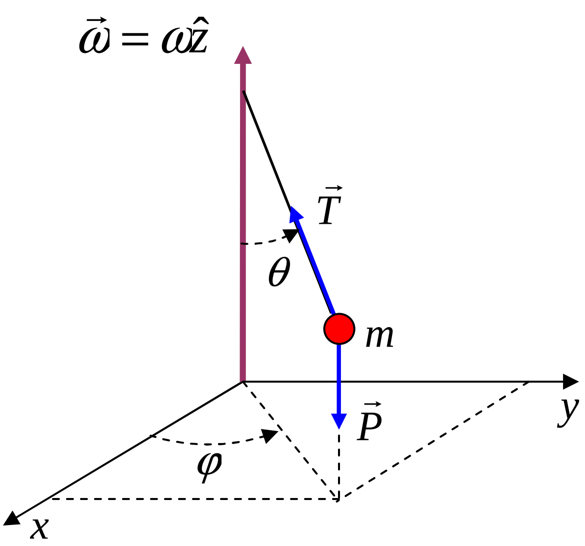
Tema avanzado: El péndulo de Foucault

En 1851, el físico francés Bernard León Foucault emplazó un péndulo de grandes dimensiones bajo la cúpula del Panteón de París, para comprobar el movimiento de rotación de la Tierra en torno a su eje y mostrar así que la Tierra constituye un sistema de referencia no inercial. El péndulo, de una longitud de 70 m y una masa de 28 kg, oscilaba sobre una superficie cubierta de arena, y poseía una aguja metálica colocada en la parte inferior de la “lenteja”, con la que barría la arena en cada oscilación. Se vio de esta manera que el plano de oscilación del péndulo rotaba en sentido horario (por encontrarse en el hemisferio norte) y, (en París), completaba una vuelta en aproximadamente 32 hs.

El plano de oscilación de un péndulo, como sabemos, es único, visto desde un sistema inercial. Si ubicáramos el péndulo de Foucault en el Polo Norte, y lo observáramos desde un SI, veríamos que el péndulo oscila en un único plano y la Tierra rota bajo él, completando una vuelta en aproximadamente 24 hs. Por el contrario, un observador no inercial, fijo a la Tierra, vería que el plano de oscilación del péndulo rota en sentido contrario al sentido de rotación terrestre, dando una vuelta cada 24 hs.

➢ Estudiemos, entonces, el movimiento del péndulo de Foucault. Para simplificar, supongamos que emplazamos dicho péndulo en el Polo Norte (de considerarlo emplazado en cualquier otra ubicación, lo único que cambia es que se debe considerar la componente del vector rotación terrestre en la dirección de la vertical del lugar, es decir, afectada por la latitud). Nos ubicamos en el SR de la Tierra. Para simplificar la notación, vamos a usar variables *sin primar* en el SR.



Vamos a suponer que la longitud del hilo, l, es mucho más larga que la distancia z de la lenteja a la superficie (x, y). Es decir, $z << l$

Esta condición nos permite despreciar las variaciones de la altura z en el movimiento del péndulo y, por lo tanto, considerar:

$\dot{z} \cong 0$ y $\ddot{z} \cong 0$.

Escribamos las fuerzas de interacción y las de inercia que intervienen en el SR, en componentes:

$$\vec{T} = T\cos\theta\,\hat{z} - Tsen\theta\cos\varphi\,\hat{x} - Tsen\theta\,sen\varphi\,\hat{y}$$

$$\vec{P} = -mg\,\hat{z}$$

$$\vec{f}^{\,*}_{Cf} = m\omega^2\vec{r}_\perp = m\omega^2(x\hat{x} + y\hat{y})$$

$$\begin{aligned}\vec{f}^{\,*}_{C} &= 2m(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z})\times\omega\,\hat{z} = \\ &= -2m\omega\dot{x}\hat{y} + 2m\omega\dot{y}\hat{x}\end{aligned}$$

Las ecuaciones dinámicas resultan:

$$\begin{aligned} x)\,\ddot{x} &= \frac{T_x}{m} + 2\omega\dot{y} + \omega^2 x \\ y)\,\ddot{y} &= \frac{T_y}{m} - 2\omega\dot{x} + \omega^2 y \\ z)\,\ddot{z} &= \frac{T_z}{m} - g = 0 \end{aligned} \tag{5.70}$$

Para escribir las expresiones en cartesianas, consideremos:

$$\cos\theta = \frac{l-z}{l} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$sen\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l} \qquad sen\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación dinámica en z:

$$z)\,\frac{T}{m}\left(\frac{l-z}{l}\right) - g = 0 \;\Rightarrow\; \frac{T}{m} = \frac{gl}{l-z} \tag{5.71}$$

Con lo que, las restantes:

$$\begin{aligned} x)\,\ddot{x} &= -\frac{gl}{l-z}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\omega\dot{y} + \omega^2 x = -\frac{g}{l-z}x + 2\omega\dot{y} + \omega^2 x \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{l-z}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2\omega\dot{x} + \omega^2 y = -\frac{g}{l-z}y - 2\omega\dot{x} + \omega^2 y \end{aligned} \tag{5.72}$$

Considerando que $z << l$, resulta finalmente:

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= \left(\omega^2 - \frac{g}{l}\right)x + 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} &= \left(\omega^2 - \frac{g}{l}\right)y - 2\omega\dot{x} \end{aligned}} \tag{5.73}$$

El factor $\frac{g}{l} = \omega_o^2$ es justamente la frecuencia propia del péndulo, elevada al cuadrado. Reemplazamos, entonces, en las ecuaciones dinámicas (5.73):

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \left(\omega^2 - \omega_o^2\right)x + 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} &= \left(\omega^2 - \omega_o^2\right)y - 2\omega\dot{x} \end{aligned} \tag{5.74}$$

Hemos obtenido dos ecuaciones de movimiento *acopladas* en *x* e *y*. Para resolverlas, introducimos la siguiente variable compleja:

$$u = x + iy$$

de tal manera que $x(t) = \mathrm{Re}\, u(t)$ e $y(t) = \mathrm{Im}\, u(t)$

Multiplicando la segunda ecuación por la unidad imaginaria *i*, y sumando ambas ecuaciones, resulta:

$$\ddot{u} = (\omega^2 - \omega_o^2)u - 2i\omega\dot{u} \;\Rightarrow\; \ddot{u} + 2i\omega\dot{u} + (\omega_o^2 - \omega^2)u = 0 \tag{5.75}$$

Esta es, otra vez, una ecuación diferencial de Euler, como las que hemos resuelto en el capítulo de Oscilaciones. Como siempre, proponemos como solución:

$$u \approx e^{\lambda t}$$

con lo que, la ecuación característica resulta:

$$\lambda^2 + 2i\omega\lambda + (\omega_o^2 - \omega^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-2i\omega \pm \sqrt{-4\omega^2 - 4(\omega_o^2 - \omega^2)}}{2}$$

$$\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = -i(\omega \pm \omega_o) \tag{5.76}$$

La solución es, entonces:

$$\begin{aligned} u(t) &= Ae^{-i\alpha}e^{-i(\omega+\omega_o)t} + Be^{-i\beta}e^{-i(\omega-\omega_o)t} \\ &= Ae^{-i[(\omega+\omega_o)t+\alpha]} + Be^{-i[(\omega-\omega_o)t+\beta]} \end{aligned} \tag{5.77}$$

donde hemos considerado que las constantes de integración pueden ser complejas y las hemos escrito con la notación $\rho\, e^{i\varphi}$. Quedan, entonces, cuatro constantes de integración: *A*, *B*, α *y* β. Notar que, con la notación usada, *A* y *B* son reales. Si ahora consideramos las partes real e imaginaria de $u(t)$, obtenemos $x(t)$ e $y(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\; u(t) = A\cos[(\omega + \omega_o)t + \alpha] + B\cos[(\omega - \omega_o)t + \beta] \\ y(t) &= \mathrm{Im}\; u(t) = -Asen[(\omega + \omega_o)t + \alpha] - Bsen[(\omega - \omega_o)t + \beta] \end{aligned}} \tag{5.78}$$

Las componentes de la velocidad en el SR serán, entonces:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -A(\omega+\omega_o)sen[(\omega+\omega_o)t+\alpha] - B(\omega-\omega_o)sen[(\omega-\omega_o)t+\beta] \\ \dot{y}(t) &= -A(\omega+\omega_o)\cos[(\omega+\omega_o)t+\alpha] - B(\omega-\omega_o)\cos[(\omega-\omega_o)t+\beta]\end{aligned} \qquad (5.79)$$

➢ Vamos a considerar condiciones iniciales para determinar las constantes. Sean, por ejemplo:

$$\begin{aligned}&1)\ x(t=0)=0 \\ &2)\ y(t=0)=0 \\ &3)\ \dot{x}(t=0)=0 \\ &4)\ \dot{y}(t=0)=v_o\end{aligned} \qquad (5.80)$$

Es decir, a $t=0$, el péndulo parte desde el origen con una velocidad dirigida en la dirección y *del SR*, $\vec{v}=v_o\hat{y}$. Entonces:

$$\begin{aligned}&1)\ x(0) = A\cos\alpha + B\cos\beta = 0 \\ &2)\ y(0) = -Asen\alpha - Bsen\beta = 0 \\ &3)\ \dot{x}(0) = -A(\omega+\omega_o)sen\alpha - B(\omega-\omega_o)sen\beta = 0 \\ &4)\ \dot{y}(0) = -A(\omega+\omega_o)\cos\alpha - B(\omega-\omega_o)\cos\beta = v_o\end{aligned}$$

De las dos primeras condiciones resulta:

$$\left.\begin{aligned}&2)\ Asen\alpha = -Bsen\beta \\ &1)\ A\cos\alpha = -B\cos\beta\end{aligned}\right\} \Rightarrow tg\alpha = tg\beta \Rightarrow \begin{cases}\beta=\alpha \\ \beta = \alpha+\pi\end{cases}$$

Podemos elegir cualquiera de las dos soluciones (eso determina cuánto valen *A* y *B*). Elegimos, por ejemplo, $\beta=\alpha$; entonces resulta:

$$B=-A$$

Introduciendo estos resultados en las últimas dos condiciones:

$$\begin{aligned}&3)\ \dot{x}(0) = -A(\omega+\omega_o)sen\alpha + A(\omega-\omega_o)sen\alpha = 0 \\ &4)\ \dot{y}(0) = -A(\omega+\omega_o)\cos\alpha + A(\omega-\omega_o)\cos\alpha = v_o\end{aligned}$$

En la primera:

$$\begin{aligned}&3)\ \dot{x}(0) = A(\omega-\omega_o-\omega-\omega_o)sen\alpha = 0 \\ &\quad \dot{x}(0) = A(-2\omega_o)sen\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 0}\end{aligned}$$

ya que la solución $A=0$ no es aceptable. Entonces:

$$\begin{aligned}&4)\ -A(\omega+\omega_o)+A(\omega-\omega_o) = v_o \\ &\quad A(-\omega-\omega_o+\omega-\omega_o) = v_o \\ &\quad A(-2\omega_o) = v_o \qquad \Rightarrow \quad \boxed{A = -\frac{v_o}{2\omega_o}}\end{aligned}$$

Finalmente resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= -\frac{v_o}{2\omega_o}\cos[(\omega_o+\omega)t]+\frac{v_o}{2\omega_o}\cos[(\omega-\omega_o)t] \\ y(t) &= \frac{v_o}{2\omega_o}sen[(\omega_o+\omega)t]-\frac{v_o}{2\omega_o}sen[(\omega-\omega_o)t] \end{aligned}} \qquad (5.81)$$

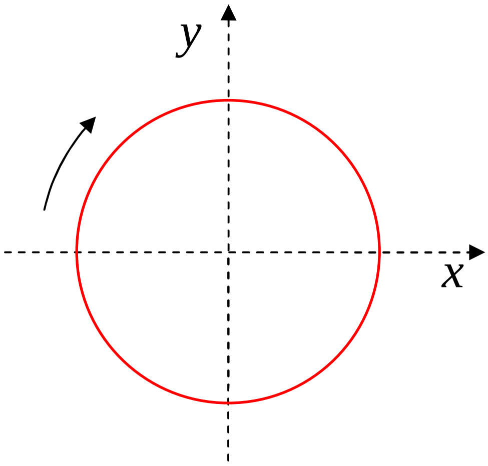
➢ Vemos que el movimiento resultante es la composición de dos movimientos circulares, de frecuencias $\omega_+ = (\omega_o + \omega)$ y $\omega_- = (\omega - \omega_o)$. Considerando que $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ y que $sen\alpha = sen(-\alpha)$, re-escribamos el resultado obtenido, ecs.(5.81), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{v_o}{2\omega_o}\cos[(-\omega_o-\omega)t]+\frac{v_o}{2\omega_o}\cos[(\omega_o-\omega)t] \\ y(t) &= -\frac{v_o}{2\omega_o}sen[(-\omega_o-\omega)t]+\frac{v_o}{2\omega_o}sen[(\omega_o-\omega)t] \end{aligned} \qquad (5.82)$$

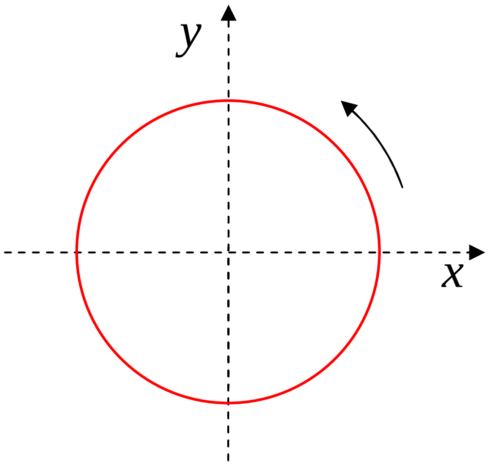
Vamos a interpretar este resultado. Supongamos que $\omega = 0$, es decir, observamos el movimiento desde un SI. Desde el SI, el movimiento del péndulo es el movimiento armónico que ya conocemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{v_o}{2\omega_o}\cos(-\omega_o t)+\frac{v_o}{2\omega_o}\cos(\omega_o t) = 0 \\ y(t) &= -\frac{v_o}{2\omega_o}sen(-\omega_o t)+\frac{v_o}{2\omega_o}sen(\omega_o t) = \frac{v_o}{\omega_o}sen(\omega_o t) \end{aligned} \qquad (5.83)$$

Notemos, sin embargo, que el movimiento resultante puede pensarse como la combinación de dos movimientos circulares opuestos:



$$x_1(t) = -\frac{v_o}{2\omega_o}\cos(-\omega_o t)$$
$$y_1(t) = -\frac{v_o}{2\omega_o} sen(-\omega_o t)$$



$$x_2(t) = \frac{v_o}{2\omega_o}\cos(\omega_o t)$$
$$y_2(t) = \frac{v_o}{2\omega_o} sen(\omega_o t)$$

Esto es general: un movimiento armónico siempre puede considerarse como la superposición de dos movimientos circulares opuestos. Si ahora nos paramos sobre el sistema de referencia que rota con velocidad angular ω (la Tierra), ambos movimientos circulares van a seguir viéndose como tales, pero con velocidades angulares modificadas, ya que debe restarse en el SR la velocidad angular de éste, ω (cf. con el *Ejemplo 4b*):

$$x_1'(t) = -\frac{v_o}{2\omega_o}\cos[(-\omega_o - \omega)t]$$

$$y_1'(t) = -\frac{v_o}{2\omega_o} sen[(-\omega_o - \omega)t]$$

y

$$x_2'(t) = \frac{v_o}{2\omega_o}\cos[(\omega_o - \omega)t]$$

$$y_2'(t) = \frac{v_o}{2\omega_o} sen[(\omega_o - \omega)t]$$

donde hemos usado variables primadas para recalcar que estamos parados en el SR. Si ahora sumamos estos dos movimientos, re-obtenemos la solución que encontramos para el péndulo en el SR, ecs.(5.82):

$$x(t) = x_1'(t) + x_2'(t) = -\frac{v_o}{2\omega_o}\cos[(-\omega_o - \omega)t] + \frac{v_o}{2\omega_o}\cos[(\omega_o - \omega)t]$$

$$y(t) = y_1'(t) + y_2'(t) = -\frac{v_o}{2\omega_o} sen[(-\omega_o - \omega)t] + \frac{v_o}{2\omega_o} sen[(\omega_o - \omega)t]$$