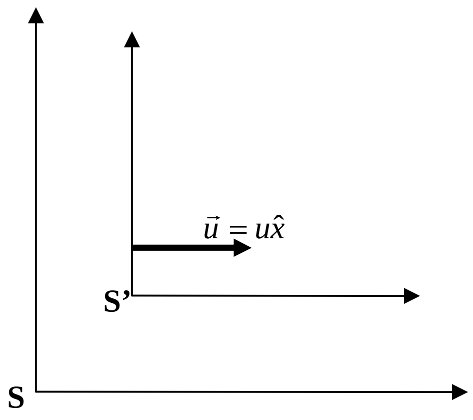
10. TEORÍA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Una introducción necesaria

- Hasta el siglo XIX, el espacio y el tiempo se concebían como **absolutos,** es decir, independientes de todo e independientes entre sí: un espacio absoluto, homogéneo, infinito y continuo. El tiempo, asimismo, discurre uniformemente para todo observador en cualquier sistema de referencia (SR). Esto hace que el concepto de **simultaneidad** también sea absoluto: dos sucesos simultáneos en un SR, lo serán también en cualquier otro SR.

- Sin embargo, se conocía un <u>*Principio de Relatividad*</u>: todas las leyes de la naturaleza son las mismas en todos los sistemas inerciales (SI): las ecuaciones que expresan leyes naturales toman la misma forma en cualquier sistema inercial. Vamos a hacer una aclaración. Se denomina **invariante** a toda magnitud cuyo valor no cambie cualquiera sea el SI desde el cual se la mida. Así (en mecánica clásica), el tiempo y la masa son invariantes. Otras magnitudes, como el impulso lineal o la energía cinética, en cambio son **relativas al SI.** Sin embargo, si bien cambian de magnitud, no cambian su forma al pasar de un SI a otro. Se llaman **covariante** a toda expresión matemática que conserva su forma cuando se le aplica una determinada transformación de coordenadas. Y esto nos lleva al <u>*Principio de Relatividad*</u>: las leyes de la mecánica clásica son covariantes frente a una transformación de Galileo. Por ejemplo, el teorema trabajo-energía cinética:



$$dW' = \vec{F}' \cdot d\vec{r}'$$

$$dW' = m\dot{\vec{v}}' \cdot (d\vec{r} - \vec{u}dt) = m\dot{\vec{v}}' \cdot (\vec{v}dt - \vec{u}dt) =$$

$$= m\dot{\vec{v}}' \cdot (\vec{v} - \vec{u})dt = m\dot{\vec{v}}' \cdot \vec{v}'dt =$$

$$= m\frac{d\vec{v}'}{dt} \cdot \vec{v}'dt = m\vec{v}' \cdot d\vec{v}'$$

Como:

$$dv'^2 = d(\vec{v}' \cdot \vec{v}') = \vec{v}' \cdot d\vec{v}' + d\vec{v}' \cdot \vec{v}' = 2\vec{v}' \cdot d\vec{v}'$$

Entonces:

$$\Rightarrow dW' = \frac{1}{2}mdv'^2 = dT'$$

- Esto tiene una consecuencia inmediata: si las leyes adoptan la misma forma en cualquier SI, dados dos SI y un mismo suceso ocurriendo en ambos, bajo las mismas condiciones iniciales respecto de ambos, el resultado en ambos SI es exactamente el mismo. Esto nos conduce a la **indistinguibilidad de los SI**: no hay forma de distinguir un SI de otro. Esto también significa que **no existe ningún sistema privilegiado** (por ejemplo, en reposo absoluto).

- *Un problema con la propagación de las interacciones.* La interacción entre las partículas, según Newton, cumple el principio de acción y reacción:

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

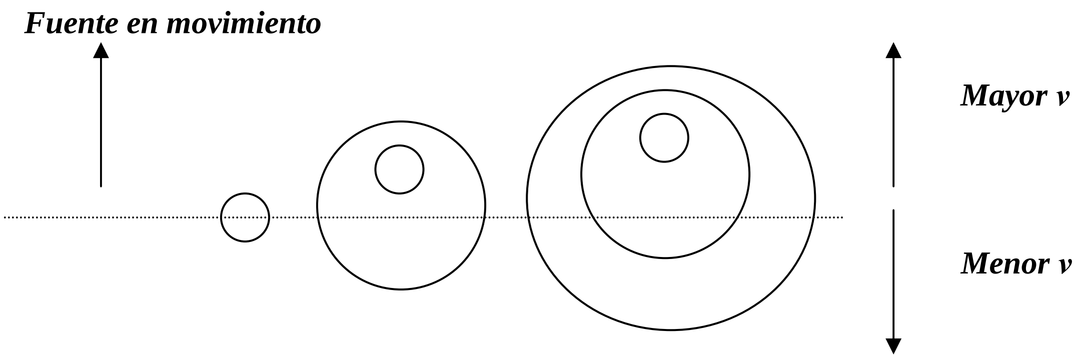
Esta ecuación presupone que las interacciones son instantáneas, es decir, que la información se propaga de una partícula a la otra en forma instantánea. Es decir que, por ejemplo, un cambio en la posición de una partícula repercute inmediatamente en la otra. O sea, que la velocidad con la que se propaga la información de una partícula a la otra es **infinita**. Sin embargo, la experiencia muestra que no existen interacciones instantáneas: una mecánica basada en la hipótesis de la propagación instantánea de la interacción no puede ser correcta. En realidad, si en una de las partículas en interacción se produce un cambio, éste influirá en la otra después de un Δt. Dividiendo la distancia entre ambas partículas (L) por ese Δt, podemos determinar sencillamente la velocidad con la que se propagó la información de una a otra. De las cuatro interacciones fundamentales, se encuentra que la que se propaga a **mayor velocidad** es la electromagnética, y esta velocidad **máxima** de propagación de la interacción/información es:

$c = 2{,}99793 \times 10^{10}$ cm/s

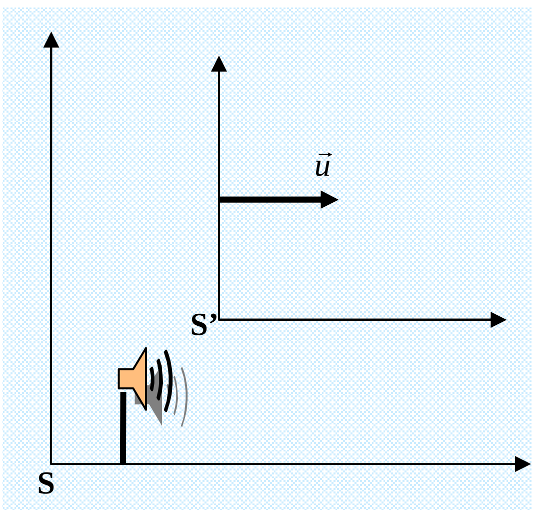
O sea, la *velocidad de la luz*.

- Ahora bien, juntando esto con el principio de relatividad, si esta velocidad es máxima en un SI, va a ser máxima también en cualquier SI. Como los SI son indistinguibles, esta velocidad va a tener el mismo valor en cualquier SI, o sea, va a ser **invariante,** es decir, una **constante universal**.

- Veamos qué problema surgió con las ondas electromagnéticas (luz). Una onda es una perturbación que se propaga en el espacio (por ejemplo, el sonido, o cuando arrojamos una piedra en un estanque). La *velocidad de propagación de una onda depende de las características mecánicas del medio* en el que se propaga y *no de la velocidad de la fuente respecto del medio*. Así, por ejemplo, se da un fenómeno muy curioso como el **efecto Doppler**, es decir, el aparente cambio de frecuencia de una onda producida por el movimiento relativo de la fuente respecto del observador. Así, si la fuente avanza hacia el observador, se produce una "acumulación" de frentes de onda que el observador percibe como una mayor frecuencia. Si la fuente se aleja, los frentes de onda se perciben más espaciados, es decir, a menor frecuencia.



- Antiguamente se pensaba que cualquier onda necesitaba un medio para propagarse. La luz, por ejemplo, puede propagarse en aire, o en agua, o en cualquier medio transparente, pero ¿qué pasaba, por ejemplo con la luz que nos llegaba del Sol o de alguna otra estrella? Entonces se supuso que existía un medio que debía llenar todo el espacio. A este medio se lo llamó **éter**. Este medio debía ser, justamente, muy "etéreo", ya que no era percibido por nuestros sentidos, ni producía amortiguamiento en la intensidad de las ondas luminosas. Muchas experiencias se hicieron para determinar sus propiedades, todas con resultados infructuosos. Una de estas experiencias, que fue clave, fue la experiencia que hicieron Michelson y Morley para determinar la velocidad del supuesto éter respecto de la Tierra.
- Supongamos un SI (S), en el cual el medio en el que se propaga la onda está en reposo, y un SI (S') en movimiento respecto del primero. Supongamos una fuente de sonido en reposo en el sistema S.

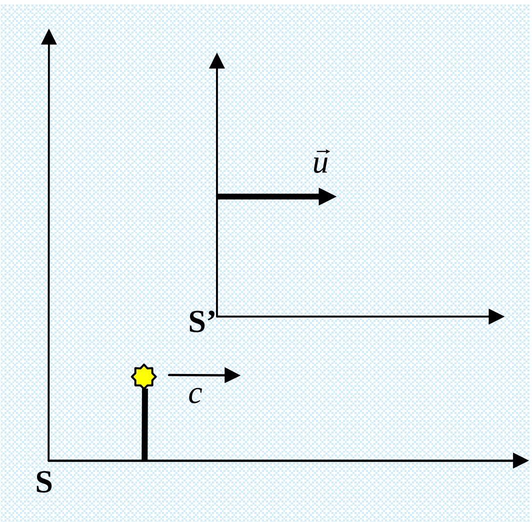


En S: hacia adelante => v_s
hacia atrás => $-v_s$

En S': hacia adelante => v_s-u
hacia atrás => $-(v_s+u)$

Esta relación se cumplía bastante bien para el sonido ($v_s <<< c$). Sin embargo, si se hace esta experiencia con la luz, en S y S', ¡la velocidad de propagación que se mide es c! ¿Cuál podía ser la interpretación de este resultado? ¿Acaso la Tierra arrastraba al éter en su movimiento? Esto era un poco confuso, porque, además, si se medía la velocidad de la luz viajando en direcciones perpendiculares entre sí (por ejemplo, según un paralelo y un meridiano[1]) también siempre se medía el mismo valor c**.**

- A todo esto, un físico escocés, James Clerk Maxwell, desarrolla un conjunto de ecuaciones que contienen todo la teoría electromagnética. Estas ecuaciones, sumamente precisas, permiten demostrar que las ondas electromagnéticas pueden propagarse… ¡en el vacío! No hacía falta un éter, pero eso complicaba aún más las cosas. Volvamos a mirar la experiencia anterior:



Tanto en **S** como en **S',** hacia delante o hacia atrás:
¡*c*! Como la Tierra no puede arrastrar al vacío,
=> **Consecuencia:** ***la luz se propaga a la misma velocidad c vista desde cualquier SI***

- Como c es, además la velocidad máxima de propagación de las interacciones, entonces ésta es también independiente del SI: nada que lleve información puede propagarse a una velocidad mayor que c.
- Y, finalmente, surgió otro problema: al aplicar las transformaciones de Galileo a las ecuaciones de Maxwell, éstas no resultaban covariantes. Además, se predecían fenómenos no observables en la realidad.
- Surgió entonces un matemático, Hendrik Lorentz, que, como un ejercicio puramente académico, quiso encontrar bajo qué transformaciones las ecuaciones de Maxwell

[1] Esto fue lo que constituyó el experimento de Michelson y Morley.

resultaban covariantes. El resultado de este “ejercicio académico” fueron las *transformaciones de Lorentz*.

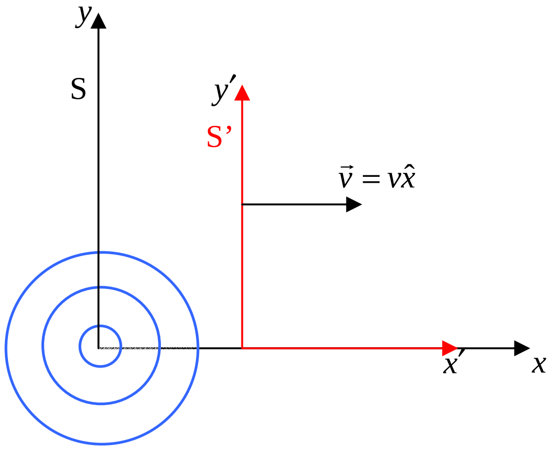
Principios de la Relatividad Especial

- Recién acá entra Albert Einstein en la historia. Se da cuenta de que esta transformación no podía ser un mero ejercicio académico, junta todos los cabos sueltos y enuncia, en una publicación memorable “Sobre la electrodinámica de los cuerpos” (1905), su Teoría Especial de la Relatividad, basada en dos principios:
    - *Principio de Relatividad*: todos los SI de referencia son físicamente equivalentes (nuestro viejo principio de Relatividad)
    - La luz se propaga en vacío con una velocidad *c* finita que es totalmente independiente de toda condición (en particular, del estado de movimiento de los SI). Con esto último, viene aparejado que la *velocidad máxima de propagación de las interacciones/información es finita e independiente del estado de movimiento del SI*.

Y, claro, estos principios modifican sustancialmente la concepción clásica del espacio y del tiempo, produciendo importantes cambios, por ejemplo, en los conceptos de simultaneidad, temporal o espacial.

Transformaciones de Lorentz

- Si las transformaciones de Galileo ya no servían, entonces las leyes físicas debían ser covariantes frente a una nueva transformación. Éstas son las *transformaciones de Lorentz*. Vamos a encontrarlas.
- Sean dos sistemas inerciales S y S’ tal que S’ se mueve con $\vec{v} = v\hat{x}$ respecto de S. Supongamos que en el instante inicial los orígenes de ambos sistemas coinciden ($t=t'=0$). En ese instante, se emite una señal luminosa que se propaga en todas direcciones (frente de ondas esférico):



En S:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{10.1}$$

En S':

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

De acuerdo a la transformación de Galileo:

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t \tag{10.2}$$

Si aplicamos la transformación de Galileo en S':

$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \quad \Rightarrow \quad \text{¡no va!}$$

Como c es el mismo en ambos sistemas, hay que cambiar alguna otra magnitud. Como quiero ver qué transformación me lleva de uno al otro, vamos a proponer una transformación con parámetros libres, pero no demasiado diferente de la anterior:

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma(t + a\,x)$$

Entonces:

$$\gamma^2(x^2 - 2xvt + v^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2(t^2 + 2tax + a^2x^2)$$

Agrupando todos los términos convenientemente, quiero ver que los términos lineales se anulen:

$$\gamma^2(1 - c^2a^2)x^2 - 2\gamma^2tx(v + c^2a) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\gamma^2$$

Para hacer desaparecer el término lineal: $v + ac^2 = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{v}{c^2}$

Entonces:

$$\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x^2 - 2\gamma^2tx(\underbrace{v + c^2a}_{=0}) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\gamma^2$$

Para obtener (10.1), hacemos $\gamma^2 = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$

Con lo cual, resulta:

$$x' = \frac{x - vt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{10.3}$$

Las transformaciones inversas se obtienen considerando que, si el sistema S' se mueve respecto de S con velocidad $\vec{v} = v\hat{x}$, entonces el sistema S se mueve respecto de S' con $\vec{v}' = -v\,\hat{x}'$. Es decir, cambiando *v* por –*v*:

$$x = \frac{x' + vt'}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

Generalmente, se usan los parámetros $\beta = \frac{v}{c} < 1$ y $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2} > 1$

Entonces:

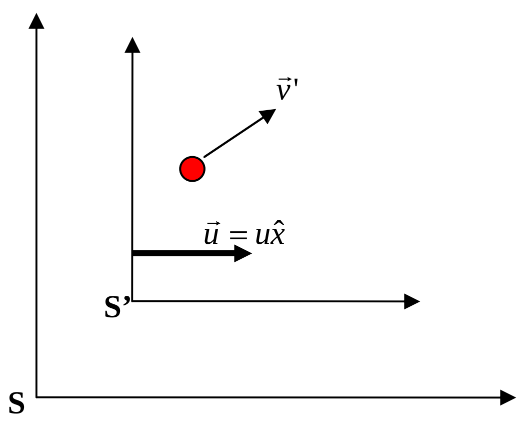
$$x' = \gamma(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \tag{10.4}$$

y la transformación inversa:

$$x = \gamma(x' + vt') \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \tag{10.5}$$

Transformación de velocidades

Supongamos dos SI, S y S', tal que S' se mueve respecto de S con velocidad $\vec{u} = u\hat{x}$. Sea una partícula que se está moviendo con velocidad $\vec{v}'$ respecto del sistema S'. Queremos averiguar qué velocidad de la partícula mide un observador en el sistema S.



$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt'}\hat{x}' + \frac{dy'}{dt'}\hat{y}' + \frac{dz'}{dt'}\hat{z}'$ en S',
con (*x'*,*y'*,*z'*,*t'*)

$\vec{u} = u\hat{x} \equiv$ velocidad de S' respecto de S

$$\gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2} \qquad \beta = \frac{u}{c}$$

Es importante recalcar que cada observador mide sus propias coordenadas (y por coordenadas, entendemos, no solo las coordenadas espaciales, sino también la coordenada temporal).

Entonces, en el sistema S, la velocidad de la partícula es:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} \qquad \text{con } (x,y,z,t) \text{ en S}$$

Mientras que, en S':

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt'}\hat{x}' + \frac{dy'}{dt'}\hat{y}' + \frac{dz'}{dt'}\hat{z}' \qquad \text{con } (x',y',z',t') \text{ en S'}$$

Para relacionar las coordenadas en ambos SI, usamos las transformaciones de Lorentz, ec.(10.5):

$$x = \gamma(x' + ut') \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \gamma(t' + \frac{\beta}{c}x')$$

Diferenciamos las transformaciones de Lorentz:

$$dx = \gamma(dx' + udt') \qquad dy = dy' \qquad dz = dz' \qquad dt = \gamma(dy' + \frac{\beta}{c}dx')$$

Entonces:

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + udt')}{\gamma(dt' + \frac{\beta}{c}dx')} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + u}{1 + \frac{\beta}{c}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{\beta}{c}v'_x}} \qquad (10.6)$$

$$\boxed{v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(dt' + \frac{\beta}{c}dx')} = \frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{\beta}{c}v'_x)}} \qquad (10.7)$$

$$\boxed{v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma(dt' + \frac{\beta}{c}dx')} = \frac{v'_z}{\gamma(1 + \frac{\beta}{c}v'_x)}} \qquad (10.8)$$

Notemos que, contrariamente a lo que sucede con la transformación de Galileo, v_y y v_z también cambian, ya que el tiempo cambia al pasar de un sistema de referencia a otro.

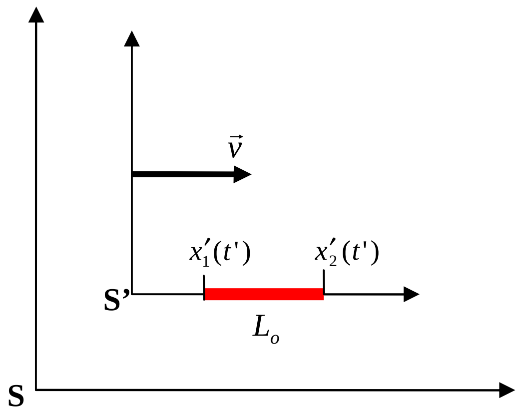
- Las componentes inversas se obtienen cambiando β por $-\beta$.
- Veamos un ejemplo. ¿Cómo se vería el movimiento de un fotón en S si en S' $\vec{v}' = c\hat{x}'$?

$$v_x = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c^2}c} = c \qquad v_y = 0 \qquad v_z = 0$$

- Vamos a ver algunas consecuencias de la teoría. Para ello, supongamos nuevamente que tenemos dos SI, S y S', tal que S' se está moviendo respecto de S con velocidad $\vec{v} = v\hat{x}$:

Contracción de la longitud (contracción de Lorentz-Fitzgerald)

- Supongamos que tenemos una regla que se encuentra en reposo en el sistema S'. Queremos determinar su longitud, medida en ambos sistemas. ¿Cómo hacemos? Para ello tenemos que medir la posición de ambos extremos *simultáneamente*.
- En el sistema S', la regla está en reposo y por lo tanto, nuestras mediciones de las posiciones *son independientes del tiempo*:



En **S',** la longitud de la regla será:

$$L_o = x_2' - x_1'$$

independiente del tiempo. La longitud en el sistema en el cual se encuentra en reposo, se denomina ***"longitud propia"***

- Ahora quiero medir la misma longitud, pero desde el sistema S. Aquí sí es importante medir la posición de ambos extremos *simultáneamente en mi sistema*, ya que la regla se está moviendo respecto de mí:

$$L = x_2(t) - x_1(t)$$

$x_2(t)$ y $x_1(t)$ **simultáneas en S** (es decir, medidas *al mismo tiempo en S*)

- Para ver la relación entre lo que mide el observador en S y el que está en S', consideremos la relación entre las posiciones medidas:

$$x_2' = \gamma(x_2 - vt)$$

$$x_1' = \gamma(x_1 - vt)$$

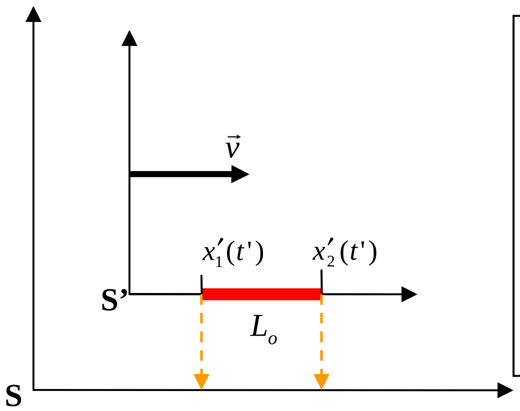
O sea:

$$L_o = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$$

$$\boxed{L = \frac{L_o}{\gamma} < L_o} \qquad (10.9)$$

La longitud de la regla en movimiento (L) se ve contraída respecto de la longitud de la regla en reposo (L_o=longitud propia). Esto es lo que se llama *"contracción de Lorentz-Fitzgerald"*.

- Lógicamente, esta contracción es recíproca, de lo contrario, habría una forma de diferenciar dos SIs
- Ahora hagamos algo distinto. Supongamos que desde S' parten **simultáneamente desde ambos extremos de la regla**, dos haces de luz que impactan en S:



Ambos haces parten de S' en *t'*, desde x_1' y x_2'.
En **S**:
$x_1 = \gamma(x_1' + vt')$
$x_2 = \gamma(x_2' + vt')$
Entonces:
$x_2 - x_1 = \gamma(x_2' - x_1') = \gamma L_o$

- ¿Qué pasó? Las mediciones simultáneas en S' **no resultan simultáneas en S,** es decir, x_1 y x_2 no están medidos simultáneamente en S:

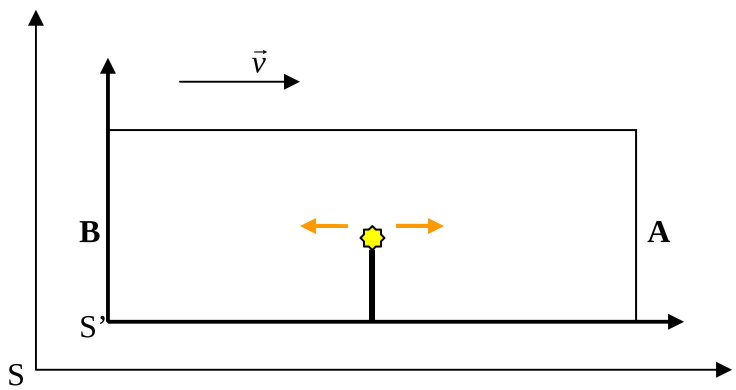
$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c} x_1'\right) \\ t_2 &= \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c} x_2'\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\gamma\beta}{c} L_o$$

<u>***Moraleja:***</u>

*Dos sucesos **simultáneos pero separados espacialmente** en un SI **no resultan simultáneos** en otro SI.*

- Esto significa que la simultaneidad **no es un concepto absoluto**. Observemos que sí pueden ser simultáneos si suceden en un mismo punto del espacio. Como vamos a ver, esto **no viola la causalidad**, es decir, si el suceso B es consecuencia del suceso A (es decir, ambos están vinculados causalmente), de tal manera que $t_B > t_A$ en un SI, esto se verifica para cualquier otro SI. La relación entre los tiempos solo puede invertirse si y solo si los sucesos ***no*** están vinculados causalmente

- Veamos en un ejemplo esta *"relatividad de la simultaneidad"*. Supongamos que en una nave espacial, un astronauta quiere calibrar dos relojes. Para ello, ubica un foco de luz exactamente en la mitad de la nave (de longitud propia L_o) y ambos relojes en cada una de las paredes opuestas. Supongamos que la nave es un SI S' que se está moviendo con $\vec{v} = v\hat{x}$ respecto de Tierra (sistema S). En el momento en que la posición del foco coincide con el origen del sistema S, lo enciende, y éste emite un haz de luz hacia ambos lados de la nave.



En la nave (**S'):**

$$\frac{L_o}{2} = ct' \quad \Rightarrow \quad t'_A = t'_B = \frac{L_o}{2c}$$

En la Tierra (**S**) se miden estos mismos tiempos:

$$t_A = \gamma(t'_A + \frac{\beta}{c}x'_A) = \gamma(t'_A + \frac{\beta}{c}\frac{L_o}{2})$$

$$t_B = \gamma(t'_B + \frac{\beta}{c}x'_B) = \gamma(t'_B - \frac{\beta}{c}\frac{L_o}{2})$$

$$t_A - t_B = \gamma(\underbrace{t'_A - t'_B}_{=0}) + \gamma\frac{\beta}{c}(\underbrace{x'_A - x'_B}_{L_o})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_A - t_B = \gamma\frac{\beta}{c}L_o}$$

O sea, los dos sucesos no son simultáneos en la Tierra (sistema S)

- Veámoslo de otra forma. Desde Tierra, las paredes de la nave se van moviendo. Cuando el foco se enciende, la pared de atrás se va acercando, mientras que la de adelante se aleja del haz de luz. Entonces:

$$ct_A = \frac{L}{2} + vt_A \Rightarrow t_A = \frac{L}{2(c-v)}$$

$$ct_B = \frac{L}{2} - vt_B \Rightarrow t_B = \frac{L}{2(c+v)}$$

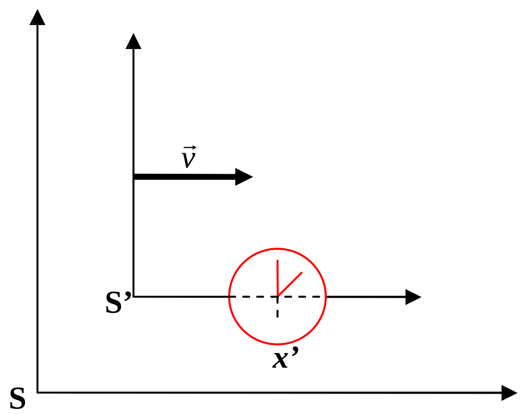
$$t_A - t_B = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v}\right) = \frac{L_o}{\gamma}\frac{v}{c^2 - v^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_A - t_B = \gamma\frac{\beta}{c}L_o}$$

Notemos que la longitud de la nave que se mide desde Tierra no es la longitud propia L_o, sino la longitud contraída $L = {L_o}/{\gamma}$. Aquí se ve que la relatividad de la simultaneidad es debida a la invariancia de ***c*.**

Dilatación del tiempo.

- Supongamos que un observador mide un intervalo de tiempo en un reloj en reposo respecto de él. Sea S’ el sistema en el cual este observador y su reloj se encuentran en reposo.

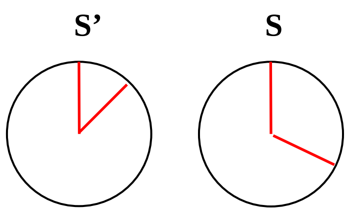


En **S’,** el intervalo de tiempo será:

$$\tau_o = t_2' - t_1'$$

independiente del punto del espacio (x’=cte). El intervalo de tiempo en el sistema en el cual el reloj se encuentra en reposo, se denomina ***“tiempo propio”*.**

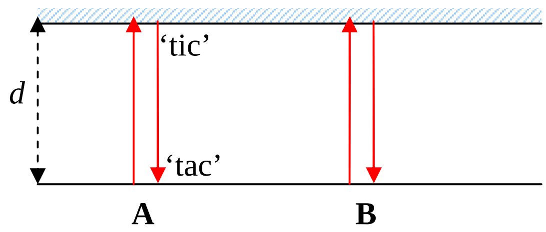
- En el sistema S, otro observador quiere medir el mismo intervalo. Veamos qué relación hay entre la medición que hace el observador en S con la que hizo el observador S’ (dueño del reloj). Para ello, consideremos la relación entre los tiempos medidos. (Notar que S se mueve con $\vec{v} = -v\hat{x}$ respecto de S’):



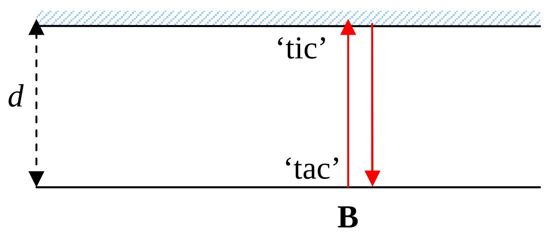
$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \gamma(t_1' + \frac{\beta}{c}x') \\ t_2 &= \gamma(t_2' + \frac{\beta}{c}x') \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma\tau_o > \tau_o} \tag{10.10}$$

Es decir que para el observador en movimiento el lapso transcurrido es mayor: ¡los relojes móviles parecen avanzar más lentamente! Por supuesto, esta “dilatación del tiempo” es también recíproca.

- Veamos esto mismo desde otro punto de vista. Supongamos dos observadores, A y B, que pretenden calibrar sus relojes. Ambos están, inicialmente, en reposo uno respecto del otro, es decir, en el mismo SI. Para calibrar sus relojes, ambos mandan un haz de luz hacia un espejo situado a una distancia vertical *d* respecto del piso. Cada vez que el haz llega al espejo se escucha un “tic” y al regresar, un “tac”. Cada “tic-tac” es el lapso que se toma como patrón. Mientras están en reposo uno respecto del otro, ambos miden el mismo intervalo de tiempo, entre una ida y vuelta del haz de luz.



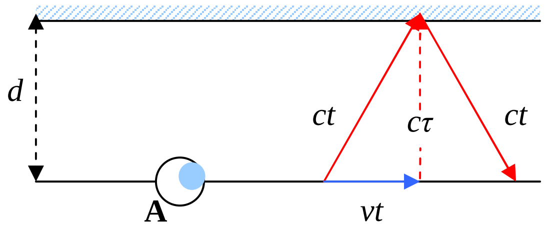
- Pero ahora supongamos que B se mueve con una velocidad $\vec{v} = v\hat{x}$ respecto de A, en dirección horizontal (o sea, perpendicular al haz).



Para B, nada cambia: su reloj hace “tic” cuando llega al espejo, y “tac” cuando regresa, y él sigue midiendo exactamente el mismo intervalo de tiempo:

$$\tau = \frac{d}{c}$$

- Desde el punto de vista de A, aunque la distancia vertical entre el espejo y B es la misma de antes, la luz debe recorrer una distancia mayor. Y, como ***c = cte***, A piensa que el reloj de B hace "tic-tac" en forma más espaciada que el suyo.



La conclusión de A es que el reloj de B anda más despacio que el suyo:

Veamos por qué:

$$c^2t^2 - v^2t^2 = d^2$$

$$(c^2 - v^2)t^2 = c^2\tau^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{c\tau}{(c^2 - v^2)^{1/2}} = \frac{\tau}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}$$

$$\Rightarrow t = \gamma\tau > \tau$$

- ¿Qué es lo realmente paradójico? Lo paradójico es que ambos observadores midan *la misma velocidad para la luz!*

Ejemplo "particulista": Los mesones se crean en la alta atmósfera y son partículas inestables que se desintegran en un tiempo promedio de $2\text{x}10^{-6}$ seg., alcanzando el nivel del mar en grandes cantidades. La velocidad característica de un mesón es 299400 km/s, es decir, β = 0.998. Con esa vida media podría recorrer una distancia de 600 m (desde un punto de vista clásico), cuando en realidad comienza a existir a alturas 10 veces superiores a ese valor:

Clásicamente: $L = vt \cong 600m$

Relativísticamente: $\Delta t = \gamma\tau = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\tau$

$$L = v\Delta t \cong 9472m$$

Dinámica relativista

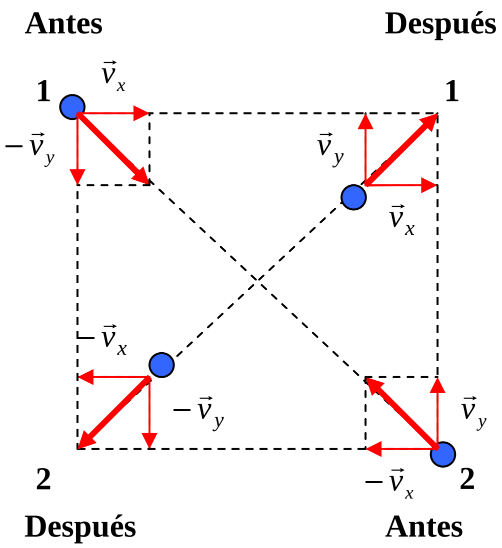
Impulso lineal y energía

- De acuerdo a lo visto, dos observadores en distintos SI, S y S', deducen leyes físicas. Cada uno de ellos las expresa en función de longitudes, tiempos, velocidades, aceleraciones, según se miden en su propio sistema. Las leyes deben ser covariantes (es decir, tener idéntica forma) en las variables de cualquier SI.

Conservación del impulso lineal $\vec{p}$

- Tenemos que encontrar una definición de $\vec{p}$ que se reduzca a $m_0\vec{v}$ (m_0 = masa en reposo o masa inercial) para $\beta << 1$, y que asegure la conservación de $\vec{p}$, por ejemplo, en los choques. Para evitar considerar leyes de transformación de $\vec{F}$ (fuerzas), vamos a considerar un choque en particular (ahí no tenemos que conocer las fuerzas intervinientes). Supongamos que $\vec{p}$ es un vector paralelo a $\vec{v}$, pero para mayor libertad supongamos que el factor de proporcionalidad no es una constante sino una función de $\vec{v}$, m_v, que debe reducirse a m_0 para $\beta << 1$.
- Sean dos partículas de igual masa m_0. Elijamos S tal que las dos partículas se aproximen con velocidades iguales y opuestas , tal que el impulso lineal total se anula: $\vec{p} = \vec{0}$.

En S:



$$\Delta p_y(1) = 2mv_y$$
$$\Delta p_y(2) = -2mv_y$$
$$\Delta p_x(1) = \Delta p_x(2) = 0$$

- Supongamos un sistema S’ que se mueve con $\vec{u} = u\hat{x}$ respecto de S. De acuerdo con las transformaciones de velocidades en S’, ec.(10.6):

$$v_x'(1) = \frac{v_x - u}{1 - \beta \frac{v_x}{c}} \qquad v_x'(2) = \frac{-v_x - u}{1 + \beta \frac{v_x}{c}} \qquad (\beta = \frac{u}{c})$$

Con esto no hay ningún problema. En S’ también se cumple que $\Delta p_x(1) = \Delta p_x(2) = 0$.

- Veamos qué pasa con Δp_y, aplicando ec.(10.7). Antes del choque:

$$v_y'(1) = \frac{-v_y}{\gamma(1 - \beta \frac{v_x}{c})} \qquad v_y'(2) = \frac{v_y}{\gamma(1 + \beta \frac{v_x}{c})} \qquad \textit{(notar que no son iguales en módulo)}$$

Después del choque:

$$v_y'(1) = \frac{v_y}{\gamma(1 - \beta \frac{v_x}{c})} \qquad v_y'(2) = \frac{-v_y}{\gamma(1 + \beta \frac{v_x}{c})}$$

$$\Rightarrow \Delta p_y'(1) \neq -\Delta p_y'(2) \qquad \text{si} \quad \vec{p} = m\vec{v} \ \text{ con } m = \text{cte}$$

- Es decir, encontramos un sistema donde, con el impulso lineal definido teniendo en cuenta a la masa como un invariante, $\vec{p} \neq ct\vec{e}$. La conclusión es que no podemos definir al impulso lineal $\vec{p}$ de esa manera.

- El problema está en que v_y' depende de v_x. Para que la conservación del impulso sea covariante, Δp_y debe ser la misma en todos los SI. Nos “fabricamos” la siguiente cantidad:

$m_0 \dfrac{dy}{d\tau} = m_0 \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{d\tau}$ donde $\tau = \dfrac{dt}{\gamma_P}$ es el tiempo propio de la partícula en el sistema en el que está en reposo, y $\gamma_P = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, con $\vec{v} \equiv$ velocidad de la partícula en S.

Ahora sí, la componente y va a ser la misma en todos los SI.

- Con esto, haciendo lo mismo para todas las componentes:

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}} \qquad (10.11)$$

- Con nuestra idea original. Se puede interpretar:

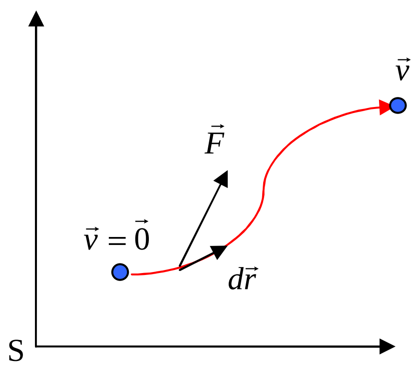
$$\vec{p} = m(v)\vec{v} \qquad \text{con} \quad \boxed{m(v) = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}} \tag{10.12}$$

notar que $m(v) \rightarrow \infty$ para $v \rightarrow c$

- m_0 se llama "masa en reposo" y corresponde a la masa que tiene una partícula en el SI en el cual se encuentra en reposo. Como tal, es un invariante de Lorentz.
- De la expresión de la masa en función de la velocidad se ve con más claridad que la masa es *una medida de la inercia del sistema*, es decir, que es la propiedad del sistema que se opone a cambios en su estado de movimiento. En particular, $m(v) \rightarrow \infty$ cuando $v \rightarrow c$, es decir, impide que un cuerpo **con masa en reposo** pueda alcanzar una velocidad igual a *c*. La moraleja es que solo aquellos cuerpos cuya masa en reposo sea nula, pueden moverse a la velocidad de la luz.

Energía relativista

Como en el caso clásico, partimos de considerar el trabajo que efectúa una fuerza sobre una partícula, a lo largo de una trayectoria.



$$dW = \vec{F}.d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt}.\vec{v}dt$$

- Trabajamos siempre en el mismo sistema de referencia S, así que no hay nada que transformar:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0\vec{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right] = m_0\left[\frac{\dot{\vec{v}}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{\vec{v}\,\dot{v}\,v/c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right]$$

Ahora hacemos:

$$\vec{v}.\frac{d\vec{p}}{dt}=m_0\left[\frac{\vec{v}.\dot{\vec{v}}}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}+\frac{\vec{v}.\vec{v}\,\dot{v}\,v/c^2}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}\right]=m_0\left[\frac{v\dot{v}}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}+\frac{v^2\,\dot{v}\,v/c^2}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}\right]$$

$$=m_0\left[\frac{v\dot{v}}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}+\frac{v\dot{v}\beta^2}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}\right]$$

donde se usó que $\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2)=v\frac{dv}{dt}$

$$\vec{v}.\frac{d\vec{p}}{dt}=m_0\frac{v\dot{v}}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}\left[(1-\beta^2)+\beta^2\right]=m_0\frac{v\dot{v}}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}=\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0c^2}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}\right]$$

Entonces:

$$dW=\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0c^2}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}\right]dt=d\left[\frac{m_0c^2}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}\right]\Rightarrow W=\left[\frac{m_0c^2}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}\right]_{v=0}^{v}=\frac{m_0c^2}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}-m_0c^2$$

O sea, por el teorema de trabajo-energía cinética (teorema de las fuerzas vivas):

$W=\Delta T$

Como inicialmente el sistema tenía $\vec{v}=\vec{0}$, en el punto inicial su energía cinética era nula, luego:

$$\boxed{\begin{aligned}T&=\frac{m_0c^2}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}-m_0c^2\\ T&=m_0c^2(\gamma-1)\end{aligned}}\tag{10.13}$$

- Antes de ver cómo se manifiesta la energía total relativista, vamos a ver que magnitudes que, clásicamente, son independientes, relativísticamente en realidad forman parte de un único ente. Para ello, veamos algunos…

Invariantes de Lorentz y Cuadrivectores

- Ya vimos que τ (tiempo propio), L_0 (longitud propia), m_0 (masa en reposo) y c (velocidad de la luz) son invariantes de Lorentz.
- Se puede ver que la cantidad:

$$\Delta s^2=c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2\tag{10.14}$$

O bien, si $(\vec{x}_0=\vec{0};t_0=0)$:

$$s^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2$$

también es un invariante de Lorentz. Efectivamente, si aplicamos las transformaciones de Lorentz:

$$s^2 = c^2\gamma^2\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)^2 - \gamma^2(x' + vt')^2 - y'^2 - z'^2 =$$
$$= c^2\gamma^2\left(t'^2 + \frac{\beta^2}{c^2}x'^2 + 2t'\frac{\beta}{c}x'\right) - \gamma^2\left(x'^2 + v^2t'^2 + 2x'vt'\right) - y'^2 - z'^2 =$$
$$= \gamma^2\left(c^2t'^2 + \beta^2x'^2 + 2t'vx' - x'^2 - v^2t'^2 - 2x'vt'\right) - y'^2 - z'^2 =$$
$$= \gamma^2c^2t'^2\underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{=\gamma^{-2}} - \gamma^2x'^2\underbrace{\left(1 - \beta^2\right)}_{=\gamma^{-2}} - y'^2 - z'^2 =$$
$$= c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = s'^2$$

Esta cantidad se denomina “intervalo entre dos sucesos”.

- Esto hace que se pueda definir un “vector” de cuatro componentes, denominado **cuadrivector,** cuya norma es Δs (o s). Esta forma de definir la norma se llama *“geometría seudoeuclideana”*. Notar que s^2 es la norma al cuadrado del cuadrivector, ya que resulta invariante al pasar de un SI a otro[2] Así, se define el **cuadrivector posición**:

$$r^i = (ct, \vec{r}) \tag{10.15}$$

donde ‘ct’ es la “componente temporal” y ‘ $\vec{r}$ ’ las componentes espaciales.

- El impulso lineal también se puede escribir como un cuadrivector:

$$p^i = (p_0, \vec{p}) \tag{10.16}$$

con norma:

$$p_0^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = cte$$

- Ahora bien, según vimos:

$$p_x = m_0\frac{dx}{d\tau} \qquad p_y = m_0\frac{dy}{d\tau} \qquad p_z = m_0\frac{dz}{d\tau}$$

Como m_0 y τ son invariantes, las componentes espaciales del cuadrivector p^i se comportan como las derivadas de las componentes espaciales del cuadrivector r^i. Entonces, es de esperar que lo mismo suceda con la componente temporal. O sea:

$$p_0 = m_0\frac{d(ct)}{d\tau}$$
$$p_0 = \gamma m_0 c$$

La norma, entonces, va a ser:

[2] La norma definida como en un espacio euclídeo <u>no</u> es invariante de Lorentz.

$$\gamma^2 m_0^2 (c^2 - v^2) = \gamma^2 m_0^2 c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = m_0^2 c^2 \qquad (10.17)$$

- La pregunta es, entonces, ¿quién es p_0? Vemos que $p_0 c = \gamma m_0 c^2$. Esta cantidad se parece a la energía cinética que encontramos:

$$T = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$
$$T = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2$$

En esta expresión de la energía cinética, la cantidad $m_0 c^2$ parece irrelevante (es una constante que va a desaparecer cuando hacemos ΔT). Sin embargo, podemos escribir:

$$p_0 = \frac{1}{c}(\gamma m_0 c^2) = \frac{1}{c}(T + m_0 c^2) \qquad (10.18)$$

Como el cuadrivector es un único ente, debe conservarse "completo" en, por ejemplo, un choque. Por lo tanto, la cantidad p_0 tiene que tener un sentido físico bien definido, con lo que concluimos que la cantidad $m_0 c^2$ no es irrelevante. Evidentemente, se trata de un término energético que se debe tener en cuenta.

- Entonces, definimos *la energía relativista E* :

$$\boxed{\begin{array}{l} E = p_0 c = T + m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 \\ E = mc^2 \end{array}} \qquad (10.19)$$

- Esta cantidad $m_0 c^2$ es un contenido de energía que la partícula tiene por el solo hecho de tener masa en reposo. Así, la energía relativista es **absoluta**, es decir, no está definida a menos de una constante, como la clásica. De hecho, en el límite no relativista (β<<1):

$$E = p_0 c = \frac{m_0 c^2}{(1 - \beta^2)} \cong m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\beta^2) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

- La ec.(10.19) nos muestra cómo masa y energía relativista son conceptos equivalentes. Cualquier sistema, por el solo hecho de tener masa en reposo, posee un contenido energético dado por la cantidad $m_0 c^2$. Por ejemplo, un objeto con una masa en reposo de 1kg, tiene un contenido energético de … $E_0 = 9 \times 10^{16} j$ (el equivalente a una bomba atómica de 21 Mt – la más potente hasta el momento es de 50Mt).
- Entonces, el cuadrivector impulso resulta:

$$p^i = (p_0, \vec{p}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \qquad (10.20)$$

cuya norma es:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 \qquad \text{invariante, tal como debía ser.}$$

- Esta última expresión nos da una relación muy útil entre $\vec{p}$ y E:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \tag{10.21}$$

que es válida aun para partículas sin masa en reposo. Por ejemplo, para el fotón:

$$p = \frac{E}{c}$$ [3]

Transformación de $\vec{p}$ y E

- Antes de hacer cuentas, observemos que:

$$p_x = m_0 \frac{dx}{d\tau} \qquad p_y = m_0 \frac{dy}{d\tau} \qquad p_z = m_0 \frac{dz}{d\tau} \qquad E = m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau}$$

- Como m_0 y τ son invariantes de Lorentz $\vec{p}$ y E van a cambiar de la misma forma que (x,y,z,t). Hacemos la equivalencia:

$$x \rightarrow p_x \qquad y \rightarrow p_y \qquad z \rightarrow p_z \qquad ct \rightarrow \frac{E}{c}$$

Con lo que:

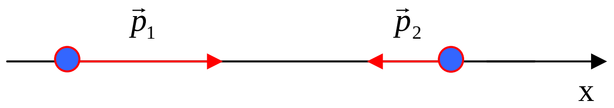
$$\boxed{p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\beta E}{c}\right) \qquad p'_y = p_y \qquad p'_z = p_z \qquad E' = \gamma(E - \beta c p_x)} \tag{10.22}$$

- Notemos cómo se mezclan $\vec{p}$ y E al pasar de un SI a otro. Esto es así porque no son magnitudes independientes, sino componentes de un mismo ente.
- Las magnitudes que se transforman como las coordenadas se denominan **contravariantes.**

Ejemplo: choque inelástico.

- Aun en un choque inelástico, la energía relativista se conserva, ya que la pérdida de energía cinética aparece como un aumento de la masa.
- Por ejemplo, supongamos dos partículas idénticas que chocan y se adhieren:

[3] En la teoría electromagnética de Maxwell, se obtiene que ésta también es la relación entre el impulso y la energía de una onda electromagnética. Esto no debe extrañarnos, ya que, recordemos, la teoría de Maxwell es empírica y, por lo tanto "contiene" a la relatividad (es decir, es "naturalmente" relativista).



Nos paramos en el SI en el que el CM está en reposo.

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$ => la partícula producto debe estar en reposo.

- En otro sistema de referencia S':

$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_3'$

De acuerdo con la transformación:

$$p_{x1}' + p_{x2}' = \gamma(\underbrace{p_{x1} + p_{x2}}_{0}) - \frac{\gamma\beta}{c}(E_1 + E_2) = p_{x3}' = \gamma \underbrace{p_{x3}}_{=0} - \frac{\gamma\beta}{c}E_3$$

$\Rightarrow E_1 + E_2 = E_3$

⇨ para que se conserve $\vec{p}$, debe conservarse *E*.

⇨ $E_1 + E_2 = \dfrac{2m_0c^2}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = m_{30}c^2$ => pues la partícula 3 (producto) está en reposo.

⇨ $m_{30} = \dfrac{2m_0}{\left(1-\dfrac{v_2}{c^2}\right)^{1/2}} = 2\gamma m_0 > 2m_0$

- La partícula producto ganó masa en reposo, a expensas de la energía cinética:

$$\boxed{\Delta m_0 = m_{30} - 2m_0 = 2m_0(\gamma - 1) = -\frac{\Delta T}{c^2}} \tag{10.23}$$

Generalización de las leyes de Newton

- Ya vimos que el tercer principio no es válido, ya que no puede haber interacciones "instantáneas", es decir que se propaguen a velocidad infinita. Pero, ¿qué se puede decir del segundo principio? Sin demostración, sigue siendo válido:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Pero, claro está, ahora es un poco más complicado:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0\vec{u}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right]$$

Esto **no** es equivalente a escribir:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \gamma m_0 \frac{d\vec{u}}{dt}$$

- Ahora, como $\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$, resulta:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} - \frac{\vec{u}}{m}\frac{dm}{dt}} \qquad (10.24)$$

Es decir que la aceleración resultante ya *no es paralela a la fuerza*. Teniendo en cuenta que, tal como encontramos en el cálculo de la energía cinética:

$$\vec{F}.\vec{u} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0c^2}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}\right] = c^2\frac{dm}{dt}$$

Resulta, finalmente:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} - \frac{\vec{u}}{mc^2}(\vec{F}.\vec{u})$$

- Consideremos, para fijar ideas, dos casos particulares:

$\Rightarrow \vec{F} \parallel \vec{u} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{F}$ y la partícula se desplaza en línea recta.

$$\Rightarrow \vec{F} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

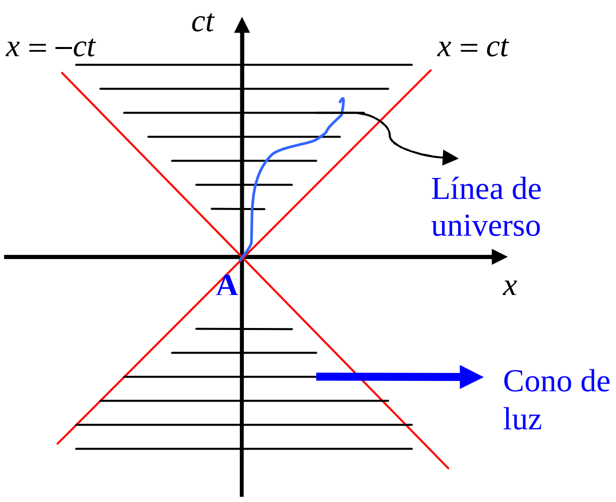
Esta última expresión solo es en apariencia similar al segundo principio clásico, ya que $m = m(u)$.

Espacio de Minkowski

- Todos hemos hecho alguna vez un diagrama donde representábamos la posición, la velocidad o la aceleración, que se volvían más o menos complicados cuando lo hacíamos en tres dimensiones. Si hacemos un diagrama relativista, a las tres dimensiones espaciales debemos agregarle la dimensión temporal, es decir, nuestro diagrama va a tener cuatro dimensiones. Este espacio se llama *espacio de Minkowski*.

Vamos a ver cómo se "ven" estos diagramas relativistas, cómo se trabaja en ellos y cuáles son sus características.

- Para simplificar, consideremos una sola coordenada espacial, *x*, y en el otro eje representamos *ct*.



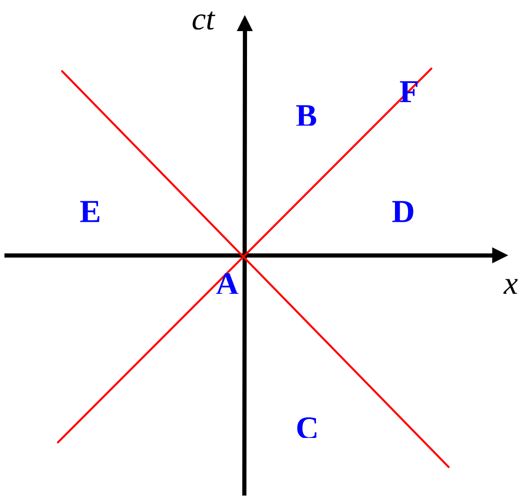
Cada punto del espacio de Minkowski

$$x^i = (ct, \vec{x})$$

se considera un *suceso*.
Supongamos en $x^i = 0$ un suceso. Las dos rectas a 45° representan $x = \pm ct$, y son trayectorias de la luz en el espacio. Cualquier otra "línea de universo" (trayectoria) en este espacio debe tener una pendiente <1, ya que:

$$\frac{dx}{d(ct)} = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{v}{c} = \beta < 1$$

Si lo pensamos en 4 dimensiones, no tendríamos rectas, sino dos (hiper)conos unidos por el vértice => **conos de luz del suceso que se encuentra en el origen (A)**.



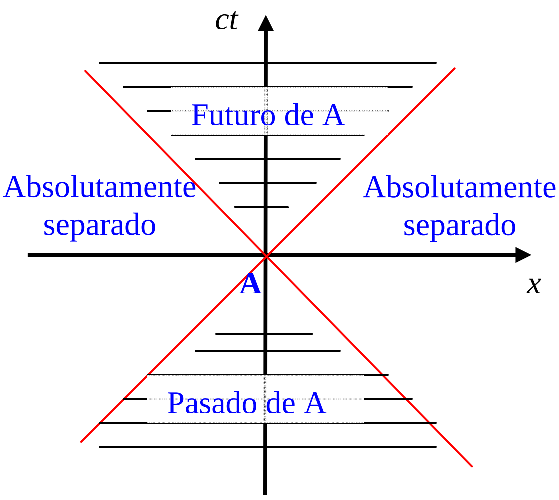
Δs es el intervalo entre dos sucesos,

$$\Delta s^2 = c^2t^2 - \Delta x^2$$

La forma de Δs permite considerarlo como la distancia entre dos puntos (≡ sucesos). Como Δs es un invariante de Lorentz, tendrá el mismo valor en cualquier SI, y puede ser de tres formas:

- Entre A y D, o A y E:
$\Delta s^2 < 0 \Rightarrow c^2t^2 < \Delta x^2 \leftrightarrow$ intervalo de tipo *espacial*
- Entre A y B, o A y C:
$\Delta s^2 > 0 \Rightarrow c^2t^2 > \Delta x^2 \leftrightarrow$ intervalo de tipo *temporal*
- Entre A y F:
$\Delta s^2 = 0 \Rightarrow c^2t^2 = \Delta x^2 \leftrightarrow$ intervalo de tipo *luminoso*

Δs será espacial, temporal o luminoso desde cualquier SI.



- Intervalo de tipo *espacial*:

$$|c\Delta t| < |\Delta x|$$

Una señal que parta de A **no** puede alcanzar E o D.
=>lo que sucede en A **no** puede influir en E o D
=>A **no** está conectado causalmente con E y D. Esa zona del espacio está *absolutamente separada de A.*

- Intervalo de tipo *temporal*:

$$|c\Delta t| > |\Delta x|$$

Una señal que parta de A puede alcanzar a B => A puede influir sobre B. Asimismo, una señal que parta de C puede alcanzar a A => puede influir sobre A. A, B y C pueden estar conectados causalmente. B forma parte del "futuro" de A, mientras que C forma parte de su "pasado".

- Intervalo de tipo *luminoso*:

$$|c\Delta t| = |\Delta x|$$

Los sucesos conectados por un intervalo de este tipo solo pueden estar conectados por una señal luminosa.

- Aunque el concepto de simultaneidad depende del sistema de referencia, existe un significado invariante para el futuro y el pasado. Como Δs^2 es invariante, no existe ningún sistema de referencia en el cual B suceda antes que A, o C después que A. Es decir, no puede violarse la relación causal cuando dos sucesos están conectados por un intervalo de tipo temporal. Por el contrario, dependiendo del SR, D o E pueden ser simultáneos con A, u ocurrir antes o después que A. Sin embargo, eso no viola el principio de causalidad, ya que los sucesos en la región espacial no pueden influir (ser influenciados) sobre (por) nuestro "aquí y ahora":

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2(t_2^{'} - t_1^{'})^2 - (x_2^1 - x_1^{'})^2 > 0 \text{ ó } < 0$$

a) $\Delta s^2 > 0$ (temporal)→ caso límite: $x_2' = x_1'$ (coincidentes)

$c^2(t_2' - t_1')^2 > 0 \rightarrow$ en ningún SR pueden ser simultáneos, pero sí ocurrir en el mismo punto.

b) $\Delta s^2 < 0$ (espacial)→ caso límite: $t_2' = t_1'$ (simultáneos)

$-(x_2' - x_1')^2 < 0 \rightarrow$ en ningún SR pueden ocurrir en el mismo punto.

- Además, por ejemplo, supongamos que $t_2 - t_1 > 0$ en un sistema de referencia.

Imaginemos que existe otro SR tal que $t_2' - t_1' < 0$:

$$t_2' - t_1' = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1)\right] < 0 \Rightarrow \frac{c^2(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} < v$$

El SR desde el cual se observa esta secuencia temporal invertida debe poseer una velocidad que cumpla con esta desigualdad, pero además debe ser $v < c$:

$$\frac{c^2(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} < c \Rightarrow c(t_2 - t_1) < (x_2 - x_1)$$

Es decir, para que se produzca dicha inversión temporal, ambos sucesos no pueden estar conectados causalmente, es decir, **deben estar conectados por un intervalo espacial**.

- Quiero ahora dibujar un sistema S' que se mueve con $\vec{v} = v\hat{x}$ respecto del sistema S.

La transformación que liga las coordenadas espacio temporales de S' con las de S no es ortogonal, de modo que si estoy parada en S, los ejes de S' no van a ser ortogonales entre sí. Esto es así ya que se deben satisfacer las transformaciones de Lorentz. Defino $w = ct$:

$$x' = \frac{x - \beta w}{(1-\beta^2)^{1/2}} \qquad (10.25) \qquad x = \frac{x' + \beta w'}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

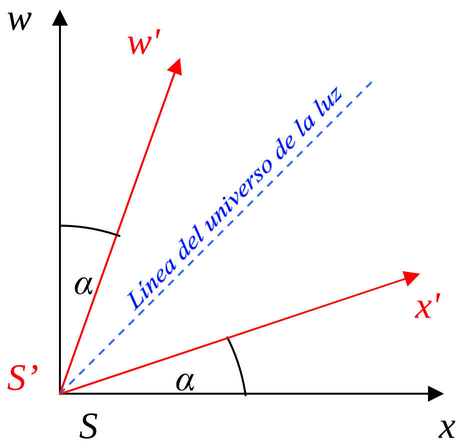
$$w' = \frac{w - \beta x}{(1-\beta^2)^{1/2}} \qquad (10.26) \qquad w = \frac{w' + \beta x'}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

Notar la simetría de estas ecuaciones

- Queremos ubicar los ejes de S'. El eje *w'* corresponde a hacer *x' = 0* en la ec.(10.25), mientras que el eje *x'* corresponde a hacer *w' = 0* en (10.26). Resulta:

Eje *w'*: $x = \beta w$

Eje *x'*: $w = \beta x$



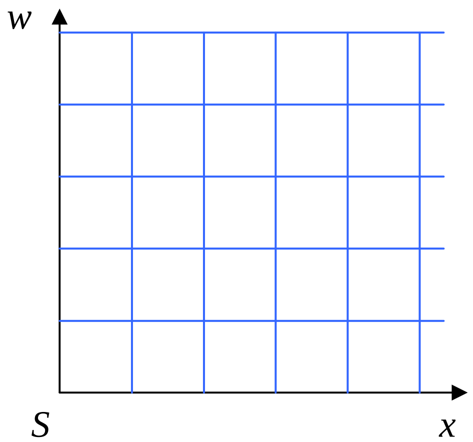
Notar que las transformaciones de Lorentz implican la transformación de un sistema ortogonal a otro no ortogonal. Cuanto más cercano β a 1, más se cierran los ejes sobre la recta de la luz.

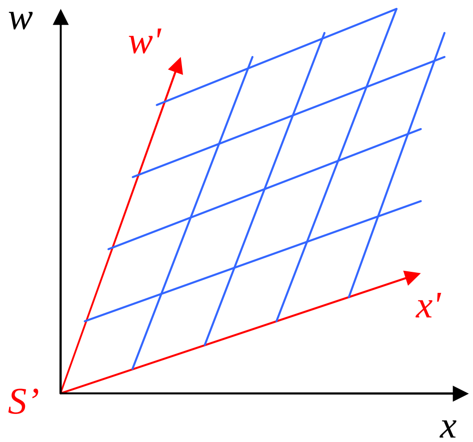
- Claramente, la unidad en los ejes no es la misma en los dos sistemas. Notemos que las unidades sobre *x'* (haciendo *x'*=1, *w'*=0), y sobre *w'* (haciendo *x'*=0, *w'*=1) tienen coordenadas:

$$x'=1 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \\ w = \dfrac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} \end{cases} \qquad w'=1 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} \\ w = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \end{cases} \tag{10.27}$$

Ambos “versores” tienen expresiones simétricas.

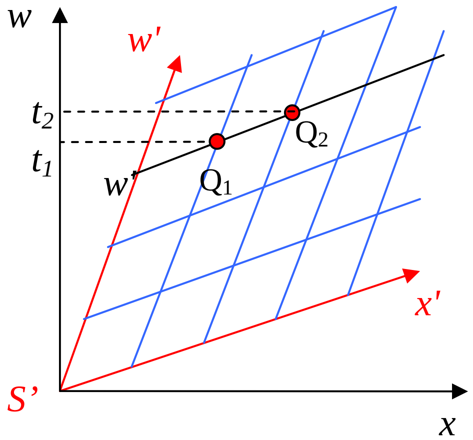
- La forma de trabajar con los ejes es la siguiente:





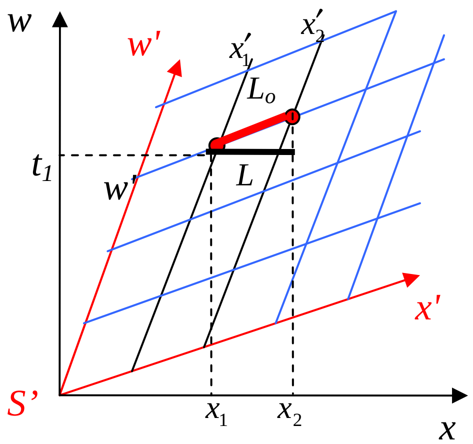
- Vamos a interpretar en este espacio de Minkowski algunos resultados obtenidos anteriormente:

Relatividad de la simultaneidad:



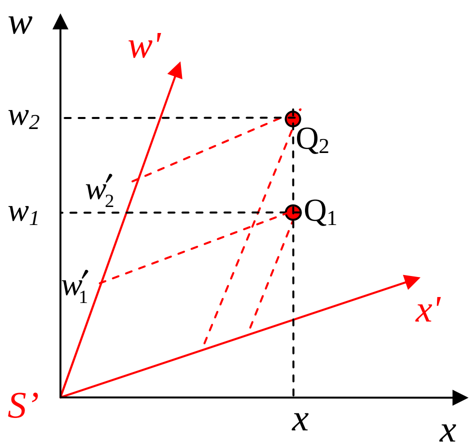
Si suponemos 2 sucesos Q_1' y Q_2' que son simultáneos pero están separados espacialmente en S', no resultan simultáneos en S. Notar que si $x_1' = x_2'$, sí pueden ser simultáneos también en S. Obviamente, lo mismo sucede si intercambiamos S y S'.

Contracción de la longitud:



La varilla está en reposo en el sistema S'. Su longitud en reposo es $L_o = x_2' - x_1'$ (independiente de t'). Como las mediciones de los extremos de la varilla en S tienen que hacerse **simultáneamente en S**, la longitud que se mide, $L = x_2 - x_1$, resulta contraída respecto de L_o Obviamente, lo mismo sucede si intercambiamos S y S'.

Dilatación del tiempo:



Supongamos ahora que, con un reloj ubicado en la posición x de S, medimos un intervalo de tiempo $\tau = (t_2 - t_1)$. τ es tiempo propio, ya que el reloj está en reposo en S. Si medimos ese mismo intervalo en S' observamos un tiempo mayor. Notar que las dos mediciones de tiempo en S' ocurren en diferentes coordenadas de S'. Lo mismo sucede si intercambiamos S y S'.

Paradoja de los mellizos:

- Esta aparente paradoja fue inicialmente propuesta por Einstein. Consideremos dos hermanos mellizos A y B, que un día se separan. Uno de ellos realiza un largo viaje, por ejemplo en una nave espacial que viaja a velocidades cercanas a la de la luz, en tanto que el otro (A), queda en Tierra a la espera del regreso de su hermano. Ambos, cada uno en su propio sistema de referencia (SR), miden sus tiempos propios. Ahora bien, desde el punto de vista del mellizo A, que quedó en Tierra, el tiempo de su hermano viajero pasa más lentamente. Cuando el viajero regresa … ¡es más joven que su hermano!
- La paradoja se plantea ya que, si nos ubicamos en el SR del viajero (la nave) y observáramos el tiempo del hermano en Tierra, también nos parecería que pasa más lentamente. ¿Entonces…?
- La clave de esta aparente paradoja está en que ambos sistemas de referencia **no son equivalentes.** Si consideramos que el SR de A (la Tierra) es un SI, podemos ver que el SR del viajero **no es un SI**, ya que, al menos a) debió acelerar para aumentar su velocidad hasta alcanzar la velocidad de crucero, y b) debió desacelerar emprender el regreso y aterrizar. Eso, sin contar cambios de velocidad respecto de Tierra a lo largo del viaje.
- Podemos hacer una aproximación a este problema considerando que el hermano viajero va cambiando sucesivamente de SI (es decir, permanece un tiempo *dt* en cada uno). Es decir, vamos a considerar el SR del viajero como una sucesión de SI.
- Habíamos encontrado que el tiempo que se mide en movimiento se dilata frente al tiempo propio, ec.(10.10):

$$\Delta t = \gamma\tau > \tau$$

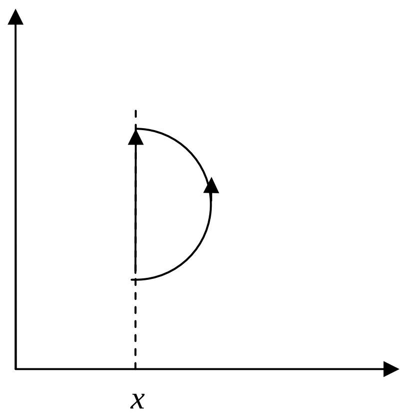
En nuestro caso, Δt es el tiempo que mide el mellizo en Tierra, y τ, el que mide el viajero.

- Como el viajero va cambiando de SI *en forma continua*:

$$dt = \gamma d\tau \Rightarrow d\tau = \frac{dt}{\gamma} = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (10.28)$$

$$d\tau = \left[dt^2 - \frac{dt^2}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right]^{1/2} = \left[dt^2 - \frac{(dx)^2}{c^2} \right]^{1/2}$$

=> esto es un diferencial de arco en una integral curvilínea. El tiempo más largo corresponde a una recta en el espacio de Minkowski (recordar la distinta métrica).



- Sin resolver la integral, puede verse que $d\tau < dt$, por lo que para el hermano viajero realmente va a pasar un tiempo menor.
- Hagamos una estimación, considerando como aproximación que el viajero acelera durante un tiempo muy corto frente al total del viaje, hasta alcanzar la velocidad final *v=0.8c*, y luego deriva por el espacio a esa velocidad durante un tiempo *T'*=3 años, medido en su SR. Al cabo de ese tiempo desacelera la nave en un tiempo despreciable hasta invertir el sentido de la velocidad y regresar a Tierra con la misma *v* del tramo de ida, a donde arriba al cabo de 6 años de viaje. De acuerdo con su reloj y, por lo tanto, con sus procesos vitales en general, ese mellizo ha envejecido 6 años (tiempo propio).
- Para el mellizo que quedó en Tierra ha transcurrido:
- $2T = \dfrac{6años}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}} = \dfrac{6años}{\left(1-0.8^2\right)^{1/2}} = 10años$
- Sería erróneo pensar que el hermano en Tierra envejece "instantáneamente" cuando su hermano regresa. Simplemente cada uno de ellos vive en forma normal y natural en su SR, y el transcurrir del tiempo no está correlacionado entre diferentes SRs.