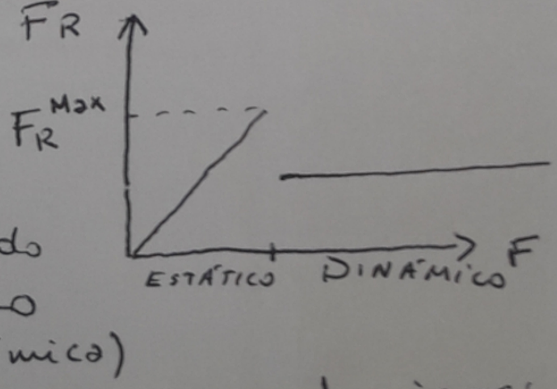
Práctica 3: Interacción de Rozamiento

De nuestra experiencia diaria sabemos que si a un cuerpo apoyado sobre una superficie le aplicamos una fuerza pequeña (comparada con su peso) este no se mueve. Si vamos incrementando paulatinamente la fuerza llega un momento en que se rompe la inercia y el cuerpo comienza a desplazarse. Por otro lado, una vez iniciado el movimiento, si la fuerza aplicada $\bar{F}$ se mantiene constante, la cuantía de la aceleración experimentada por el cuerpo es menor de lo que esperaría observarse de la relación $\bar{F} = m\bar{a}$. Todos estos hechos empíricos pueden explicarse por la existencia de fuerzas de rozamiento o fricción, tanto en la situación estática como en la dinámica. Dichas fuerzas dependerán de las características de las superficies en contacto. El comportamiento de estas fuerzas de rozamiento dependiendo de la fuerza aplicada $\bar{F}$ puede esquematizarse así:



Tanto la fuerza de rozamiento máxima, que separa la situación estática de la dinámica, como la fuerza de rozamiento cuando se establece el movimiento (fuerza de rozamiento dinámica) son proporcionales a la fuerza normal ejercida por la superficie de apoyo sobre el cuerpo, es decir:

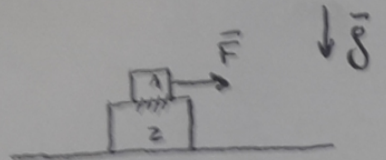
$$F_{Re}^{MAX} = \underbrace{\mu_e}_{\text{estático}} N \qquad F_{Rd} = \underbrace{\mu_d}_{\text{dinámico}} N$$

Donde las constantes de proporcionalidad son los coeficientes de rozamiento estático (μ_e) y dinámico (μ_d)

Este modelo fenomenológico funciona relativamente bien para una amplia gama de superficies en contacto (pero no para todas!). Para todos los problemas de la práctica se supondrá que este sencillo modelo para las fuerzas de fricción funciona adecuadamente para describir la situación planteada.

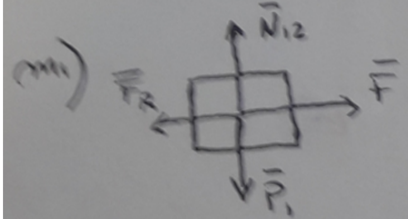
Problema ①:

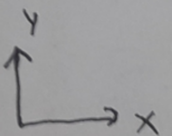
I)

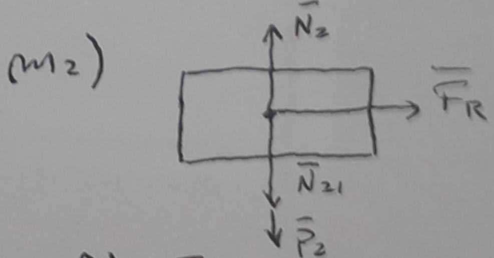


a) Fuerza máxima / ambos cuerpos no deslizan entre sí.

Diagramas de cuerpo libre







$\hat{x})\ F - F_R = m_1 a_1$

$\hat{y})\ N_{12} - m_1 g = 0$

$\hat{x})\ F_R = m_2 a_2$

$\hat{y})\ N_2 - N_{21} - m_2 g = 0$

Cabe aclarar que la fuerza de rozamiento sobre los dos cuerpos es de la misma magnitud y sentidos opuestos ya que son pares de acción y reacción. Lo mismo puede decirse para las normales N_{12} y N_{21}.

Usando las dos ecuaciones en $\hat{x}$) podemos escribir:

$$F = F_R \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

Y sabemos que la situación de no deslizamiento se mantiene si $F_R < F_R^{MAX} = \mu_e N_{12} = \mu_e m_1 g$

Por lo que en definitiva:

Si se satisface esta condición los cuerpos no deslizan entre sí, se mueven de manera solidaria. $\rightarrow$ $\boxed{F < \mu_e m_1 g \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}$

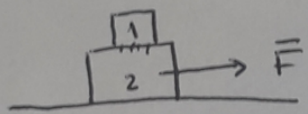
b) Aceleración del sistema:

(m₁) $F = F_R + m_1 a$ (m₂) $F_R = m_2 a$

Combinando las ecuaciones:

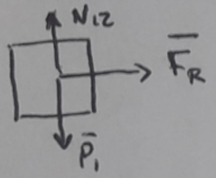
$F = m_2 a + m_1 a \rightarrow \boxed{a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}}$ Los cuerpos se aceleran como si fueran uno solo de masa $m_1 + m_2$.

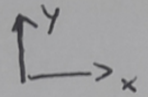
II)



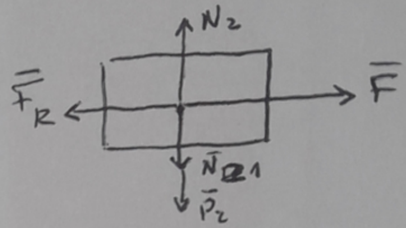
a) Fuerza máxima / no deslizan: Otra vez vínculo $a_1 = a_2 = a$

(m₁)





(m₂)



$\hat{x})$ $F_R = m_1 a$ $\hat{x})$ $F - F_R = m_2 a$

$\hat{y})$ $N_{12} = m_1 g$ $\hat{y})$ $N_2 - N_{21} - m_2 g = 0$

De las ec. en $\hat{x})$ $F - F_R = m_2 a = \dfrac{m_2}{m_1} F_R$

$\Rightarrow F = F_R \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)$; $F_R < \mu_e N_{21} = \mu_e m_1 g$

↳ condición para que no deslicen

$\Rightarrow \boxed{F < \mu_e g (m_1 + m_2)}$ Condición para $\bar{F}$

b) Otra vez se obtiene $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$

c) Ahora se toma $F = 2 \mu_e g (m_1 + m_2) \rightarrow$ los cuerpos deslizan entre sí.

Tenemos el mismo diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo:

(m₁) $\hat{x})$ $F_R = m_1 a_1$

$\hat{y})$ $N_{12} - m_1 g = 0$

(m₂) $\hat{x})$ $F - F_R = m_2 a_2$

$\hat{y})$ $N_2 - N_{21} - m_2 g = 0$

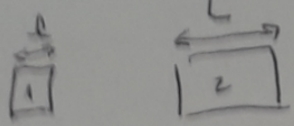
↳ $2 \mu_e g (m_1 + m_2) - \mu_d m_1 g = m_2 a_2$

$F_R = \mu_d N_{12} = \mu_d m_1 g \rightarrow$ es la dinámica

$\Rightarrow \boxed{a_1 = \mu_d g}$

$\Rightarrow \boxed{a_2 = \dfrac{g}{m_2} \left[2 \mu_e (m_1 + m_2) - \mu_d m_1 \right]}$

d) Hay que determinar cuándo el cuerpo ① cae del encima del cuerpo ②, considerando



$\ell << L$. Directamente tomamos el cuerpo ① como puntual => tenemos que ver el tiempo que le toma desplazarse $\frac{L}{2}$ sobre el cuerpo ②:

Debemos ver la aceleración relativa de ① respecto de ②:

$$a_R = a_1 - a_2 = \mu_d g - \frac{g}{m_2}\left[2\mu_e(m_1+m_2) - \mu_d m_1\right]$$

$$a_1 - a_2 = (\mu_d - 2\mu_e)(1 + m_1/m_2)\, g$$

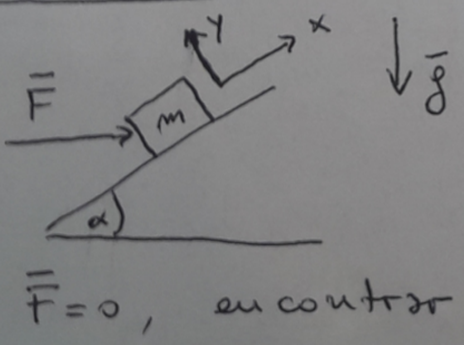
$$x_1(t) = \frac{1}{2} a_R t^2 = \frac{1}{2} g(\mu_d - 2\mu_e)(1 + m_1/m_2)\, t^2$$

↓
MRUV

Pedimos $x_1(t_*) = -L/2$

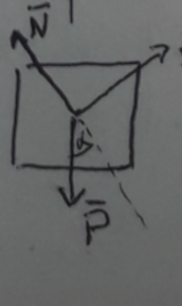
$$\Rightarrow \boxed{t_* = \sqrt{\frac{L\, m_2\, g}{(2\mu_e - \mu_d)(m_1 + m_2)}}}$$

Problema ②:



a) $\bar{F} = 0$, encontrar valores de α para los que el bloque permanece en reposo.

(m)



$\bar{F}_R$ → apunta en este sentido porque el cuerpo tenderá a descender si $\bar{F} = 0$

$\hat{x}$) $F_R - mg\sin\alpha = 0$ → planteo que está en reposo

$\hat{y}$) $N - mg\cos\alpha = 0$

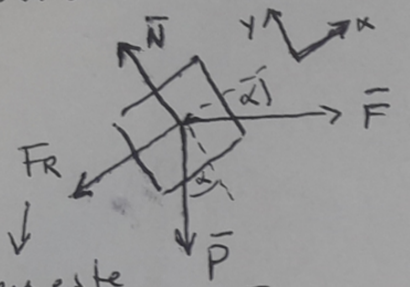
$F_R = mg \,\text{sen}\,\alpha$

$N = mg \cos\alpha$ pero $F_R < \mu_e N = \mu_e mg \cos\alpha$

$\Rightarrow mg\,\text{sen}\,\alpha = F_R < \mu_e mg \cos\alpha$

$\Rightarrow \boxed{\text{tg}\,\alpha < \mu_e}$ → condición para que el bloque no baje.

b) Si se cumple $\text{tg}\,\alpha < \mu_e$, encontrar valores de $\bar{F}$ para los cuáles el bloque no se mueve



Va en este sentido porque $\bar{F}$ tiende a mover el cuerpo hacia arriba.

$\hat{x}$) $F\cos\alpha - F_R - mg\,\text{sen}\,\alpha = 0$ → reposo

$\hat{y}$) $N - F\,\text{sen}\,\alpha - mg\cos\alpha = 0$

$N = mg\cos\alpha + F\,\text{sen}\,\alpha$

→ $F\cos\alpha = \underbrace{F_R}_{< \mu_e N} + mg\,\text{sen}\,\alpha$

$\Rightarrow F\cos\alpha < \mu_e N + mg\,\text{sen}\,\alpha$

$\Rightarrow F\cos\alpha < \mu_e [mg\cos\alpha + F\,\text{sen}\,\alpha] + mg\,\text{sen}\,\alpha$

$F\cos\alpha - F\mu_e\,\text{sen}\,\alpha < mg(\mu_e\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha)$

$$F < \frac{mg(\mu_e + \text{tg}\,\alpha)}{(1 - \mu_e\,\text{tg}\,\alpha)}$$

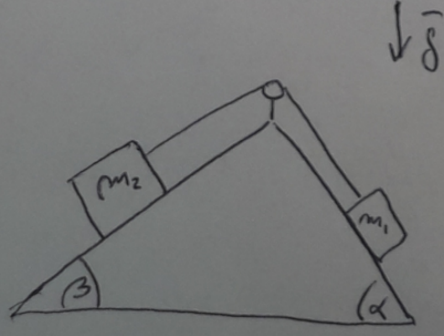
Analizar el caso: $\mu_e = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$

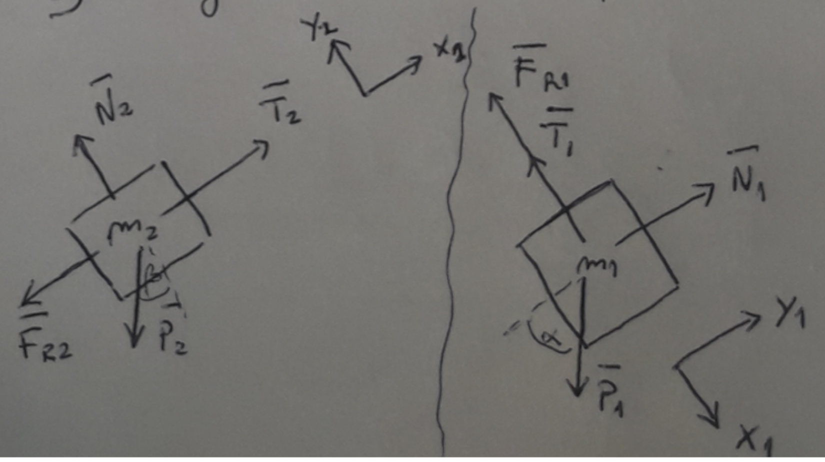
$0 < \varepsilon \ll 1$

c) Cuentas.

Problema 5:



a) Diagramas de cuerpo libre:



Nótese que el sentido elegido para las fuerzas de rozamiento presupone que el sistema tiende a moverse de forma tal que el cuerpo ② asciende mientras que el ① desciende. Más adelante en el desarrollo del problema tendremos en cuenta la otra posibilidad de movimiento. Las ecuaciones de Newton quedan:

$$m_1 \quad \hat{x}_1)\ m_1 g \operatorname{sen}\alpha - T_1 - F_{R1} = \underbrace{0}_{\text{reposo}} \qquad \hat{y}_1)\ N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0$$

$$m_2 \quad \hat{x}_2)\ T_2 - m_2 g \operatorname{sen}\beta - F_{R2} = \overset{\text{reposo}}{0} \qquad \hat{y}_2)\ N_2 - m_2 g \cos\beta = 0$$

Suponemos una soga de masa nula por lo que $T_1 = T_2$

Sumando las ecuaciones en $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$:

$$g(m_1 \operatorname{sen}\alpha - m_2 \operatorname{sen}\beta) = F_{R1} + F_{R2}$$

Ahora volvemos a plantearnos la posibilidad de que el movimiento fuera en el otro sentido, por ello tomamos módulo en la expresión de arriba:

$$|g(m_1 \operatorname{sen}\alpha - m_2 \operatorname{sen}\beta)| = |F_{R1} + F_{R2}|$$

Ahora, considerando que con los sistemas de coordenadas elegidos, sea cual sea el sentido de movimiento se tiene que F_{R1} y F_{R2} tienen el mismo signo

$$\Rightarrow |F_{R1} + F_{R2}| = |F_{R1}| + |F_{R2}| < \mu_e N_1 + \mu_e N_2$$

$$< \mu_e g(m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta)$$

$$\Rightarrow |g(m_1 \operatorname{sen}\alpha - m_2 \operatorname{sen}\beta)| < \mu_e g(m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta)$$

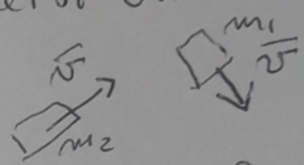
$$\boxed{\mu_e > \frac{|m_1 \operatorname{sen}\alpha - m_2 \operatorname{sen}\beta|}{(m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta)}}$$

b) $\mu_e = 0.3$
$m_1 = 1\,kg$
$m_2 = 2\,kg$
$\alpha = 60°$
$\beta = 30°$

$$\frac{\left|\sqrt{3}/2 - 2 \cdot 1/2\right|}{1/2 + 2\sqrt{3}/2} \simeq \frac{0.13}{2.23} < \underbrace{0.3}_{\mu_e}$$

↓ se verifica la condición $\Rightarrow$ el sistema permanece en reposo.

c) La velocidad no entra explícitamente en las ecuaciones de Newton, pero lo hace implícitamente al considerar un sentido de movimiento. Supongamos primero



$v > 0$

Sobre c/cuerpo actúa una fuerza de rozamiento dinámico $\mu_d N$. Las ecuaciones de Newton quedan:

(m_1) $\hat{x}_1)$ $m_1 g \operatorname{sen}\alpha - T - \mu_d N_1 = m_1 a$ $\quad \hat{y}_1)$ $N_1 = m_1 g \cos\alpha$

vínculo ↕

(m_2) $\hat{x}_2)$ $T - m_2 g \operatorname{sen}\beta - \mu_d N_2 = m_2 a$ $\quad \hat{y}_2)$ $N_2 = m_2 g \cos\beta$

Sumando las ecuaciones en $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$:

$$m_1 g \operatorname{sen}\alpha - m_2 g \operatorname{sen}\beta - \mu_d (N_1 + N_2) = (m_1 + m_2)\, a$$

$$\Rightarrow a = \frac{g}{(m_1+m_2)}\left[m_1 \operatorname{sen}\alpha - m_2 \operatorname{sen}\beta - \mu_d (m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta) \right]$$

Nos interesa ver el signo de a:

$$\sqrt{3}/2 - 2 \cdot 1/2 - 0.25\,(1/2 + 2 \cdot \sqrt{3}/2) < 0$$

$\Rightarrow$ el sistema va frenándose (v y a de distinto signo)

Cuando se frena no invierte su sentido de movimiento permanece en reposo, porque estamos bajo las hipótesis del punto b).

Analizar el otro sentido de movimiento!