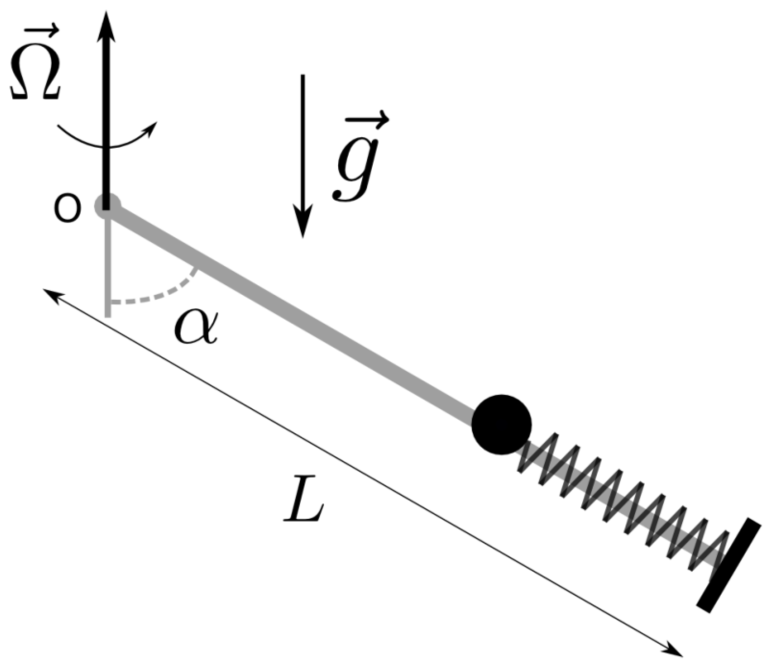
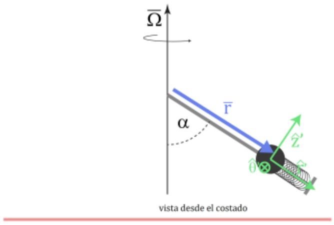
3. Un cuerpo de masa $m$ engarzado en un riel recto de longitud $L$, se encuentra unido a un resorte de constante $k$ y longitud natural $l_0 = L/2$. El otro extremo del resorte está fijo a un extremo del riel, como se indica en la figura. El conjunto se encuentra rotando de manera rígida con velocidad angular constante de módulo $\Omega$, de tal manera que el ángulo que forma el riel con la vertical es siempre $\alpha$. Considerando el movimiento desde un **sistema de referencia rotante**.

   *a*) Realice un diagrama de cuerpo libre del cuerpo. Escriba las ecuaciones de Newton y de vínculo del sistema.

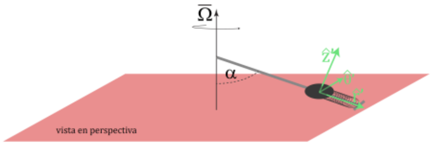
   *b*) Encuentre la ecuación de movimiento, halle la(s) posicione(s) de equilibrio y estudie su estabilidad.

   *c*) Calcular cuánto debe valer el ángulo de inclinación $\alpha$ (como función de los parámetros del problema) para que el sistema tenga un posición de equilibrio estable a una distancia $\frac{2}{3}L$ del punto $O$. Determinar la frecuencia de oscilación.










Tomaremos un sistema de referencia no inercial como muestran las figuras, fijo al riel móvil que gira y con el $\hat{r}'$ inclinado, en la dirección de la barra. $\hat{\theta}'$ apunta en la dirección de giro y $\hat{z}'$ es perpendicular a ambos y al riel. Notar que los 3 versores forman una terna derecha.

## Fuerzas de interacción

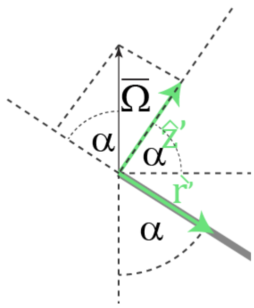
Tendremos la fuerza elástica dado que hay un resorte y las fuerzas de vínculo entre el riel y la masa.

Como no hay rozamiento, las fuerzas vínculo serán perpendiculares al riel, y las llamaremos $N_{z\prime}$ y $N_{\theta\prime}$. Notar que la $N_{z\prime}$ será la encargada de mantener el vínculo de $z' = 0\ (cte)$ y $N_{\theta\prime}$ de hacer lo mismo con $\theta' = 0\ (cte)$. Este último vínculo debe cumplirse dado que el sistema de referencia está fijo al riel móvil, y entonces va girando con este y el ángulo de observación no cambia.

Por último, hay que sumar el peso, que al haber tomado un sistema inclinado como el riel, tendrá componentes en $\hat{r}'$ y en $\hat{z}'$.

## Fuerzas de inercia o pseudofuerzas

Recordemos que para un sistema rotante teníamos:




$$m\bar{a} = \sum F - 2m\overline{\Omega} \times \bar{v}' - m\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times \bar{r}' - m\dot{\overline{\Omega}} \times \bar{r}'$$

Donde se sumaban las fuerzas de coriolis, centrífuga y de arrastre. Calculemos cada una, notemos que, como $\overline{\Omega}$ es vertical y nuestro sistema de referencia está inclinado, tendremos que descomponerla para hacer los productos vectoriales de cada fuerza.

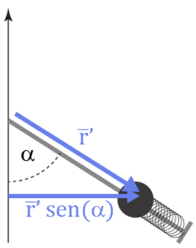
### Coriolis

Para calcular coriolis necesitamos hacer $\overline{\Omega} \times \bar{v}'$. Escribamos primero $\overline{\Omega}$ y cómo quedaría $\bar{v}'$ en polares.

$$\overline{\Omega} = \Omega(\mathrm{sen}(\alpha)\hat{z}' - cos(\alpha)\,\hat{r}') \qquad\qquad \bar{v}' = \dot{r}'\hat{r}' + r'\dot{\theta}'\hat{\theta}' + \dot{z}'\hat{z}' = \dot{r}'\hat{r}'$$

En el segundo miembro de $\bar{v}'$, usamos los vínculos, aprovechando que nuestro sistema de referencia está fijo al riel: $z' = 0$ y $\theta' = 0 \Rightarrow \dot{z}' = 0 = \ddot{z}'$ y $\dot{\theta}' = 0 = \ddot{\theta}'$.

$$\overline{\Omega} \times \bar{v}' = \Omega(\mathrm{sen}(\alpha)\hat{z}' - cos(\alpha)\,\hat{r}') \times \dot{r}'\hat{r}' = \Omega\dot{r}'\mathrm{sen}(\alpha)\hat{\theta}'$$

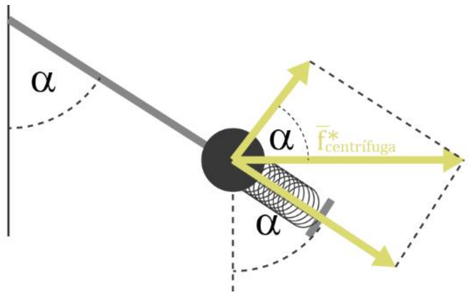



La fuerza de coriolis queda apuntando en $\hat{\theta}'$, y proporcional a la velocidad en $\hat{r}'$. Es la fuerza que compensa que si el radio de giro aumenta, debe haber una fuerza que compense la distancia mayor que recorre el móvil, que gira en un círculo más largo. Es natural que aparezca el $\mathrm{sen}(\alpha)$, dado que el radio de giro no está dado por $r'$ sino por $r'\mathrm{sen}(\alpha)$.

### Fuerza Centrífuga

$$\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times\bar{r}' = \bar{\Omega}\times[\Omega(\text{sen}(\alpha)\hat{z}' - cos(\alpha)\,\hat{r}')\times r'\hat{r}'] = \bar{\Omega}\times\left[\Omega\text{sen}(\alpha)r'\hat{\theta}'\right]$$
$$= \Omega(\text{sen}(\alpha)\hat{z}' - cos(\alpha)\,\hat{r}')\times\left[\Omega\text{sen}(\alpha)r'\hat{\theta}'\right]$$
$$= -\Omega^2\text{sen}(\alpha)r'(\text{sen}(\alpha)\hat{r}' + cos(\alpha)\hat{z}')$$

Nos quedará con una componente en $\hat{r}'$ y otra en $\hat{z}'$, esto coincide con que la fuerza centrífuga siempre debe apuntar hacia afuera del círculo que describe la masa en su rotación. Esto es, perpendicular a $\bar{\Omega}$. El signo negativo del doble producto vectorial se cancelará con el que aparece en las ecuaciones de Newton, asegurando que apunte para afuera, en la dirección de $\hat{r}'$ y $\hat{z}'$ positivos. Nuevamente, aparece un $r'\text{sen}(\alpha)$ porque es el radio de giro. El término de $\text{sen}(\alpha)\hat{r}' + cos(\alpha)\hat{z}'$ tiene que ver con la descomposición.




### Fuerza de arrastre

Dado que $\bar{\Omega}$ es constante, $\dot{\bar{\Omega}} = 0$ y entonces no va a haber fuerza de arrastre.

## Ecuaciones de Newton

$$m(\ddot{r}' - r'\dot{\theta}'^2) = k\left(L - r' - \frac{L}{2}\right) + m\Omega^2 sen^2(\alpha)r' + mgcos(\alpha)$$

$$m(r\ddot{\theta}' + 2\dot{r}'\dot{\theta}') = N_\theta - 2m\Omega\dot{r}'\text{sen}(\alpha)$$

$$m\ddot{z}' = N_z + m\Omega^2 sen(\alpha)\cos(\alpha)r' + mgsen(\alpha)$$

## Vínculos

$\theta' = 0 \Rightarrow$y $\dot{\theta}' = 0 = \ddot{\theta}'$ Dado que el sistema de referencia rota con el riel

$z' = 0$ y $\Rightarrow \dot{z}' = 0 = \ddot{z}'$ Dado que la masa está engarzada en el riel

## Ecuaciones de Vínculo

Las ecuaciones de Newton de $\hat{\theta}'$ y $\hat{z}'$ quedan

$$0 = N_\theta - 2m\Omega\dot{r}'\text{sen}(\alpha)$$

$$0 = N_z + m\Omega^2 sen(\alpha)\cos(\alpha)r' + mgsen(\alpha)$$

De manera que nos dirán cómo deben ser las fuerzas de vínculo para manetener a la masa engarzada al riel.

$N_\theta = 2m\Omega\dot{r}'\text{sen}(\alpha)$ La normal en $\hat{\theta}'$ debe compensar la fuerza de coriolis

$N_z = -m\Omega^2 sen(\alpha)\cos(\alpha)r' - mgsen(\alpha)$

En $\hat{z}'$, debe compensar la componentes de la fuerza centrífuga y el peso.

## Ecuación de Movimiento

Las ecuación de Newton de $\hat{r}'$ queda

$$\ddot{r}' = \frac{k}{m}\left(\frac{L}{2} - r'\right) + \Omega^2 sen^2(\alpha) r' + gcos(\alpha)$$

Nos da la aceleración, es la ecuación de movimiento de la masa, vista desde el sistema de referencia fijo al riel. Si agrupamos los términos que tienen $r'$, la posición:

$$\ddot{r}' = -\left(\frac{k}{m} - \Omega^2 sen^2(\alpha)\right) r' + gcos(\alpha) + \frac{kL}{2m}$$

Donde podemos notar que si $\left(\frac{k}{m} - \Omega^2 sen^2(\alpha)\right) > 0$ obtenemos un oscilador armónico, y la frecuencia de oscilación estará dada por $\omega^2 = \frac{k}{m} - \Omega^2 sen^2(\alpha)$. Es decir, a la frecuencia natural que tendría la masa si no girara ($\frac{k}{m}$) se le resta un término relacionado con la fuerza centrífuga ($\Omega^2 sen^2(\alpha)$). Si este término fuera más grande, la ecuación de movimiento no sería la de un oscilador armónico, la masa no quedaría oscilando en el riel sino que sería expulsada hacia afuera.

### Equilibrio

Para encontrar la posición de equilibrio, pedimos que la aceleración se anule:

$$0 = -\left(\frac{k}{m} - \Omega^2 sen^2(\alpha)\right) r'_{EQ} + gcos(\alpha) + \frac{kL}{2m}$$

Despejando $r'_{EQ}$

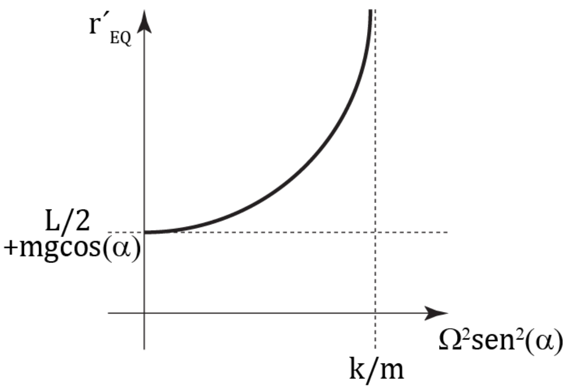
$$r'_{EQ} = \frac{gcos(\alpha) + \frac{kL}{2m}}{\frac{k}{m} - \Omega^2 sen^2(\alpha)}$$

Multiplico arriba y abajo por $\frac{m}{k}$ y llamamos $\omega_0^2 \equiv k/m$

$$r'_{EQ} = \frac{\frac{mgcos(\alpha)}{k} + \frac{L}{2}}{1 - \left(\frac{\Omega sen(\alpha)}{\omega_0}\right)^2}$$

El numerador indica que la posición de equilibrio estará más a la derecha que $\frac{L}{2}$ (la longitud natural). Cuánto más a la derecha está dado por una competencia entre la componente del peso que punta en $\hat{r}'$ y la dureza del resorte, que apunta en $-\hat{r}'$ dado que estará comprimido por el peso.

Si $\Omega = 0$ ó $\alpha = 0$, el denominador es 1 y no modifica en nada el análisis previo. Si $\Omega$ crece, el sistema comienza a girar y el denominador se achica, o sea que la posición de equilibrio se va más lejos del origen a medida que el sistema rota más rápido. Cuánto más lejos se va está dado por una competencia entre la fuerza centrífuga y la elástica.



Si $\frac{\Omega sen(\alpha)}{\omega_0} > 1$, el denominador se hace negativo, y no tiene sentido obtener un $r'_{EQ} < 0$, significa que para estos valores no hay ninguna posición de equilibrio. Vemos que es el mismo caso que hace que el movimiento no sea armónico en las ecuación de movimiento.

Estabilidad

Para ver la estabilidad, hay que derivar la aceleración respecto de la posición, evaluar en el único punto de equilibrio y ver si es menor o mayor a 0 (estable o inestable, respectivamente).

$$\frac{d\ddot{r}'}{dr'} = \frac{d}{dr'}\left[-\left(\frac{k}{m} - \Omega^2 sen^2(\alpha)\right)r' + gcos(\alpha) + \frac{kL}{2m}\right] = \Omega^2 sen^2(\alpha) - \frac{k}{m}$$

Vemos que queda una constante, que no depende de la posición, así que no hace falta evaluar en nuestro equilibrio. Como éste existe solamente si $\frac{\Omega sen(\alpha)}{\omega_0} > 1$, entonces $\Omega^2 sen^2(\alpha) > \frac{k}{m}$ y $\frac{d\ddot{r}'}{dr'} = \Omega^2 sen^2(\alpha) - \frac{k}{m} < 0$. El equilibrio es estable, lo que esperábamos para un movimiento armónico.