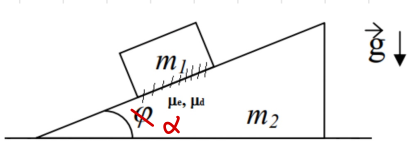
Problema 1. Un bloque de masa m1 se encuentra sobre un plano inclinado de masa m_2.El plano inclinado se encuentra apoyado sobre una superficie horizontal. Solo hay rozamiento entre el bloque y le plano inclinado.



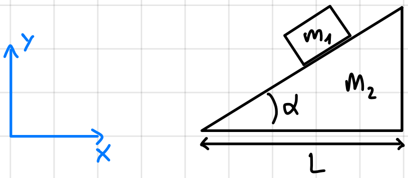
a Realizá los diagramas de cuerpo libre y escribí las ecuaciones de vínculo y de Newton para el plano inclinado y el bloque, indicando claramente el sistema de coordenadas utilizado para cada uno.

b ¿ Que relación deben cumplir μ_e y el ángulo del plano inclinado ϕ para que el blo que no deslice con respecto al plano inclinado?

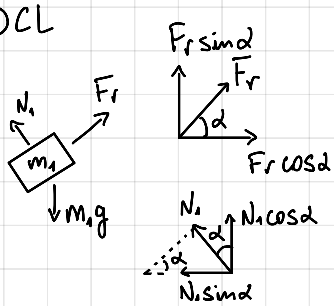
c Suponga que la relación encontrada en (b) no se cumple. Calcule la aceleración del bloque y del plano inclinado con respecto a la superficie horizontal.

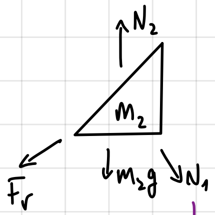
d Inicialmente el bloque se encuentra en el extremo superior del plano inclinado en reposo.Si la base del plano inclinado mide L y el bloque se considera puntual, calcule cuanto tiempo tarda en llegar el bloque a la superficie horizontal.

El problema nos presenta un bloque sobre un plano inclinado. El plano es movil, por lo tanto vamos a considerar un sist fijo al piso



DCL





Por 3ra NL

↳ Por 3ra NL (Ley de Newton) es igual a la normal sobre M_1

Vínculos

$$\tan\alpha = \frac{Y_B}{X_B - X_P} \longrightarrow X_P = X_B - \frac{Y_B}{\tan\alpha}$$

$$Y_P = 0$$

Newton

$m_1)$

$$\hat{e}_{x_1}: -N_1 \sin\alpha + F_r \cos\alpha = m_1 \ddot{x}_B$$

$$\hat{e}_{y_1}: N_1 \cos\alpha - m_1 g + F_r \sin\alpha = m_1 \ddot{y}_B$$

$m_2)$

$$\hat{e}_{x_2}: N_1 \sin\alpha - F_r \cos\alpha = m_2 \ddot{x}_P$$

$$\hat{e}_{y_2}: N_2 - F_r \sin\alpha - m_2 g - N_1 \cos\alpha = 0$$

Tenemos como incógnitas $\ddot{x}_B, \ddot{y}_B, \ddot{x}_P, N_1, N_2, F_r$

En el caso de no deslizamiento $x_B - x_P = const \to \ddot{x}_B = \ddot{x}_P$

$\hookrightarrow \ddot{y}_B = 0$

$$\begin{cases} -N_1 \sin\alpha + F_r \cos\alpha = m_1 \ddot{x}_B & (1) \\ N_1 \cos\alpha - m_1 g + F_r \sin\alpha = 0 & (2) \\ N_1 \sin\alpha - F_r \cos\alpha = m_2 \ddot{x}_B & (3) \\ N_2 - F_r \sin\alpha - m_2 g - N_1 \cos\alpha = 0 & (4) \end{cases}$$

$(1)+(3)$

$0 = (m_1 + m_2)\ddot{x}_B \to \ddot{x}_B = 0$

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ F_r = N_1 \tan\alpha \\ &(2)\ N_1 = \frac{m_1 g}{\cos\alpha} - F_r \tan\alpha \end{aligned}\right\} F_r = \frac{m_1 g}{\cos\alpha}\tan\alpha - F_r \tan^2\alpha \to F_r = (1+\tan^2\alpha)^{-1}\frac{m_1 g}{\cos\alpha}\tan\alpha$$

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \qquad 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

$$F_r = m_1 g \sin\alpha \to N_1 = \frac{m_1 g}{\cos\alpha} - m_1 g \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = m_1 g \cos\alpha$$

Usando entonces la condición de roz estático $|F_r| \leq \mu_e N_1$

$$\underbrace{m_1 g \sin\alpha}_{\geq 0} \leq \mu_e m_1 g \cos\alpha \to \boxed{\tan\alpha \leq \mu_e}$$

Si esta relación no se cumple vamos a estar en una cond de roz dinámico

$\tan\alpha > \mu_e > \mu_d$

Incognitas: $\ddot{x}_P, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B, F_r, N_1, N_2$

$$\ddot{x}_P = \ddot{x}_B - \frac{\ddot{y}_B}{\tan\alpha} \quad (1) \qquad\qquad F_r = \mu_d N_1 \ (6)$$

$$-N_1 \sin\alpha + F_r \cos\alpha = m_1 \ddot{x}_B \quad (2)$$

$$N_1 \cos\alpha - m_1 g + F_r \sin\alpha = m_1 \ddot{y}_B \quad (3)$$

$$N_1 \sin\alpha - F_r \cos\alpha = m_2 \ddot{x}_P \quad (4)$$

$$N_2 - F_r \sin\alpha - m_2 g - N_1 \cos\alpha = 0 \quad (5)$$

$$(2)+(4) \quad \ddot{x}_P = -\frac{m_1}{m_2}\ddot{x}_B \xrightarrow{(1)} \ddot{y}_B = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\ddot{x}_B \tan\alpha \quad (3)$$

$$N_1 \cos\alpha - m_1 g + \mu_d N_1 \sin\alpha = m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\ddot{x}_B \tan\alpha$$

$$N_1 = m_1 \frac{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\ddot{x}_B \tan\alpha + g}{\cos\alpha + \mu_d \sin\alpha}$$

(2)

$$\ddot{x}_B = \frac{N_1}{m_1}(\mu_d \cos\alpha - \sin\alpha) = \frac{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\ddot{x}_B \tan\alpha + g}{\cos\alpha + \mu_d \sin\alpha}(\mu_d \cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$\ddot{x}_B = \frac{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\ddot{x}_B \tan\alpha + g}{\cos\alpha + \mu_d \sin\alpha}\left(\mu_d\cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

$$\ddot{x}_B\left[1 - \frac{\mu_d\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \mu_d\sin\alpha}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\tan\alpha\right] = \frac{\mu_d\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \mu_d\sin\alpha}\, g$$

$$\ddot{x}_B = \frac{\mu_d\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \mu_d\sin\alpha}\, g\left[1 - \frac{\mu_d\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \mu_d\sin\alpha}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\tan\alpha\right]^{-1}$$

$$= \frac{\frac{\mu_d - \tan\alpha}{1+\mu_d\tan\alpha}\, g}{1 - \frac{\mu_d - \tan\alpha}{1+\mu_d\tan\alpha}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\tan\alpha} = \frac{(\mu_d - \tan\alpha)\, g}{1+\mu_d\tan\alpha - (\mu_d - \tan\alpha)\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\tan\alpha}$$

$$= \frac{g}{\frac{1+\mu_d\tan\alpha}{\mu_d - \tan\alpha} - \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\tan\alpha}$$

Vemos entonces que en la dirección horiz el bloque tiene una acel const y negativa. Recordemos que estamos en el caso $\tan\alpha > \mu_d$

$$\ddot{x}_B = \frac{g}{\frac{1+\mu_d\tan\alpha}{\underbrace{\mu_d - \tan\alpha}_{<0}} \underbrace{- \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\tan\alpha}_{<0}} < 0$$

Para un MRUV

$$\Delta X = v_0 + \frac{1}{2}\ddot{x}_B t^2 \qquad \Delta X = L \qquad v_0 = 0$$

$$\boxed{t = \sqrt{-\frac{2L}{\ddot{x}_B}}, \qquad \ddot{x}_B = \frac{g}{\frac{1+\mu_d\tan\alpha}{\mu_d - \tan\alpha} - \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\tan\alpha}}$$

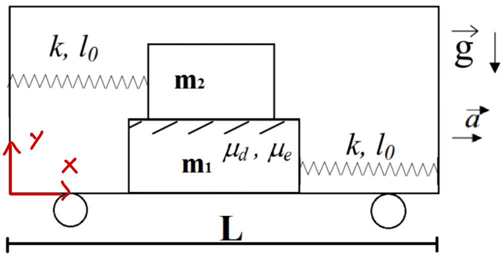
Problema 2. Dentro de un vagón de tren de longitud L, una caja de masa m_2 se encuentra sujeta a la pared de la izquierda por medio de un resorte de constante elástica k y longitud natural $l_0 = \frac{L}{2}$. Esta caja se encuentra apoyada sobre otra caja de masa m_1 que se encuentra sujeto a la pared derecha por medio de un resorte idéntico (con la misma constante elástica y longitud natural). Entre las cajas hay rozamiento, pero no hay rozamiento con el piso del tren. Todo el sistema se encuentra en reposo hasta el instante t=0 en el que el tren acelera con aceleración horizontal y constante $\vec{a}$

a Indique claramente el sistema de referencia y el sistema de coordenadas que va a utilizar. Realize el diagrama de cuerpo libre de ambas cajas indicando las fuerzas que actúan sobre ella y los pares de acción y reacción. Escribí las ecuaciones de vínculo y de Newton que rigen el movimiento de la partícula.

b Suponiendo que las cajas no se separan entre sí, encuentre la posición de equilibrio del sistema para un observador dentro del tren.

c Encuentre la posición de las cajas en función del tiempo, suponiendo que no se separan.

d Encuentre que condición debe cumplir el coeficiente de rozamiento estático para que las cajas no se separen entre sí



Pares acción - reacción:

$mg \longleftrightarrow$ atracción grav al planeta

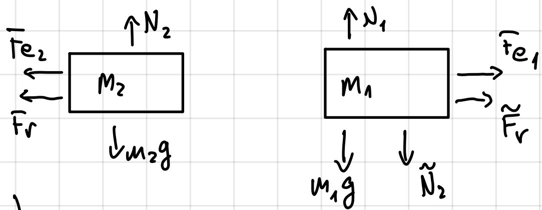
$Fe \longleftrightarrow$ Fza sobre las paredes del vagon en la otra punta del resorte

$N_2 \longleftrightarrow \tilde{N}_2$

$F_r \longleftrightarrow \tilde{F}_r$

$N_1 \longleftrightarrow$ Interacción con el piso del vagón

Me paro en un sist Fijo al vagón



$$\bar{F}e_1 = k(L-x_1-l_0)\hat{e}_x \qquad N_2 = \tilde{N}_2$$

$$\bar{F}e_2 = -k(x_2-l_0)\hat{e}_x \qquad F_r = \tilde{F}_r$$

$M_2)$

$\hat{e}_x: -k(x_2-l_0) - F_r - m_2 a = m_2\ddot{x}_2$ (2)

$\hat{e}_y: N_2 - m_2 g = 0$

$m_1)$

$\hat{e}_x: k(L-x_1-l_0) + F_r - m_1 a = m_1\ddot{x}_1$ (1)

$\hat{e}_y: N_1 - m_1 g - N_2 = 0$

Suponiendo que no se separan entre sí $x_1 = x_2 = x$. Tomando $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$

(1) + (2)

$$-k(x-l_0) - m_2 a + k(L-x-l_0) - m_1 a = 0$$

$$-2kx + kL - a(m_1+m_2) = 0$$

$$\boxed{x = \frac{L}{2} - \frac{a(m_1+m_2)}{2k}} \rightarrow \text{Pos de eq}$$

Tomando $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}$ $\quad x_1 = x_2 = x$

(1) + (2)

$$-k(x-l_0) - \cancel{F_r} - m_2 a + k(L-x-l_0) + \cancel{F_r} - m_1 a = (m_2+m_1)\ddot{x}$$

$$-2kx - (m_1+m_2)a + kL = (m_1+m_2)\ddot{x} \qquad m_1+m_2 \equiv m$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x + a - \frac{kL}{m} = 0$$

Las CI $x(t=0) = \frac{L}{2}$ $\quad \dot{x}(t=0) = 0$ $\qquad x_{eq} = \frac{L}{2} - \frac{ma}{2k}$

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + x_{eq}$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \xrightarrow[CI]{} B = 0$$

$$x(t=0) = A + \frac{L}{2} - \frac{ma}{2k} = \frac{L}{2} \rightarrow A = \frac{ma}{2k}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{L}{2} - \frac{ma}{2k}(1-\cos(\omega t))} \quad \triangle$$

Con este resultado podemos ir a alguna eq y despejar F_r, por ej (2)

$$-k(x-l_0) - F_r - m_2 a = m_2\ddot{x}$$ Recordemos que no se separan $x_1 = x_2 = x$

De $\triangle$ vemos que $\ddot{x}(t) = -\frac{ma}{2k}\omega^2\cos(\omega t)$

$$-k\left[\cancel{\frac{L}{2}} - \frac{ma}{2k}(1-\cos(\omega t)) - \cancel{l_0}\right] - F_r - m_2 a = -m_2\frac{ma}{2k}\omega^2\cos(\omega t)$$

$l_0 = \frac{L}{2}$

$$F_r = \frac{ma}{2}(1-\cos\omega t) - m_2 a + m_2\frac{ma}{2k}\omega^2\cos(\omega t) \qquad |F_r| \leq \mu_e N_2 = \mu_e m_2 g \quad (*)$$

$$|F_r| = \left|\frac{ma}{2}\underbrace{(1-\cos\omega t)}_{\geq 0} - m_2 a + m_2\frac{ma}{2k}\omega^2\underbrace{\cos(\omega t)}_{\geq -1}\right| \geq \left|\underbrace{m_2 a + m_2\frac{ma}{2k}\omega^2}_{\geq 0}\right| = m_2 a + m_2\frac{ma}{2k}\omega^2$$

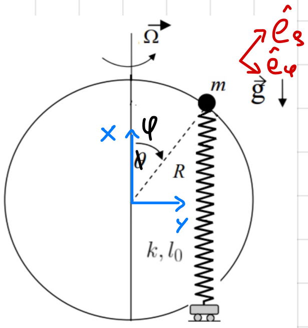
Entonces ahora si usando la relación (*)

$$\boxed{a + \frac{ma}{2k}\omega^2 \leq \mu_e g, \quad m = m_1 + m_2}$$

Problema 3. Una bolita de masa m se encuentra engarzada en un aro de radio R ubicado en posición vertical. El aro del alambre gira alrededor de su diametro vertical con velocidad angular $\vec{\Omega}$ constante. A la misma altura que la parte más baja del aro se encuentra un carrito libre de moverse sobre un riel horizontal que también gira con velocidad angular $\vec{\Omega}$ constante

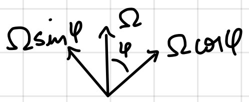
a Indique claramente el sistema de referencia y el sistema de coordenadas que va a utilizar. Realize el diagrama de cuerpo libre de la masa indicando las fuerzas que actúan sobre ella y los pares de acción y reacción. Escribí las ecuaciones de vínculo y de Newton que rigen el movimiento de la partícula.

b Encuentre los puntos de equilibrio del sistema y analice su estabilidad.

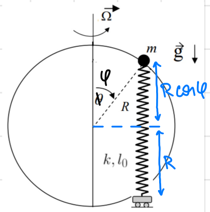


Como vimos en la práctica, la forma de encarar este tipo de problemas es tomar un sist de ref que rote junto con el aro. Consideramos entonces en este SR un sist de coord como se ve en la figura

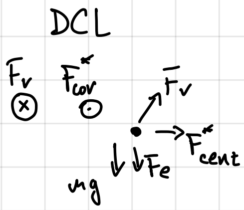
La vel angular



$$\bar{\Omega} = \Omega \hat{e}_x = \Omega \cos\varphi\, \hat{e}_\rho - \Omega \sin\varphi\, \hat{e}_\varphi$$



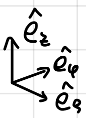
DCL



$$\bar{F}_e = -k\big(\underbrace{R + R\cos\varphi - l_0}_{\text{Estiramiento del resorte}}\big)\,\hat{e}_x$$

$$= -k(R + R\cos\varphi - l_0)\cos\varphi\, \hat{e}_\rho + k(R + R\cos\varphi - l_0)\sin\varphi\, \hat{e}_\varphi$$

$$\bar{F}^*_{cent} = -m\bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r})$$



$$\bar{\Omega} \times \bar{r} = (\Omega \cos\varphi\, \hat{e}_\rho - \Omega \sin\varphi\, \hat{e}_\varphi) \times R\hat{e}_\rho = R\Omega \sin\varphi\, \hat{e}_z$$

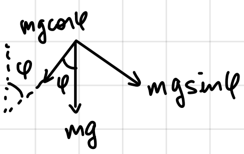
$$\bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}) = (\Omega \cos\varphi\, \hat{e}_\rho - \Omega \sin\varphi\, \hat{e}_\varphi) \times R\Omega \sin\varphi\, \hat{e}_z = -R\Omega^2 \cos\varphi \sin\varphi\, \hat{e}_\varphi - R\Omega^2 \sin^2\varphi\, \hat{e}_\rho$$

$$= -R\Omega^2 (\sin^2\varphi\, \hat{e}_\rho + \cos\varphi \sin\varphi\, \hat{e}_\varphi)$$

$$\boxed{\bar{F}^*_{cent} = mR\Omega^2 (\sin^2\varphi\, \hat{e}_\rho + \cos\varphi \sin\varphi\, \hat{e}_\varphi)}$$

$$\bar{F}^*_{cor} = -2m\bar{\Omega} \times \dot{\bar{r}} \qquad \dot{\bar{r}} = R\dot{\varphi}\, \hat{e}_\varphi$$

$$\boxed{\bar{F}^*_{cor} = -2mR\Omega\dot{\varphi} \cos\varphi\, \hat{e}_z}$$



Newton

$$\hat{e}_\rho : -k(R+R\cos\varphi - l_0)\cos\varphi + mR\Omega^2 \sin^2\varphi + F_{r\rho} - mg\cos\varphi = -mR\dot{\varphi}^2$$

$$\hat{e}_\varphi : k(R+R\cos\varphi - l_0)\sin\varphi + mR\Omega^2 \cos\varphi\sin\varphi + mg\sin\varphi = mR\ddot{\varphi}$$

Para analizar los ptos de equil y estabilidad vamos a la ecm

$$k(R+R\cos\varphi - l_0)\sin\varphi + mR\Omega^2 \cos\varphi\sin\varphi + mg\sin\varphi = mR\ddot{\varphi}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{k}{m}\left(1+\cos\varphi - {l_0}/{R}\right)\sin\varphi + \Omega^2\cos\varphi\sin\varphi + \frac{g}{R}\sin\varphi$$

Tomando $l_0 = R$ y $\ddot{\varphi} = 0$ para buscar los ptos de equil

$$\left(\frac{k}{m} + \Omega^2\right)\cos\varphi\sin\varphi + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0$$

$$\left[\left(\frac{k}{m} + \Omega^2\right)\cos\varphi + \frac{g}{R}\right]\sin\varphi = 0$$

$$\varphi_{eq} = \left\{0, \pi, \varphi : \cos\varphi = \frac{-g/R}{\Omega^2 + k/m}\right\}$$ Este $\varphi_{eq} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

El segundo pto de equil existe si $\frac{g/R}{\Omega^2 + k/m} < 1 \longrightarrow mg < mR\Omega^2 + kR$

$$\ddot{\varphi} = \cos\varphi\sin\varphi\left(\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) + \frac{g}{R}\sin\varphi$$

$$\frac{d\ddot{\varphi}}{d\varphi} = \left(\Omega^2 + \frac{k}{m}\right)\underbrace{\cos(2\varphi)}_{= 2\cos^2\varphi - 1} + \frac{g}{R}\cos\varphi$$

$$\left.\frac{d\ddot{\varphi}}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \left(\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) + \frac{g}{R} > 0 \quad \text{Inestable!}$$

$$\left.\frac{d\ddot{\varphi}}{d\varphi}\right|_{\varphi=\pi} = \left(\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) - \frac{g}{R} \begin{cases} >0 & \text{si } mg < mR\Omega^2 + kR \\ <0 & \text{si } mg > mR\Omega^2 + kR \end{cases}$$

$$\left.\frac{d\ddot{\varphi}}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_{eq}} = \left(\Omega^2 + \frac{k}{m}\right)\left(2\cos^2\varphi_{eq} - 1\right) + \frac{g}{R}\cos\varphi_{eq}$$

st $\cos\varphi_{eq} = \frac{-g/R}{\Omega^2 + k/m}$

$$= \frac{2g^2/R^2}{\Omega^2 + k/m} - \Omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{g^2/R^2}{\Omega^2 + k/m}$$

Descartado por

$$= \frac{g^2/R^2}{\Omega^2 + k/m} - \Omega^2 - \frac{k}{m} = \frac{g^2/R^2 - \left(\Omega^2 + \frac{k}{m}\right)^2}{\Omega^2 + k/m} \begin{cases} \cancel{>0 \quad \text{si } mg > mR\Omega^2 + kR} \\ <0 \quad \text{si } mg < mR\Omega^2 + kR \end{cases}$$

Si existe es estable