El péndulo de Foucault

Hernán G Solari

26 de abril de 2014

[1] Vamos a considerar el péndulo de la figura con el objetivo de tratar de entender como rota debido al movimiento de la Tierra

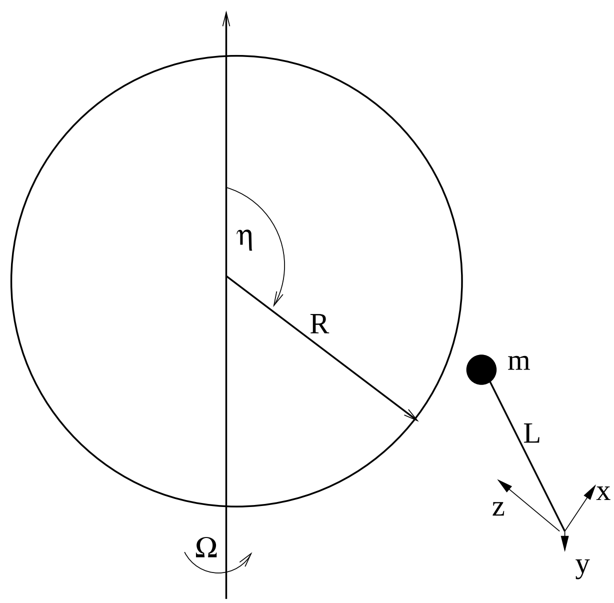

Figura 1: Esquema del pédulo fuera de escala

El radio $\boldsymbol{R}$ corresponde a la dirección de la fuerza de graved local que consecuentemente se escribirá $\boldsymbol{F}_g = -m\boldsymbol{R}/|\boldsymbol{R}|g$, la dirección de nuestra terna local identificada como $\hat{\boldsymbol{z}}$ corresponde a la dirección de la plomada. Dado que la dirección de la plomada está dada por $\boldsymbol{F}_g - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{F}_g + m(\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{R} - (\boldsymbol{\Omega}.\boldsymbol{R})\boldsymbol{\Omega})$, podemos elegir un segundo vector, $\hat{\boldsymbol{x}}$, perpendicular a $\hat{\boldsymbol{z}}$ en el plano que contiene a $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{\Omega}$. El vector $\hat{\boldsymbol{y}}$ lo elegimos perpendicular a este plano de manera de conformar una terna derecha. El vector $\boldsymbol{R}$ se extiende en realidad hasta el punto de sosten del péndulo. De tal manera que la posición del péndulo respecto de una

[1] Hay una versión en la Web mas o menos diguiendo estas lineas

terna que rota fija al centro de la tierra es $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{X}$ siendo $|\boldsymbol{X}|=L$, y $\boldsymbol{X}$ el vector posición del péndulo respecto de la terna local.

Las ecuaciones de movimiento en la terna rotante fija al centro de la tierra resultan entonces

$$m\frac{d^2\boldsymbol{X}}{dt^2}=m\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{F}_g-2m\boldsymbol{\Omega}\times\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}-m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{X}))$$

la fuerza $\boldsymbol{F}_g-m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R})=mg'\hat{\boldsymbol{z}}$ es la fuerza que da dirección a la plomada, en tanto $m\boldsymbol{\tau}$ es la tensión de la cuerda ejercida en la dirección $-\boldsymbol{X}$, después de eliminar el factor m que está presente en todos los términos nos quedamos con

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}}{dt^2}=\boldsymbol{\tau}+g'\hat{\boldsymbol{z}}-2\boldsymbol{\Omega}\times\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}-m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{X}) \tag{1}$$

Realizamos entonces la primer aproximación al considerar que los tiempos característicos para los cambios en $\boldsymbol{X}$ son $T_P=\sqrt{L/g}$ (en la demostración uno 10s) mientras Ω tiene un tiempo característico de $T_T(24*3600s)/(2\pi)=13751s$ resulta que $T_P/T_T\ll 1$y por lo tanto los terminos son de distintos órdenes de magnitud siendo el término de Coriolis sustancialmente mayor que el de la aceleración centrífuga, por lo que despreciamos a este para quedarnos con la primera corrección al movimiento del péndulo debida a la rotación de la tierra.

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}}{dt^2}=\boldsymbol{\tau}+g'\hat{\boldsymbol{z}}-2\boldsymbol{\Omega}\times\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} \tag{2}$$

El vector $\boldsymbol{\Omega}$ es aproximadamente $\boldsymbol{\Omega}=\Omega(\sin(\eta),0,-\cos(\eta))$ donde el aproximadamente se refiere a que en realidad es $\boldsymbol{R}$ y no $\hat{\boldsymbol{z}}$ el que forma un ángulo η con el eje de rotación.

La tercera aproximación tiene que ver con las pequeñas oscilaciones, en nuestro péndulo el apartamiento de la normal es de aproximadamente $1{,}2/27=0{,}048rad$, es decir que los ángulos involucrados son muy pequeños y la velocidad máxima en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$ es tan solo 0.048 veces la velocidad máxima en el plano perpendicular xy. Vamos a considerar entonces

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\simeq(dx/dt,dy/dt,0)$$

De lo cual resulta que

$$\boldsymbol{\Omega}\times\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\simeq\Omega(\cos(\eta)dy/dt,-\cos(\eta)dx/dt,\sin(\eta)dy/dt)$$

En el plano xy aparece una rotacion de módulo $\Omega\cos(\eta)$ y también una corrección a la fuerza en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$. De las dos, la que más nos interesa es la rotación pues en el plano xy solo había fuerzas radiales (cuando $\Omega=0$). Para estudiar la rotación nos coviene cambiar el sistema de coordenadas. Pasamos a coordenadas cilíndricas, donde

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X} &= (r\cos(\phi), r\sin(\phi), z = r\hat{\boldsymbol{r}} + z\hat{\boldsymbol{z}} \\
\hat{\boldsymbol{r}} &= (\cos(\phi), \sin(\phi), 0) \\
\hat{\boldsymbol{\phi}} &= (\sin(\phi), -\cos(\phi), 0) \\
\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} &= \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{d\phi}{dt}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{dz}{dt}\hat{\boldsymbol{z}} \approx \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{d\phi}{dt}\hat{\boldsymbol{\phi}} \\
\frac{d^2\boldsymbol{X}}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{d(r\frac{d\phi}{dt})}{dt}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\boldsymbol{z}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\hat{\boldsymbol{\phi}} - r(\frac{d\phi}{dt})^2\hat{\boldsymbol{r}} \\
\hat{\boldsymbol{x}} &= \cos(\phi)\hat{\boldsymbol{r}} + \sin(\phi)\hat{\boldsymbol{\phi}} \\
\hat{\boldsymbol{y}} &= \sin(\phi)\hat{\boldsymbol{r}} - \cos(\phi)\hat{\boldsymbol{\phi}}
\end{aligned}
$$

con lo cual el término de Coriolis pasa a ser:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\boldsymbol{X}}{dt} &\simeq \Omega(\sin(\eta)(\cos(\phi)\hat{\boldsymbol{r}} + \sin(\phi)\hat{\boldsymbol{\phi}}) - \cos(\eta)\hat{\boldsymbol{z}}) \times \frac{d\boldsymbol{X}}{dt} && (3) \\
&= \Omega((-\cos(\eta)(\frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{\phi}} - r\frac{d\phi}{dt}\hat{\boldsymbol{r}}) + \sin(\eta)\hat{\boldsymbol{z}} \dots) && (4)
\end{aligned}
$$

Finalmente, la tensión $\boldsymbol{\tau}$ no tiene componentes en $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ por lo que proyectando la ecuación de movimiento en esta dirección obtenemos:

$$\frac{d(r\frac{d\phi}{dt})}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt} = (\frac{d(r^2\frac{d\phi}{dt})}{dt})/r = 2\Omega\cos(\eta)\frac{dr}{dt} \tag{5}$$

multiplicando por r ambos términos resulta la integral

$$r^2\frac{d\phi}{dt} = r^2\Omega\cos(\eta) + C \tag{6}$$

donde la constante de integración C vale $C = -r(0)^2\Omega\cos(\eta)$ ya que $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ (soltamos la masa alejandola del punto de equilibrio sin darle impulso)

Finalmente

$$\frac{d\phi}{dt} = \Omega\cos(\eta)(1 - r^2(0)/r^2) \tag{7}$$

La velocidad angular solo se anula cuando llega a los extremos de amplitud. El radio no llega a anularse nunca porque en la ecuación radial tenemos

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r(\frac{d\phi}{dt})^2 + \hat{\boldsymbol{r}}.\boldsymbol{\tau} + 2\Omega\cos(\eta)r\frac{d\phi}{dt} \tag{8}$$

y si r decrece mucho $\frac{d\phi}{dt}$ crece mucho y r sufre una aceleración que lo hace crecer. De tal manera el péndulo no pasa por el centro. El término $\Omega\cos(\eta)$ en Eq.7 representa una rotación constante que es el efecto Coriolis. El término $\Omega\cos(\eta)r^2(0)/r^2$ corresponde al hecho de que el ángulo ϕ cambia en casi π entre un extremo y otro de la oscilación, el cambio más rápido se da cuando pasa cerca del centro. Si lo pensamos desde un sistema que rota con eje $\hat{\boldsymbol{z}}$ y velocidad $\Omega\cos(\eta)$ solo veríamos la oscilación de un péndulo cuya velocidad angular incial fue de $-\Omega\cos(\eta)$ al soltarlo con un apartamiento $r(0)$. Observamos que si en Eq.5 hacemos $\Omega = 0$ resulta la solucíon $r^2\frac{d\phi}{dt} = C$ con $C = \Omega\cos(\eta)r^2(0)$

Debería estar claro que el ángulo η se puede tomar como $90 - latitud$ siendo la latitud positiva en el Norte y negativa en el Sur. En tal caso, $\cos(\eta) = \sin(latitud)$ y por tanto, el péndulo gira en direcciones contrarias en el Norte y el Sur.

La energía aproximada del péndulo se obtiene multiplicando escalarmente por $\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}$ la ecuación Eq. 2 y recordando que la velocidad es perpedicular a $\boldsymbol{X}$ y por tanto a $\boldsymbol{\tau}$, pero tambien es perpendicular al término de Coriolis, obtenemos

$$\frac{1}{2}|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}|^2 - g'z = E \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}|((\frac{dr}{dt}))^2 + r^2(\frac{d\phi}{dt})^2 - g'z = E \tag{10}$$

Recordando que $z/L = \cos(\theta)$ y $r/L = \sin(\theta)$ donde θ es el ángulo con que se aparta el péndulo de la dirección de la plomada se arriba a la equación para éste ángulo, donde se puede verificar cual es el ángulo mínimo que forma el péndulo, que corresponde al punto en que $\frac{d\theta}{dt} = 0$ es decir

$$\frac{1}{2}|(r^2(\frac{d\phi}{dt})^2 - g'z = E/m \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}|(r^4(\frac{d\phi}{dt})^2/r^2 - g'z = E/m \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}|(r^4(\frac{d\phi}{dt})^2/r^2 - g'z = E/m \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}(\Omega\cos(\eta)(r^2 - r^2(0)))^2/r^2 - g'z = E/m \tag{14}$$

Donde la última equación se resuelve facilmente para $r^2 \equiv y$ resultando en una expresión cuadrática en y.