Problema 1

a) Para verificar si una fuerza es conservativa podemos tomar distintos caminos: 1) $\bar{\nabla} \times \bar{F} = 0$

2) $W \equiv \oint \bar{F} \cdot d\bar{e} = 0$

3) $\bar{F} = -\nabla V$ (gradiente de un potencial)

Como el item b) nos pide hallar V_{ef} usaremos el camino 3)

$$\int F(r)\, dr = \frac{GmM}{r} + \frac{\alpha}{3r^3}$$

$$\boxed{V(r) = -\frac{GmM}{r} - \frac{\alpha}{3r^3}} \Rightarrow -\bar{\nabla} V = \bar{F} \Rightarrow F \text{ conservativa}$$

Conservaciones: (NO) $\bar{P} \rightarrow \exists \bar{F}_{EXT}$ (Fza grav. modificada)

(SI) $\bar{L} \rightarrow \exists \bar{F}_{EXT}$ central $\Rightarrow \sum \overset{\circ}{G}_{EXT} = 0$

(SI) E = $\nexists$ fzas no conservativas.

$$E = T + V = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r} - \frac{\alpha}{3r^3}$$

$\bar{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$\bar{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

$\bar{r} = r\hat{r}$

Como $\bar{L}$ se conserva $\quad \bar{L}_i^{\circ} = \bar{L}_t^{\circ} = \bar{r} \times m\bar{v}$

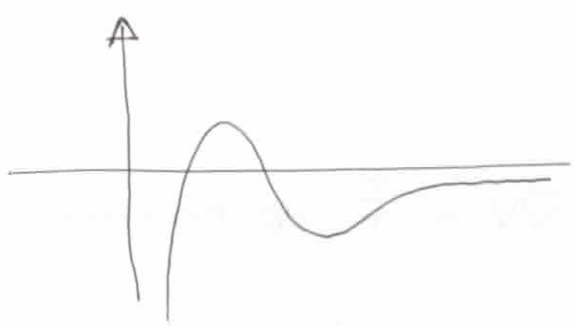
$$\cancel{m} d v_0 \hat{z} = \cancel{m} r^2 \dot{\theta} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{d v_0}{r^2} \qquad \dot{\theta}^2 = \frac{d^2 v_0^2}{r^4}$$

reemplazando la expresión de $\bar{v}^2$ y de $\dot{\theta}^2$ en E tenemos:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \frac{d^2 v_0^2}{r^4} - \frac{GmM}{r} - \frac{\alpha}{3r^3}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2} m \frac{d^2 v_0^2}{r^2} - \frac{GmM}{r} - \frac{\alpha}{3r^3}}}_{\to V_{ef.}}$$



Aprox

Para hallar las posiciones de equilibrio hacemos $\frac{\partial V_{ef}}{\partial r} = 0$

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial r} = - \frac{m d^2 v_0^2}{r^3} + \frac{GmM}{r^2} + \frac{\alpha}{r^4} = 0 \quad \Rightarrow \text{si} \quad r \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad GmMr^2 - m d^2 v_0^2 r + \alpha = 0$$

una cuadrática con dos raíces:

$$r_{eq\pm} = \frac{m d^2 v_0^2 \pm \sqrt{m^2 d^4 v_0^4 - 4GmM\alpha}}{2GmM}$$

Siendo r_{eq-} un punto de eq. inestable

r_{eq+} eq. estable.

Si $\alpha \to 0$ tenemos

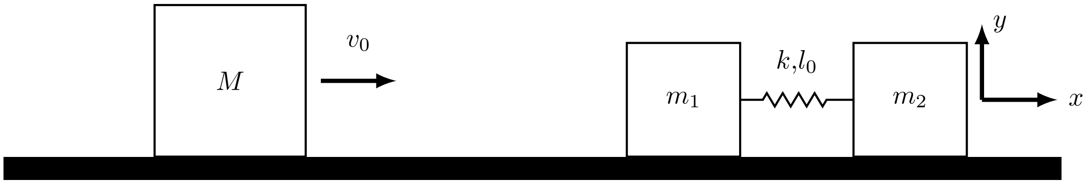
$$r_{eq} = \frac{m d^2 v_0^2 \pm \sqrt{m^2 d^4 v_0^4}}{2GmM}$$

$$r_{eq} = \frac{m d^2 v_0^2 \pm m d^2 v_0^2}{2GmM} = \frac{\cancel{2} d^2 \cancel{m} v_0^2}{\cancel{2} G \cancel{m} M} = \frac{d^2 v_0^2}{GM}$$

y $r=0 \notin$ a la solución hallada.

Si $\alpha \to 0$ volvemos al resultado conocido y al potencial gravitatorio

Ejercicio 2.



1 Conservaciones y velocidad después del choque

1.1 Conservaciones

Veamos las conservaciones antes y después del choque:

(Usemos $m_3 \equiv M$)

Si consideramos el sistema formado por $\{M, m_1, m_2\}$:

(**P**) Las únicas fuerzas externas son los pesos y las normales, que se anulan para cada masa:

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{3} m_i\mathbf{g} - \mathbf{N}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{P} \; es \; cte.$$

($\mathbf{L^o}$) De a pares, las fuerzas externas son opuestas y aplicadas sobre los mismos puntos, entonces, para cualqueir punto o:

$$\sum \tau^o_{ext} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{r}^o_i \times \mathbf{P}_i - \mathbf{r}^o_i \times \mathbf{N}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{L}^o \; es \; cte.$$

(E) Para el sistema elegido, las únicas fuerzas no conservativas son las normales, que no hacen trabajo:

$$\sum \mathbf{F}_{NC} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{N}_i \text{ pero } \sum W_{FNC} = \sum_{i=1}^{3} W_{Ni} = 0 \Rightarrow E \; es \; cte.$$

Si, en cambio, hubiésemos considerado el sistema formado por $\{M, m_1\}$:

(**P**) La fuerza elástica sobre m_1 es externa, entonces:

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F}_{el} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{P} \neq \mathbf{cte}$$

($\mathbf{L^o}$) Usemos en este caso $o \equiv CM$. La fuerza elástica no hace torque respecto del centro de masa, porque $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}_{el} \Rightarrow \mathbf{L}^{CM} = \mathbf{cte}$

(E) En este caso la fuerza elástica NO es conservativa, entonces la energía del sistema no se conserva.

$$\sum \mathbf{F}_{NC} = \mathbf{F}_{el} \text{ y } \sum W_{FNC} = W_{F_{el}} \neq 0$$

En cualquiera de los dos casos, durante el choque:

Notemos que se trata de un choque plástico entre m_1 y m_3 y es considerado instantáneo (i.e.: $\Delta t_{choque} \sim 0$)

(**P**) Por hipótesis de choque instantáneo: $\Delta \mathbf{P} = \sum \mathbf{F}_{ext} \Delta t \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0 \Rightarrow \mathbf{P} \; es \; cte.$

($\mathbf{L}^o$) Por la misma hipótesis ($\Delta t \to 0$), $\mathbf{L}^o$ se conservará.

(E) Como sabemos, en un choque plástico se pierde energía dejando las masas pegadas, $\Rightarrow E \neq cte$

1.2 Velocidad de M y m_1 después del choque

Para calcular la velocidad de las masas M y m_1 que quedan pegadas después del choque, usamos las conservación de P durante el choque:

$$M\mathbf{v}_0 = (M + m_1)\mathbf{v}_{M+m1} \Rightarrow \mathbf{v}_{M+m1} = \frac{Mv_0}{(M + m_1)}\hat{x}$$

2 Conservación de la velocidad del centro de masa

$$\mathbf{P}_{CM} = \mathbf{P}_T = \mathbf{cte}$$

$$\mathbf{P}_{CM} = \mathbf{v}_{CM}(m_1 + m_2 + M) = \mathbf{cte} \iff \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{cte}$$

3 Descripción del movimiento

Como el $\mathbf{P}_{CM}$ se conserva, sabemos que el centro de masa se moverá con velocidad constante (MRU), pero la velocidad de las masas por separado no se conserva, porque actúa sobre cada una de ellas una fuerza elástica. Las masas oscilarán armónicamente.

Planteemos las ecuaciones de Newton para obtener la frecuencia de oscilación:
(Usemos ahora $M + m_1 \equiv m_{13}$ y $x_1 = x_3 = x_{13}$)

$$13 : m_{13}\ddot{x}_{13} = k[(x_2 - x_{13}) - l_0] \Rightarrow \ddot{x}_{13} = \frac{k}{m_{13}}[(x_2 - x_{13}) - l_0]$$

$$2 : m_2\ddot{x}_2 = -k[(x_2 - x_{13}) - l_0] \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2}[(x_2 - x_{13}) - l_0]$$

Si definimos la distancia entre las masas como $x \equiv x_2 - x_{13} \Rightarrow$

$$2 - 13 = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_{13} = -k\frac{m_{13} + m_2}{m_2 m_{13}}[(x_2 - x_{13}) - l_0] \Rightarrow \ddot{x} = -k\frac{m_{13} + m_2}{m_2 m_{13}}[x - l_0]$$

Ahora definimos $\mu \equiv \frac{m_2 m_{13}}{m_{13}+m_2}$, $\Rightarrow$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{\mu}x + \frac{k}{\mu}l_0$$

Que es la ecuación del oscilador armónico, con frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$

Resolución Problema 3 del parcial

Se detallan varias formas de encontrar la sol

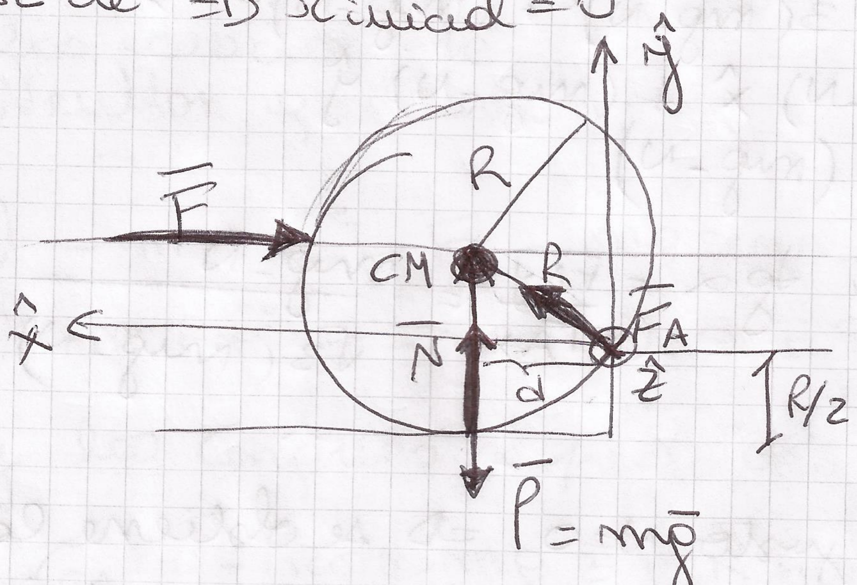
1) se pide encontrar la situación de equilibr

$\Rightarrow$ si inicialmente el cuerpo no se traslada

rota debe pedirse $\sum \bar{F}^{ext} = 0 \Rightarrow v_{CM} = cte$

v_{CM} inicial $= 0$ y además $\sum \tau^{ext} = 0 \Rightarrow$

$\Omega = cte \Rightarrow$ y Ω inicial $= 0$



Planteo las Ec. de Newton y pido $= 0$

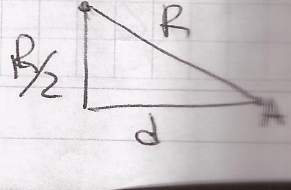
eje $\hat{x}$) $-F + F_{Ax} = 0$ (1)

eje $\hat{y}$) $N - mg + F_{Ay} = 0$ (2)

Planteo Torques desde el punto A e igualo =

$\hat{z}$) $\sum \tau^{A} = mg\,d - N d - F(R/2) = 0$ (3)

uso pitágoras para hallar d



$R^2 = (R/2)^2 + d^2 \Rightarrow d^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4} R^2$

$d = \frac{\sqrt{3}}{2} R$ de (3) despejo F

$E_5 \Rightarrow (mg - N) d = \frac{FR}{2} \Rightarrow (mg-N)\frac{\sqrt{3}}{2} R = \frac{FR}{2}$

queda:

$\Rightarrow \vec{F} = \sqrt{3}(mg - N)\,(-\hat{x})$

de (1) $F_{Ax} = \sqrt{3}(mg-N)$

$F_{Ay} = mg - N$

$|\vec{F_A}| = \sqrt{3(mg-N)^2 + (mg-N)^2} \Rightarrow$

$\vec{F_A} = \sqrt{3}(mg-N)\,\hat{x} + (mg-N)\,\hat{y}$

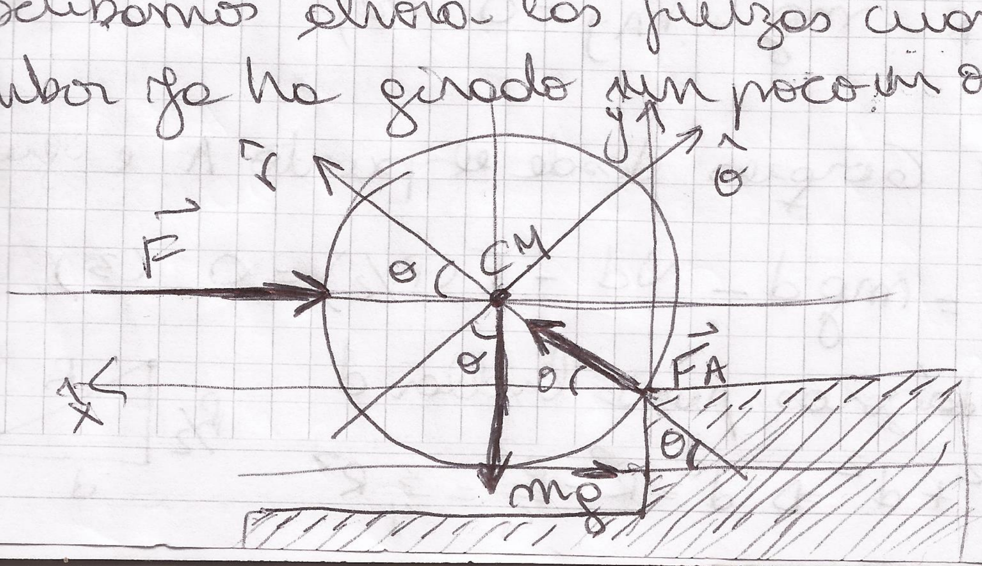
$|\vec{F_A}| = 2(mg-N)$

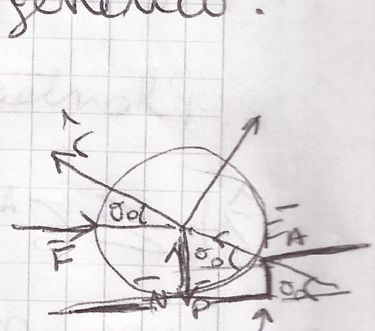
y con dirección $\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{mg-N}{\sqrt{3}(mg-N)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \alpha = 30°$

Notar que si justo $N=0 \Rightarrow$ se obtiene la fuerza mínima necesaria para subir el escalón.

2) Escribamos ahora las fuerzas cuando el tambor ya ha girado un poco un θ genérico:





θ_0 inicial $= 30° = \pi/6$

HOJA N°

FECHA

Notar que $\vec{F}_A$ es radial $\vec{F}_A = F_A \hat{r}$ porque siempre es $\perp$ a la superficie en contacto

$\vec{F}$ tiene componentes en $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$

$$\vec{F} = F\cos\theta\,(-\hat{r}) + F\,\text{sen}\,\theta\,(\hat{\theta})$$

y el peso tiene componentes en $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$

$$\vec{P} = mg\cos\theta\,(-\hat{\theta}) + mg\sin\theta\,(-\hat{r})$$

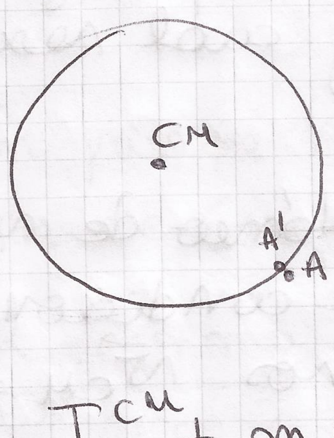
Las ecuaciones de Newton quedarían:

$\hat{r})$ $\quad -mR\dot{\theta}^2 = F_A - mg\,\text{sen}\,\theta - F\cos\theta \quad (4)$

$\hat{\theta})$ $\quad mR\ddot{\theta} = -mg\cos\theta + F\,\text{sen}\,\theta. \quad (5)$

y los torques respecto de A:

$$\tau_A = -R\cos\theta\, mg\,\hat{z} + R\sin\theta\, F\,\hat{z} = I^A\,\dot{\Omega} \;($$



El dato era I^{CM}

$\Rightarrow$ para tener I^A

$A' \approx A$

uso el teorema de steiner

$$I^A = I^{CM} + mR^2$$

y además $\dot{\Omega} = \ddot{\theta} \quad (7)$

NOTA

Las fuerzas que realizan trabajo son las componentes tangenciales de la fuerza F y el peso (ya que las componentes radiales como en el caso de F_A siempre son $\perp$ al movimiento).

No se pedía el cálculo en este punto pero calculemos entonces estos trabajos:

$$W_F = \int_{30^\circ=\pi/6}^{\pi/2} F \operatorname{sen}\theta \underbrace{\hat{\theta}\cdot\hat{\theta}}_{1} \underbrace{R\,d\theta}_{dl} = -FR\cos\theta \Big|_{30^\circ=\pi/6}^{\pi/2}$$

$$= FR\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (8)$$

$$W_{mg} = \int_{30^\circ=\pi/6}^{\pi/2} mg\cos\theta \underbrace{(-\hat{\theta})\cdot\hat{\theta}}_{-1} \underbrace{R\,d\theta}_{dl} = mgR\operatorname{sen}\theta \Big|_{30^\circ=\pi/6}^{\pi/2}$$

$$= -\frac{mgR}{2} \quad (9)$$

3) Veamos ahora con qué Ω llega el tambor arriba del escalón y cuál resulta la v_{CM} en ese instante.

El punto A es eje instantáneo de rotación por lo cual usando la condición de rigidez y que $v_{A'}=0$ obtenemos $\vec{v}_{CM} = \Omega R\,\hat{\theta}$

$$\vec{v}_{CM} = \underbrace{\vec{v}_{A'}}_{0} + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_{A'})$$

$$\vec{v}_{CM} = \Omega R\,\hat{\theta} \quad (10)$$

podemos hallar Ω integrando las ecuaciones dinámicas por ejemplo a partir de Newton

de (5) despejo $\ddot{\theta}$ y uso regla de la cadena

(11) $$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} = g\frac{\cos\theta}{R} + \frac{F\,\mathrm{sen}\,\theta}{mR}$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int_{30^\circ=\pi/6}^{\pi/2} \left(-g\frac{\cos\theta}{R} + \frac{F\,\mathrm{sen}\,\theta}{mR}\right) d\theta =$$

$$= -g\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{R}\Big|_{30^\circ=\pi/6}^{\pi/2} - \frac{F\cos\theta}{mR}\Big|_{30^\circ=\pi/6}^{\pi/2} = \frac{-g}{2R} + \frac{F\sqrt{3}}{mR2} = \frac{\dot{\theta}^2}{2}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \Omega = \sqrt{\frac{\cancel{2}F\sqrt{3}}{\cancel{2}mR} - \frac{g}{R}}$$

$$y\ \bar{v}_{CM} = \Omega R\hat{\theta} = \sqrt{\frac{\cancel{2}F\sqrt{3}}{\cancel{2}mR} - \frac{g}{R}}\ R\ \hat{\theta}$$

o también puede integrarse a partir de la ecuación de torques usando (6) y (7) despejo

$$\ddot{\theta} = \frac{-R\cos\theta\, mg + R\sin\theta F}{I^{CM} + mR^2}$$

y teniendo en cuenta regla de la cadena (11) se puede integrar.

$$\int_0^{\pi/2} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int_{30°=\frac{\pi}{6}}^{\pi/2} -\frac{Rmg}{I_{CM}+mR^2} \cos\theta\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}=30°}^{\pi/2} \frac{FR}{I_{CM}+mR^2} \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{-Rmg}{I^{CM}+mR^2} \operatorname{Sen}\theta \Big|_{30°=\pi/6}^{\pi/2} \frac{-FR}{I_{CM}+mR^2} \cos\theta \Big|_{30°=\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\dot{\theta}^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{\frac{Rmg}{2} + \frac{FR\sqrt{3}}{2}}{I^{CM}+mR^2}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\cancel{2}FR\sqrt{3} - \cancel{2}mgR}{I^{CM}+mR^2}}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{\cancel{2}FR\sqrt{3} - \cancel{2}mgR}{I^{CM}+mR^2}}$$

$$y \ \vec{v}_{CM} = \sqrt{\frac{\cancel{2}FR\sqrt{3} - \cancel{2}mgR}{I^{CM}+mR^2}}\, R\ \hat{\theta}$$

Este mismo resultado también pued hallar por energía, ya que sabemos que la variación de la energía cinética es el + trabajo de ~~todos~~ los fuerzas (sean éstas conservativas o no) y éstos trabajos ya fueron calculad. Veamos entonces cómo puede ser:

NOTA

tomado desde el punto A' que es eje instantáneo de rotación, el movimiento del tambor es una rotación pura por lo que no hay término de traslación, entonces:

$$\frac{I^A \Omega^2}{2} = \frac{FR\sqrt{3}}{2} - \frac{mgR}{2}$$

$$\frac{(I^{CM} + mR^2)\,\Omega^2}{2} = \frac{FR\sqrt{3}}{2} - \frac{mgR}{2}$$

$$\frac{(I^{CM} + mR^2)\,\dot{\theta}^2}{2} = \frac{FR\sqrt{3}}{2} - \frac{mgR}{2}$$

despejo y $\Omega^2 = \frac{\cancel{2}FR\sqrt{3} - \cancel{2}mgR}{I^{CM} + mR^2} = \frac{\sqrt{3}FR - mgR}{I_{CM} + mR^2}$

$\Omega = \sqrt{\frac{\cancel{2}FR\sqrt{3} - \cancel{2}mgR}{I^{CM} + mR^2}}$ y $v_{CM} = \Omega R\,\hat{\theta}$

Este mismo resultado puede obtenerse calculando la energía desde el centro de masas del tambor, ahora sí habrá término traslacional y rotacional

Recordemos además que la variación de energía potencial es $-W_{F\,conservativas}$ por lo que $\Delta V = -W_{mg} = mgR/2$

y para la cinética $\Delta T = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I^{CM}\Omega^2$

entonces la variación de energía mecánica es:

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U = W_{F\,No\,conservativas} = \frac{FR\sqrt{3}}{2}$$

y uso que $|v_{CM}| = |\Omega R|$

$$\frac{1}{\cancel{2}} m \Omega^2 R^2 + \frac{1}{\cancel{2}} I^{CM} \Omega^2 + \frac{mgR}{\cancel{2}} = \frac{FR\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

despejando nuevamente obtenemos:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\cancel{2}FR\sqrt{3} - \cancel{2}mgR}{I^{CM} + mR^2}} = \sqrt{\frac{FR\sqrt{3} - mgR}{I^{CM} + mR^2}}$$

como notaron existían al menos 4 maneras para obtener los resultados pedidos, todas ellas válidas (sólo había que aplicar lo aprendido en clase) Espero que esta resolución les ayude a estudiar.