Guía 4: Movimiento Oscilatorio

I - Cinemática del movimiento oscilatorio

1) El desplazamiento de un objeto está determinado por la ecuación y(t) = 3cm sen(20π/s t). Grafique *y* en función del tiempo y señale la amplitud y el periodo de las oscilaciones.

2) La coordenada de un objeto viene dada por (0.057m) cos[(3.9/s)t].
   a) ¿Cuánto valen la amplitud *A*, la frecuencia angular ω, la frecuencia *f*, el período *T* y la fase ϕ?
   b) Escriba las expresiones para la velocidad *v* y la aceleración *a* del cuerpo.
   c) Determine *y*, *v* y *a* en t=0.25 segundos.

Rta: c) y(0.25s)= 0.032m; v(0.25s)=-.16m/s; a(0.25s)=-.48m/s^2

3) Un objeto que tiene un movimiento armónico simple tiene su máximo desplazamiento 0,2 m en t = 0. Su frecuencia es de 8 Hz.
   a) Hallar los instantes en que las elongaciones son por primera vez 0,1 m; 0 m; -0,1m; -0,2m
   b) Halle las velocidades en dichos instantes.

Resp.: a) 0.02s, 0.031s, 0.042s, 0.062s ; b) -8.67m/s, -10m/s, -8.67m/s, 0m/s

4) Un objeto describe un movimiento armónico simple con una amplitud *A* = 63 mm y una frecuencia ω = 4.1 1/s. Considere t=0 cuando el objeto pasa por el punto medio del recorrido.
   a) Escriba las expresiones para x, v, a.
   b) Determine *x*, *v* y *a* para t=1.7 segundos.

Rta: x(1.7s)=-39.95m; v(1.7s)=-200m/s; a(1.7s)=671.5m/s^2

5) Un objeto oscila con frecuencia 10 Hz y tiene una velocidad máxima de 3 m/s. ¿Cuál es la amplitud del movimiento?

Rta: 0.0477m

II - Dinámica del movimiento oscilatorio

6) Un cuerpo está apoyado sobre una mesa, unido a un resorte de constante k=500 N/m y largo natural 10 cm (el otro extremo del resorte está fijo a la pared). Si el cuerpo se desplaza una distancia 2cm de su posición de equilibrio, comprimiendo al resorte, y se lo suelta, oscila con un período de 0,63 s.
   a) Haga el diagráma de cuerpo libre y halle la ecuación del movimiento a partir de la 2ª Ley de Newton.
   b) Determine el valor de la masa en función de los datos.
   c) Escriba las ecuaciones de la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

Resp. b) 5 kg c) x=-2cm cos(10t/s)+10cm;

v=20cm/s sen(10t/s); a=200cm/s^2 cos(10t/s)

7) La frecuencia con la que oscila un cuerpo unido al extremo de un resorte es 5 Hz ¿Cuál es la aceleración del cuerpo cuando el desplazamiento es 15 cm?

Resp: 148 m/s^2

8) Para estirar 5 cm un resorte horizontal es necesario aplicarle una fuerza de 40 N. Uno de los extremos de este resorte está fijo a una pared mientras que en el otro hay un cuerpo de 2 kg. La masa del resorte es despreciable. Si se estira el resorte 10 cm a partir de su posición de equilibrio y se lo suelta:

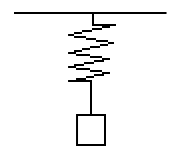
a) ¿Cuál es la amplitud y la frecuencia del movimiento? ¿Cuánto tiempo tarda en hacer una oscilación completa?

b) Obtenga la expresión de posición en función del tiempo y grafíquela señalando la posición de equilibrio.

c) Calcule la posición, la velocidad y la aceleración al cabo de 0,2 seg. Describa cualitativamente en que etapa del movimiento oscilatorio está.

Resp: a) A=10 cm; f=3.18Hz; T=0.314 seg.
b) con x_{eq}=0; x(t)=10 cm cos(20 t/seg)
c) en t=0.2 s ; x=-6.54 cm ; v=-1.5 m/s ; a=26.1 m/s^2

9) Un cuerpo de masa 800 g está suspendido de un resorte de longitud natural 15 cm y constante elástica K=320 N/m, que se encuentra colgado del techo.



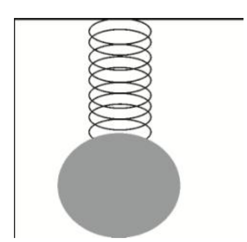
a) Halle la posición de equilibrio.
b) Si se desplaza al cuerpo 1,5 cm hacia abajo a partir de la posición de equilibrio y se lo suelta, halle su posición en función del tiempo.

Resp: a) 17,5 cm del techo

10) Usando los órganos sensoriales del sus patas, las arañas detectan las vibraciones de sus telas cuando una presa queda atrapada.
a) Si al quedar atrapado un insecto de 1 gr la tela vibra a 15 Hz, ¿cuál es la constante elástica de la tela?
b) ¿Cuál seria la frecuencia cuando queda capturado un insecto de 4 gr?

Resp: a) 8,9 N/m b) 7,5 Hz

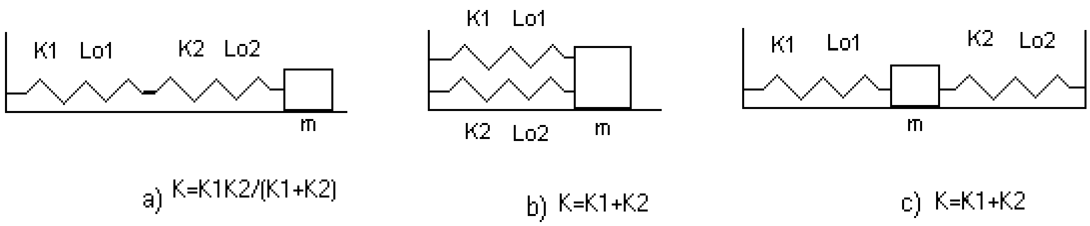
11) Se tiene un cuerpo unido a un resorte de 15cm de longitud natural y constante elástica de 2000N/m, que oscila verticalmente alrededor de una posición de equilibrio de a 18cm del techo.



a) Escriba la 2da ley de Newton para este sistema y halle la ecuación diferencial del movimiento.
b) Calcule la masa del cuerpo y el período de oscilación.
c) Si se lo puso en movimiento a partir de la posición de equilibrio dándole una velocidad de 13cm/seg hacia abajo, obtenga $x(t), v(t)\ y\ a(t)$.

Resp: b) $m = 6kg$, T=0.344s

12) Un cuerpo de masa m está unido a resortes de constante k_1 y k_2 como se indica en cada uno de los siguientes casos. Demuestre que las mismas situaciones se pueden representar por un único resorte de cte. elástica K tal que



Se puede ver que para N resortes iguales de constante elástica K, su equivalente es K_{eq}=K/N si se colocan en serie, y K_{eq}=K.N si se colocan en paralelo

13) Demuestre que el período de oscilación de un péndulo es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ (pequeñas oscilaciones), donde L es el largo del péndulo, y es independiente de la masa.

14) La aceleración de la gravedad varía ligeramente sobre la superficie de la tierra. Si un péndulo tiene un período de T = 3,00 segundos en un lugar en donde g = 9,803 m/s² y un período de T = 3.0024 segundos en otro lugar. ¿Cuál es el valor de g este último lugar?

Resp: 9,787 m/s^2

15) En la *Microscopía de Fuerza Atómica*, una punta de prueba se utiliza para explorar superficies con resolución nanométrica. En una de las aplicaciones de esta técnica, a la superficie se unen previamente copias de alguna biomolécula de la cual se quiera investigar el detalle de sus propiedades físicas como ser resistencia a la tensión, elasticidad y estructura. Se busca en cada experimento pegar con la punta de prueba un extremo de una biomolécula única (el otro permanece adherido a la superficie). Al retraer la punta hacia arriba, la biomolécula comienza a estirarse y ejerce una fuerza hacia abajo sobre la punta (Fig 1a). La punta de prueba se comporta como un resorte del cual el experimentador conoce la constante elástica (K_1) y puede medir en cada instante su elongación (L_1) y la de la biomolécula (L_2) (Fig 1b).

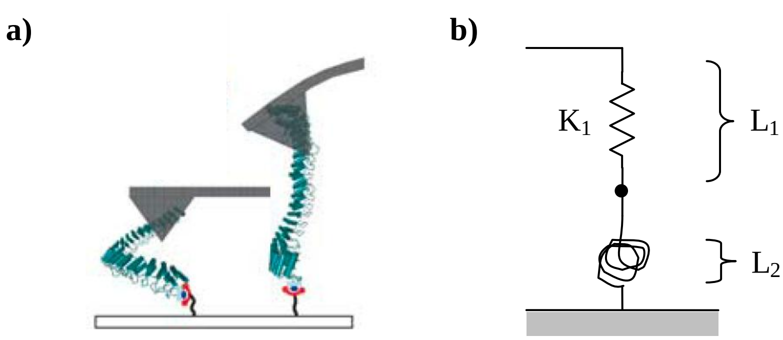


Figura 1. a) La caricatura muestra cuando la punta de prueba toca una molécula de proteína (izq) y la estira (der). La punta se deforma elásticamente por la fuerza realizada por la molécula al estirarse. **b)** En el modelo, el resorte representa a la punta de prueba y el ovillo a la biomolécula de interés. L1 y L2 son nulos cuando la punta de prueba o la proteína, respectivamente, tienen su longitud natural.

a) ¿Cómo se calcula con este sistema la fuerza que ejerce la biomolécula en función de su estiramiento?

b) En un trabajo publicado en la revista Nature en marzo de 2006, el grupo de Piotr Marszalek de la Universidad de Duke estudia las propiedades elásticas de una proteína con dominios estructurales de ankirina. Los investigadores descubrieron que la proteína misma se comporta en ciertas condiciones como un resorte de dimensiones nanométricas. La figura 2 muestra mediciones de microscopía de fuerza atómica obtenidas para tres proteínas distintas. Se grafica la fuerza que ejerce la proteína en función de su estiramiento.

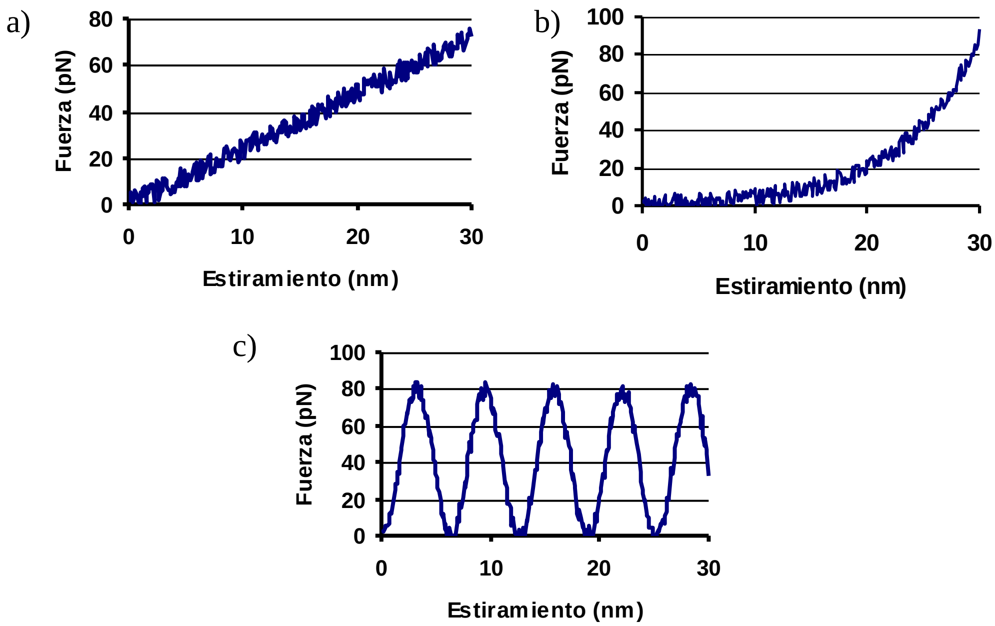
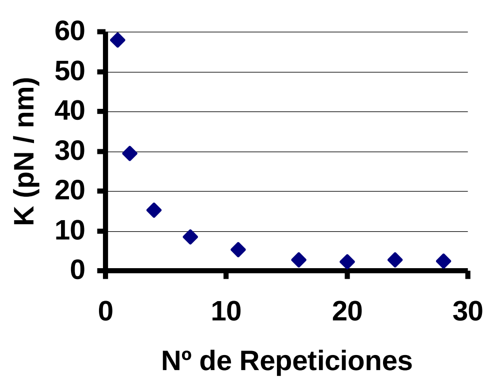


Figura 2

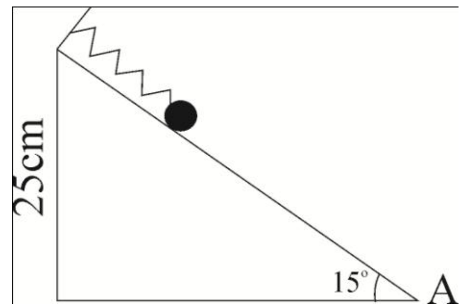
¿Cuál de estos gráficos se correspondería con la proteína estudiada por Marszalek? Justifique. Averigüe aproximadamente su constante elástica.

c) Si se construye una serie de proteínas con distinto número de repeticiones de ankirina y se mide su constante elástica se obtiene un gráfico como el de la figura 3.



a) ¿Cómo interpreta este resultado? (Pista: repase el problema 12).
b) ¿Más o menos cuántas repeticiones de ankirina tiene la proteína estudiada por Piotr?

16) Se tiene un cuerpo de masa m=10kg unida a un resorte (k=1000N/m, l_0=15cm) apoyado sobre un plano inclinado y unido del otro extremo a una pared. Inicialmente se lleva al resorte a su longitud natural y se lo suelta.



a) Muestre, a partir de las ecuaciones de Newton que el cuerpo realiza un movimiento armónico simple y calcule la posición de equilibrio (medida desde la pared)

b) Calcule el máximo acercamiento al punto A (abajo del plano inclinado).

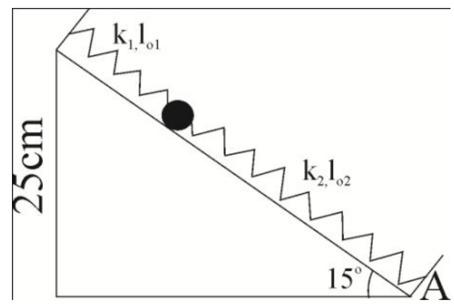
c) Calcule la velocidad máxima y la frecuencia angular ω.

d) ¿Cuánto valen la amplitud y la fase inicial?

e) Escriba $x(t), v(t)\ y\ a(t)$ y grafíquelas.

Rtas.: a) x_{eq}= 17.6cm; b) 76.4 cm; c) ω=10 1/s; v_{max}=26cm/s

17) Resuelva el mismo ejercicio que el anterior, considerando que ahora el cuerpo también se encuentra unido a otro resorte (k_2 = 500N/m, l_0=20cm) cuyo otro extremo está unido a una pared que se ubica en A (ver figura)



Rtas.: a) x_{eq} =37.5cm; b)37.15 cm; c) ω=12.24 1/s; v_{max}=271cm/s

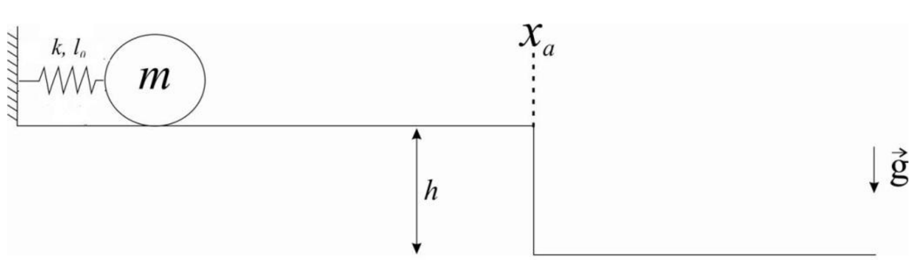
18) Un cuerpo de masa *m* se encuentra unido a un resorte de contante elástica *k* y longitud natural l_0. Se aleja al cuerpo una distancia l_0 desde su posición de equilibrio y se lo suelta.

a) Escriba la ecuación de movimiento y obtenga la expresión para la posición del cuerpo en función del tiempo. Especifique claramente quiénes son la amplitud, la frecuencia, el período y la fase inicial.

b) A $t = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$, el cuerpo se libera de los resortes. Determine la velocidad y la aceleración en ese instante.

c) Si la superficie sobre la que se desliza inmediatamente después de soltarse no posee rozamiento, ¿qué movimiento realiza el cuerpo: MRU, MRUV o ninguno de los dos?

d) Al llegar a x_a= *5m*, el cuerpo cae desde una altura *h=2m*; ¿a qué distancia de x_a cae el cuerpo? Para este punto considere *k=700N/m*, *m=1kg* y l_0 *= 10cm.*



Rtas.: c) MRU; 1.67m

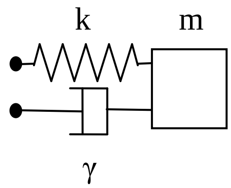
III - Movimiento oscilatorio amortiguado

19) Un oscilador amortiguado se describe mediante la ecuación diferencial (Ec. De Newton)

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0$$



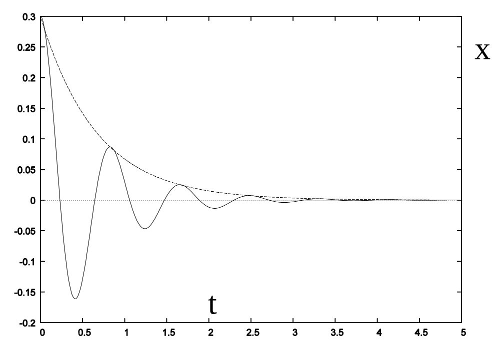
Aquí los dos efectos (restitución y disipación) compiten. Las formas de las soluciones en este caso dependen de ciertas relaciones entre los parámetros *m*, *k*, y *γ*. El resultado de las combinaciones de parámetros resulta en dos tipos de movimiento, caracterizados por *oscilaciones subamortiguadas*, o *decaimientos sobreamortiguados*. En todos los casos, la disipación hará decaer asintóticamente la solución a un equilibrio, alrededor del cual el sistema puede oscilar o decaer sin oscilaciones.

- En el rango $\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 < \omega_0^2$ (1) domina el término inertivo (de masa) y las soluciones presentan ***oscilaciones amortiguadas*** (también llamadas ***oscilaciones subamortiguadas***).

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_{am}t + \phi)$$

$$v(t) = -Ae^{-\lambda t}\left[\lambda\cos(\omega_{am}t + \phi) + \omega_{am}\sin(\omega_{am}t + \phi)\right]$$

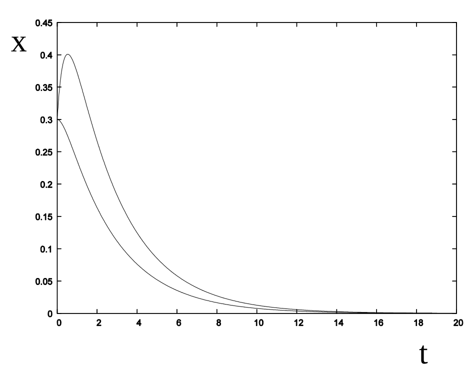
$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\gamma}{2m} \\ \omega_{am}^2 = \omega_0^2 - \left(\dfrac{\gamma}{2m}\right)^2 \end{cases}$$



- Por otra parte, en el rango $\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 > \omega_0^2$ (2) domina el término disipativo y las soluciones no oscilan, sino que decaen al origen. Se trata de un movimiento ***sobreamortiguado*** cuya solución general se escribe como

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{\gamma}{2m} + \sqrt{\left(\dfrac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \\ \lambda_2 = -\dfrac{\gamma}{2m} - \sqrt{\left(\dfrac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$



Un tiempo característico de la oscilación es $\tau = \lambda^{-1}$. Es el tiempo en que la amplitud cayó a un 36.8% de su valor inicial (e^{-1}=0.368). Otro valor que caracteriza las oscilaciones amortiguadas es su coeficiente $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$. Para sistemas oscilantes poco amortiguados Q toma valores altos (por ejemplo para un auto con amortiguadores en buen estado Q~1, mientras que para una cuerda de guitarra es varios miles).

20) Se tiene una esferita de platino de 2.9cm de diámetro unida a un resorte de constante k=0.1N/m. Se comprueba que cuando está sumergida en aceite oscila de manera que su posición en función del tiempo es $x(t) = 5cm\, e^{-0.02t/s} \cos(0.6t/s)$.

a) Grafique la posición en función del tiempo. Calcule el valor de τ y el período de la oscilación.

b) Calcule la masa de la esferita.

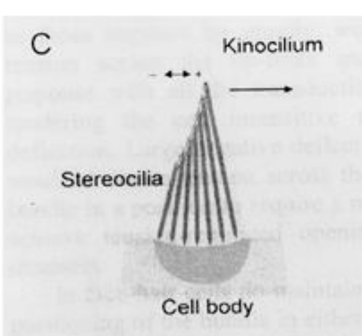
c) En las condiciones del problema, la constante de amortiguamiento verifica la ley de Stokes, $\gamma=6\pi R\eta$, donde R es el radio de la esfera y η es el coeficiente de viscosidad del medio. Calcule el valor de γ y η.

Resp. a) τ=50s, T=10.5s; b)m=277g; c) γ=0.011kg/s, η=0.04kg/sm

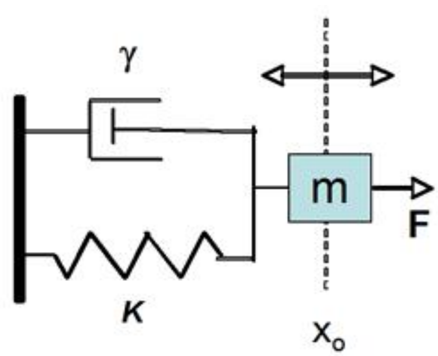
21) Un péndulo simple de 10 g de masa tiene inicialmente un período de 2 seg y una amplitud de 2º.Luego se lo sumerge en un medio con rozamiento y después de dos oscilaciones completas la amplitud se reduce a 1,5º. Encuentre la constante de amortiguamiento γ.

Rtas.: γ=1.44g/s

22) Las células sensoriales del oído (**Hair cells**) median la percepción del sonido, la aceleración lineal, angular y la gravedad (sistemas de equilibrio) en vertebrados. Estas células no son mas (ni menos) que resonadores muy bien afinados a las frecuencias de las señales mecánicas que deben detectar, y su posibilidad de reportar al sistema nervioso fielmente estas señales depende críticamente de su capacidad de transformar un input mecánico en una señal eléctrica (una corriente, que es la moneda del SN) que transporte la información sobre la señal externa al cerebro. O sea que estas células deben funcionar como "transformadores" de una señal mecánica en una señal eléctrica. Para poder hacerlo cuentan con una estructura (estereocilias) que es capaz de oscilar en respuesta a una señal mecánica. Como estas estructuras elásticas oscilan en un medio viscoso, podemos modelarlas como una masa ***M*** acoplada a un oscilador de constante ***K*** moviendose en un medio viscoso con disipacion lineal $\boldsymbol{\gamma}$. O sea, estas células no son más que osciladores amortiguados.

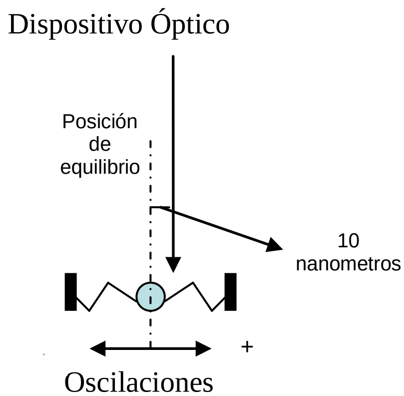


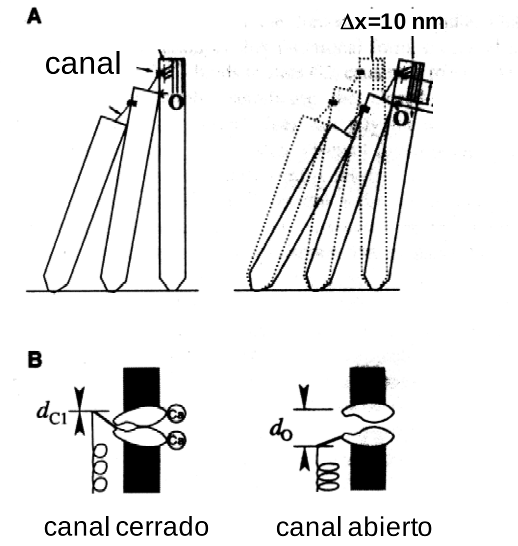
$\cong$



Construyendo un Detector de movimiento:

Suponga que las estereocilias oscilan en torno a una posición de equilibrio en respuesta a una señal sonora. Cada vez que en la estructura se produce un desplazamiento igual o mayor a 10 nanómetros (solo en el sentido positivo), como consecuencia se abre un canal que deja entrar corriente a la célula. Se quiere medir la corriente que entra indirectamente con un dispositivo óptico que cuenta la cantidad de veces que el sistema se desplaza al menos 10 nanómetros, según el siguiente diagrama:





Determine para las siguientes condiciones: $\boldsymbol{K}$ = 1 mN/m (1.10^{-3} N/m), masa $\boldsymbol{M} = 10^{-13}$ kg en un medio con γ =0.001 μN.s/m (1.10^{-9} N.s/m)

a) ¿Cuál es la frecuencia (**f**) de la oscilación?

b) El movimiento será sub o sobre amortiguado? ¿Cuál es su $\boldsymbol{\tau}$?

c) Si el desplazamiento tiene una amplitud inicial de 50 nm (X_o=50 nm, v_0=0), ¿cuántas veces la estereocilia cruza el detector? ¿Cuántas veces se habrá abierto el canal?

Rtas: a) f = 15.9 KHz (T=62.8 μseg y $w_{am} = 9.98.10^5$ 1/s), b) $\boldsymbol{\gamma^2} = 1*10^{-18}$kg^2/s^2 y **4*mk***=4*$10^{-16}$ kg^2/s^2 el movimiento es sub amortiguado (4mk>γ2)**;** $\boldsymbol{\tau}$=200 μseg, c) el canal se abre cinco veces (el detector marca 10 tics, 2 tics por ciclo).