Guía 0. Matematica

I. Funciones

1) Siendo A=[a,b,c,d,m] y B=[0,1,2,3], indicar las siguientes relaciones que son funciones. En aquellas que no lo son haga modificaciones para que lo sean:
   f=[(a;0),(b;0),(c;1),(d;2),(m;3)]
   g=[(a;0),(b;1),(c;2),(d;3),(m;3),(c;0)]
   h=[(a;1),(b;2)]

2) Determinar el dominio adecuado para:
   a) $\sqrt{x^2-3x+2}$ b) $2x^3/\ln|x+2|$

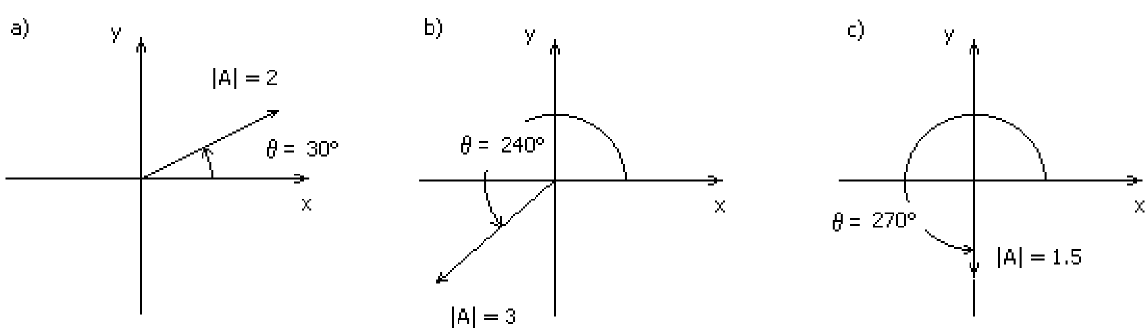
3) Demuestre las siguientes identidades:
   $sen(2x)=2sen(x)\cos(x);\cos(2x)=\cos^2(x)-sen^2(x);$
   $\cos^2(x)=(1+\cos(2x))/2;sen^2(x)=(1-\cos(2x))/2;$
   $ch^2-sh^2=1;ch^2+sh^2=ch(2x);2sh(x)ch(x)=sh(2x).$

   Use las propiedades siguientes:
   $sen^2(x)+\cos^2(x)=1;$
   $sen(x+y)=sen(x)\cos(y)+\cos(x)sen(y); \quad \cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-sen(x)sen(y);$
   $\cos(-x)=\cos(x); \quad sen(-x)=-sen(x); \quad sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}; \quad ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}.$

II. Vectores

4) Determine el módulo y la dirección de los siguientes vectores. Represéntelos gráficamente.
   a) **A**= (-4; 3) b) **B** = (2; 0) c) **C** = -2 $\hat{x}$ – 3 $\hat{y}$ d) **D** = 0 $\hat{x}$ – 5 $\hat{y}$

5) Halle las componentes cartesianas de los siguientes vectores:



6) Dados los vectores **A** y **B** indicados, halle gráficamente su suma.

   a) **A** = (-3; 2) **B** = (-2; 5)

   b) **A** tal que |**A**| = 2 , θ = 240 ° **B** tal que |**B**|= 3 , θ = 135 °

   c) **A** = (-2; 0) **B** = (0; 4)

7) Sean **A** y **B** los vectores dados en el ejercicio anterior. Halle analíticamente las componentes cartesianas y polares del vector **A** + **B**, y del **A** – **B**. ¿El módulo del vector suma, **C = A** + **B**, es igual a la suma de los módulos de **A** y de **B**?

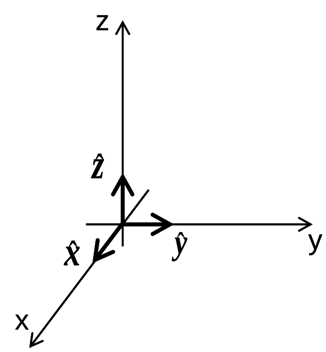
8) Halle el vector que tiene origen en el punto **A** y extremo en el punto **B** en los siguientes casos:
a) **A**=(2; -1) y **B**=(-5; -2).
b) **A** =(2; -5; 8) y **B**=(-4; -3; 2).

9) Dados los vectores:
A = $(3\hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z})$ **B** = $(4\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z})$ **C** = $(-2\hat{y} - 5\hat{z})$
efectúe las siguientes operaciones:
a) (**A** – **B**)/|**C**| + **C**
b) 5**A** - 2**C**
c) –2 **A** + **B** – **C**/5

Se define el **producto escalar** de dos vectores como **A . B =** $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$**,** donde θ es el ángulo que forman los dos vectores.

---

10) Sean $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, los versores usuales de la terna derecha mostrada en la figura.



$\hat{x}$ = (1;0;0) $\hat{y}$ = (0;1;0) $\hat{z}$ = (0;0;1)

Calcule $\hat{x}.\hat{x}$, $\hat{x}.\hat{y}$, $\hat{x}.\hat{z}$, $\hat{y}.\hat{x}$, $\hat{y}.\hat{y}$, $\hat{y}.\hat{z}$, $\hat{z}.\hat{x}$, $\hat{z}.\hat{y}$, $\hat{z}.\hat{z}$

11) Usando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si
A = $A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y} + A_z\,\hat{z}$ **B** = $B_x\,\hat{x} + B_y\,\hat{y} + B_z\,\hat{z}$
entonces

$$\boxed{\mathbf{A}.\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

12) Efectúe el producto escalar de los vectores **A** y **B** y diga si en algún caso **A** es perpendicular a **B.**
a) **A** = $3\hat{x} - 2\hat{j} + \hat{z}$ **B** = $-\hat{x} + 3\hat{z}$
b) **A** = (2; 3; -1) **B** = (6; -5; 2)
c) |**A**| = 3 |**B**| = 2 θ = 60° (θ: ángulo entre **A** y **B**)

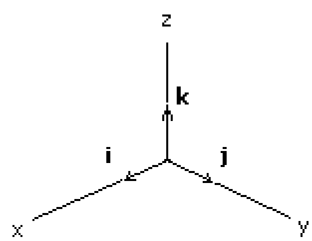
Se define el **producto vectorial** como **A** $\times$ **B =C** tal que

a) $|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\,\mathrm{sen}\,\theta$**,** donde θ es el ángulo que forman los dos vectores

b) **C** tiene dirección perpendicular al plano determinado por **A** y **B**

c) El sentido es tal que **A**, **B** y **C** que estén relacionados por la regla de la mano derecha**.**

13) Sean $\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$, los versores usuales de la terna derecha mostrada en la figura



Calcule $\hat{\boldsymbol{i}} \times \hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{i}} \times \hat{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{i}} \times \hat{\boldsymbol{k}}$, $\hat{\boldsymbol{j}} \times \hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}} \times \hat{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{j}} \times \hat{\boldsymbol{k}}$, $\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{k}}$.

14) Usando la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si:

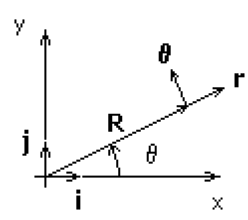
A = $A_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\,\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\,\hat{\boldsymbol{k}}$ **B** = $B_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + B_y\,\hat{\boldsymbol{j}} + B_z\,\hat{\boldsymbol{k}}$

entonces **A** x **B** = (Ay Bz - Az By ; Az Bx - Ax Bz ; Ax By - Ay Bx)

15) Sean los vectores **A** = (3; 2; 1) **B** = (1; 0;-1) **C** = (0;-2; 4) calcule:

a) **B** x **C**
b) -4(**B** x **B**) - **A**
c) (**A** + **B**) x **C**
d) (**A** x **B**).**C**

16) **Coordenadas polares:** El radio vector **R** tiene las componentes cartesianas **R** = $x\,\hat{\boldsymbol{i}} + y\,\hat{\boldsymbol{j}}$ **.** En función de los versores $\hat{\theta}$ y $\hat{\boldsymbol{r}}$, **R** toma la forma: **R** = R $\hat{\boldsymbol{r}}$ **.**



Demuestre que:

a) $\hat{\boldsymbol{r}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{i}} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{j}}$ $\hat{\theta} = -\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{i}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{j}}$

b) $d\hat{\boldsymbol{r}}/d\theta = \hat{\theta}$ $d\hat{\theta}/d\theta = -\hat{\boldsymbol{r}}$

c) A partir de **R** = R $\hat{\boldsymbol{r}}$ **,** pruebe que **v** = d**R**/dt = $\dot{R}\,\hat{\boldsymbol{r}} + R\dot{\theta}\,\hat{\theta}$

d) Pruebe que **a** = d**v**/dt = ($\ddot{R}$ - $R\theta^2$) $\hat{\boldsymbol{r}}$ + ($R\ddot{\theta}$ + 2 $\dot{R}\theta$) $\hat{\theta}$

Ayuda: utilice las relaciones

d $\hat{\boldsymbol{r}}$ /dt = (d $\hat{\boldsymbol{r}}$ /dθ) (dθ/dt) = $\theta\,\hat{\theta}$ d $\hat{\theta}$ /dt = (d $\hat{\theta}$ /dθ) (d θ /dt) = - $\theta\,\hat{\boldsymbol{r}}$