1 NUMEROS COMPLEJOS

1.1 Definiciones básicas

Definimos la unidad imaginaria $i \equiv \sqrt{-1}$. Todos los números complejos se escriben de la forma:

$$z = a + ib, \tag{1}$$

donde a y b son números reales. Dado $z = a+ib$ con $a \in \mathbf{R}$ y $b \in \mathbf{R}$, se llaman parte real y parte imaginaria de z a

$$\mathrm{Re}(z) = a, \qquad \mathrm{Im}(z) = b, \tag{2}$$

respectivamente. Es decir, las partes real e imaginaria de un número complejo son números reales. Vemos también que todos los reales son complejos con parte imaginaria nula. Dado un número complejo, $z = a+ib$, se define su complejo conjugado, z^* como

$$z^* \equiv a - ib. \tag{3}$$

Los números complejos pueden identificarse unívocamente en términos de sus partes real e imaginaria o de su módulo, $|z|$, y argumento, $\arg(z)$:

$$|z| = \left(a^2 + b^2\right)^{1/2}, \tag{4}$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right), \tag{5}$$

donde arctan denota el arco tangente. Esto es equivalente a decir:

$$a = |z|\cos(\varphi), \qquad b = |z|\sin(\varphi), \tag{6}$$

$$z = |z|\left(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\right), \tag{7}$$

donde $\varphi = \arg(z)$. Los números complejos pueden representarse gráficamente en un plano, donde la coordenada horizontal de cada punto corresponde a la parte real del complejo y la coordenada vertical a la imaginaria. Si pensamos en el vector que une el origen de coordenadas con el punto del plano que representa al complejo, usar a y b para identificarlo es como usar coordenadas cartesianas para caracterizar un vector. Usar $|z|$ y φ, por otro lado, sería equivalente a usar coordenadas polares (es decir, el módulo y el ángulo que forma con el eje horizontal el vector que va desde el origen de coordenadas hasta el punto del plano, ver figura).

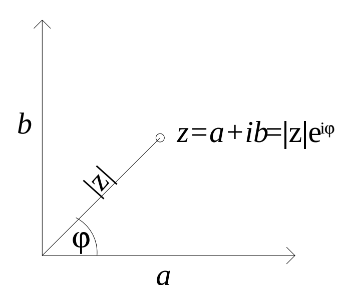

Figure 1:

La igualdad entre dos números complejos, $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, es equivalente a dos igualdades entre números reales:

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2 \quad \text{y} \quad b_1 = b_2, \quad \text{o equivalentemente} \quad |z_1| = |z_2| \quad \text{y} \quad \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2m\pi, \quad (8)$$

con m un número entero cualquiera.

1.2 Operaciones básicas con complejos

Las operaciones con números complejos se hacen del mismo modo que con los números reales, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$. De este modo, se puede calcular:

$$-ii = -i^2 = 1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = i^3 i = 1, \tag{9}$$

de donde deducimos que, en general, i elevada a una potencia par, $2k$, o a una impar, $2k+1$, resulta

$$i^{2k} = (-1)^k, \quad i^{2k+1} = (-1)^k i. \tag{10}$$

Podemos calcular también

$$\begin{aligned} z + z^* &= a + ib + a - ib = 2a = 2\mathrm{Re}(a), & (11)\\ z - z^* &= a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i\mathrm{Im}(b), & (12)\end{aligned}$$

de donde vemos que sumando complejos podemos obtener números reales, y, finalmente,

$$z\,z^* = (a + ib)\,(a - ib) = a^2 + iab - iba + b^2 = |z|^2. \tag{13}$$

Usando esto último podemos calcular $1/z$ como:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{z^*}{z^*} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{z^*}{|z|^2}. \tag{14}$$

Entonces, si $z = a + ib$, resulta:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}. \tag{15}$$

Dados dos complejos cualesquiera, $z = a + ib$ y $w = c + id$, su producto resulta:

$$z\,w = (a + ib)\,(c + id) = ac - bd + i(bc + ad), \tag{16}$$

de donde vemos que $\mathrm{Re}(zw) = ac - bd \neq \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w) = ac$. Estos son sólo algunos ejemplos de cálculos elementales con números complejos.

1.3 Funciones de números complejos

Así como se definen funciones sobre los números reales, también es posible definir funciones sobre los complejos. Dado que sabemos hacer una serie de operaciones con complejos (sumas, productos y potencias enteras) es fácil definir funciones que sólo involucran estas operaciones. Por ejemplo, $f(z) = z^2$ es la función que asigna a cada complejo, z, un número igual a su cuadrado. Algo similar ocurre con la función $f(z) = z^2 + z^4$.

Disgresión Opcional *(Permite entender de dónde sale la relación entre las funciones exponencial y senos y cosenos).*

Ahora bien, muchas funciones de los números reales pueden ser re-escritas en términos de una serie (es decir, una suma de infinitos términos) de potencias. Es la llamada expansión en serie de Taylor. En particular, dada una función definida sobre los reales, $f(x)$, la expansión en serie (alrededor del punto $x = a$) se calcula como:

$$f(x) = f(a) + \frac{df}{dx}\Big|_{x=a}(x-a) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x=a}(x-a)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}\Big|_{x=a}(x-a)^3 + ..., \tag{17}$$

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 ... \cdot n$ es el factorial de n y $\frac{d^nf}{dx^n}|_{x=a}$ es la derivada n-ésima de f calculada en $x = a$. Para que este cálculo tenga sentido es necesario que la suma no diverja (a veces esto ocurre sólo para cierto rango de valores de x) y que las derivadas estén bien definidas. Supongamos que tenemos una función real para la cual esto se cumple. Entonces podemos usar su expansión en serie para definir la "versión compleja" de la función. Esto se hace, por ejemplo, con la exponencial. Consideremos la función $f(x) = e^x \equiv \exp(x)$ definida sobre los números reales. Como $d^n \exp(x)/dx^n = \exp(x)$ por lo que $d^n \exp(x)/dx^n|_{x=0} = \exp(0) = 1$, la expansión en serie (alrededor de $x = a = 0$) de esta función es:

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}.1.x^3 + ... = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}. \tag{18}$$

Por otro lado, consideremos las expansiones del seno y el coseno alrededor de $x = 0$. Como $d\cos(x)/dx = -\sin(x)$, $d\sin(x) = \cos(x)$, $\sin(0) = 0$ y $\cos(0) = 1$, resulta:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - 0.x - \frac{1}{2!}.1.x^2 + \frac{1}{3!}.0.x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ... = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{x^k}{2k!}, && (19)\\ \sin x &= 0 + 1.x - \frac{1}{2!}.0.x^2 - \frac{1}{3!}.1.x^3 + ... = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. && (20)\end{aligned}$$

Usando estas expansiones podemos definir las funciones exponencial, seno y coseno de números complejos (reemplazando x por un número complejo en las expresiones (18)–(20)). En particular, si consideramos complejos de la forma $z = ix$ con $x \in \mathbf{R}$ (es decir, imaginarios puros) y tenemos en cuenta las igualdades de (10), la exponencial re-escrita como en (18) resulta:

$$\begin{aligned} \exp(ix) &= \sum_{n\geq 0}\frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}i^n\frac{x^n}{n!} = \sum_{k\geq 0}i^{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0}i^{2k+1}\frac{x^n}{(2k+1)!}\\ &= \sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. && (21)\end{aligned}$$

Para llegar a esta última igualdad agrupamos los términos de la serie de la exponencial con n par por un lado ($n = 2k$) y con n impar ($n = 2k+1$) por el otro. Comparando la última expresión con los desarrollos del seno y el coseno de (19)–(20) llegamos a la igualdad (22) de la próxima sección.

1.4 Exponenciales complejas

A partir de la sección anterior deducimos que, dado un número real, x, resulta:

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x), \tag{22}$$

donde i es la unidad imaginaria. Vemos entonces que

$$e^0 = \cos(0) = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i, \quad e^{i\pi} = \cos(\pi) = -1, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i. \tag{23}$$

A partir de (22) obtenemos:

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \tag{24}$$

$$\sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}. \tag{25}$$

Teniendo en cuenta la relación (7) y las definiciones del seno y el coseno en términos de exponenciales (24)–(25), podemos representar a cualquier complejo como:

$$z = |z|e^{i\arg(z)} = |z|e^{i\varphi}. \tag{26}$$

Esta forma de pensar a los números complejos permite calcular productos de complejos de un modo más sencillo que trabajando con sus partes real e imaginaria. Por ejemplo, si tomamos $z = |z|e^{i\varphi}$ y $w = |w|e^{i\gamma}$, su producto resulta $zw = |z||w|\exp(i(\varphi+\gamma)) = |z||w|(\cos(\varphi+\gamma) + i\sin(\varphi+\gamma))$. Las potencias enteras de complejos también resultan más fáciles de calcular: $z^\ell = |z|e^{i\ell\varphi}$.

Disgresión opcional sobre raíces de números complejos.

La expresión (26) nos permite también calcular fácilmente los números que, elevados a una cierta potencia entera, nos dan como resultado un complejo, z. Acá hay que tener un poco más de cuidado porque

$$z = |z|\exp(i\varphi) = |z|\exp(i(\varphi + 2m\pi)), \tag{27}$$

con m un número entero cualquiera. Por lo tanto, dado ℓ entero ($\ell \neq 0$), los complejos $w = |w|\exp(i\theta)$ que satisfacen $w^\ell = z$, son aquéllos $w = |w|e^{i\theta}$ que cumplen

$$|w|^\ell e^{i\ell\theta} = |z|e^{i\varphi} = |z|e^{i(\varphi+2m\pi)}, \tag{28}$$

o, equivalentemente,

$$|w|^\ell = z, \quad \text{y} \quad \ell\theta = \varphi + 2m\pi. \tag{29}$$

Esto nos dice que si $\ell \neq 1$ hay varios w distintos que cumplen esta igualdad para algún m, todos tienen el mismo módulo pero difieren en el valor de θ. Los valores de θ que satisfacen la igualdad anterior son:

$$\theta = \frac{\varphi}{\ell}, \quad \theta = \frac{\varphi}{\ell} + \frac{2\pi}{\ell}, \quad \theta = \frac{\varphi}{\ell} + \frac{4\pi}{\ell}.... \tag{30}$$

Hay en total ℓ complejos distintos que cumplen la igualdad (28) (ya que $\theta = \frac{\varphi}{\ell} + \frac{2\ell\pi}{\ell}\theta = \frac{\varphi}{\ell} + 2\pi$ define un complejo igual al que define $\theta = \frac{\varphi}{\ell}$).

2 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES

En muchos problemas físicos nos encontramos con que la respuesta que estamos buscando (en mecánica, típicamente se trata de la posición de una partícula) es una función, $x(t)$, que satisface una ecuación de la forma:

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = g(t), \tag{31}$$

donde a, b y c son constantes, x es la función, $x(t)$ que buscamos y $g(t)$ es alguna función conocida del tiempo. Vamos a trabajar siempre con la ecuación (31) escrita de modo que sea $a > 0$ (en los problemas de mecánica que resolvimos en la materia, a correspondía a la masa de la partícula). En todos los problemas de mecánica que resolvimos en la materia g es constante (lo que facilita la resolución como veremos más adelante). En este Capítulo vamos a considerar que g es constante.

La solución que uno busca no sólo está definida por la ecuación (31) sino que depende, a su vez, de las condiciones iniciales. El modo en que se obtiene la solución que uno busca consiste primero en determinar de qué forma son todas las soluciones que satisfacen (31) (la solución más general posible) para después elegir, de entre todas ellas, aquélla que satisface las condiciones iniciales (es decir que cumple con los valores dados de $x(t = 0)$ y $dx/dt(t = 0)$. Veamos entonces cómo encontramos la solución más general que satisface (31).

En primer lugar, escribimos a la solución más general como la suma de dos funciones:

$$x = x_h + x_p, \tag{32}$$

donde x_h es la solución más general de la ecuación homogénea (la que se obtiene de (31) haciendo $g = 0$):

$$a\frac{d^2x_h}{dt^2} + b\frac{dx_h}{dt} + cx_h = 0, \tag{33}$$

y x_p es una función cualquiera del tiempo que satisface la ecuación total (31). Esto parece ridículo, porque estamos diciendo que para encontrar la solución de (31) necesitamos conocer una solución de (31). No lo es porque x_p es una solución cualquiera (la así llamada *solución particular* de la ecuación), y lo que buscamos con el método es la *más general*. Cuando $g(t) = g$ es constante, siempre se puede encontrar una solución particular, x_p, constante, es decir, una solución tal que $dx_p/dt = 0 = d^2x_p/dt^2$. Veámoslo. Reemplazando una solución de esta forma en (31) llegamos a:

$$a\frac{d^2x_p}{dt^2} + b\frac{dx_p}{dt} + cx_p = cx_p = g, \tag{34}$$

por lo tanto, $x_p = g/c$.

Ya tenemos una solución particular, así que ahora necesitamos calcular x_h. Dado que la ecuación es lineal y homogénea, y que las derivadas de la función exponencial vuelven a ser exponenciales, buscamos resolver la ecuación homogénea (33) con una solución de la forma: $x_h = A\exp(\lambda t)$ para la que: $dx_h/dt = A\lambda\exp(\lambda t)$, $d^2x_h/dt^2 = A\lambda^2\exp(\lambda t)$. Reemplazando en (33) llegamos a:

$$a\lambda^2 A\exp(\lambda t) + b\lambda A\exp(\lambda t) + cA\exp(\lambda t) = 0, \tag{35}$$

de donde deducimos que λ debe satisfacer la relación

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \tag{36}$$

para que x_h satisfaga (33). Vemos entonces que, en general, hay dos valores posibles de λ:

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad \lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{37}$$

Dada la linealidad de la ecuación (33), también se puede ver que una combinación de la forma $x_h = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t)$ con A_1 y A_2 constantes satisface dicha ecuación. Veámoslo. Dado que:

$$\begin{aligned} x_h &= A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) & (38)\\ \frac{dx_h}{dt} &= A_1\lambda_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2\lambda_2 \exp(\lambda_2 t) & (39)\\ \frac{d^2x_h}{dt^2} &= A_1\lambda_1^2 \exp(\lambda_1 t) + A_2\lambda_2^2 \exp(\lambda_2 t) & (40) \end{aligned}$$

reemplazando en (33) obtenemos:

$$\begin{aligned} a\frac{d^2x_h}{dt^2} &+ b\frac{dx_h}{dt} + cx_h = a(A_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + A_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t}) + b(A_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}) + c(A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t})\\ &= A_1 e^{\lambda_1 t}(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) + A_2 e^{\lambda_2 t}(a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c) = A_1 e^{\lambda_1 t}.0 + A_2 e^{\lambda_2 t}.0 = 0. \qquad (41) \end{aligned}$$

Si $b^2 - 4ac \neq 0$ entonces $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y la combinación lineal (38) es la solución más general de la ecuación homogénea (33) por lo que, la solución más general de la ecuación original (31) es $x = x_h + x_p$ de la forma:

$$x = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) + \frac{g}{c}, \tag{42}$$

donde λ_1 y λ_2 están dadas por (37) y A_1 y A_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales. Dentro de esta situación podemos distinguir dos casos:

- *i) Caso con* $b^2 - 4ac > 0$ En este caso λ_1 y λ_2 son reales, y la expresión (42) no presenta ningún problema. En particular, en el caso de una masa (a) sujeta a un resorte de constante elástica c e inmersa en un medio que le hace una fuerza viscosa $-bdx/dt$, vimos que era $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. La última desigualdad se satisface porque $b > \sqrt{b^2 - 4ac}$. En este caso, ambas exponenciales son decrecientes, el movimiento de la masa es sobreamortiguado y tiende asintóticamente en el tiempo a la solución de equilibrio $x_{eq} = g/c$.

- *ii) Caso con* $b^2 - 4ac < 0$ Acá λ_1 y λ_2 no son reales:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}, & (43)\\ \lambda_2 &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}, & (44) \end{aligned}$$

por lo que, la solución más general del sistema homogéneo (38) se puede re-escribir como:

$$\begin{aligned}
x_h &= A_1 \exp\left(-\frac{b}{2a}t + i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + A_2 \exp\left(-\frac{b}{2a}t - i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) \\
&= e^{-\frac{b}{2a}t}\left(A_1 \exp\left(i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + A_2 \exp\left(-i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right)\right) \\
&= e^{-\frac{b}{2a}t}\Bigg[A_1\left(\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right)\right) \\
&\qquad + A_2\left(\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) - i\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right)\right)\Bigg] \\
&= (A_1 + A_2)\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + i(A_1 - A_2)\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) \qquad (45)
\end{aligned}$$

donde A_1 y A_2 son, en general, números complejos. En este caso las soluciones oscilan en el tiempo con $\omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$. La última expresión en (45) puede re-escribirse de la forma:

$$\mathcal{A}\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\, t + \phi\right). \qquad (46)$$

Opcional: *Veamos cómo deben relacionarse $\mathcal{A}$, ϕ, A_1 y A_2 para que (45) y (46) sean equivalentes. (46) puede re-escribirse como:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\, t + \phi\right) &= \mathcal{A}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\, t\right)\cos(\phi) - \sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\, t\right)\sin(\phi)\right) \\
&= \mathcal{A}\cos(\phi)\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\, t\right) - \mathcal{A}\sin(\phi)\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\, t\right). \qquad (47)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, (45) y (46) son equivalentes si tomamos

$$\mathcal{A}\cos(\phi) = A_1 + A_2, \qquad \mathcal{A}\sin(\phi) = -i(A_1 - A_2). \qquad (48)$$

Como las soluciones que buscamos en física son típicamente reales, $\mathcal{A}$ y ϕ son reales, por lo que $A_1 + A_2$ y $-i(A_1 - A - 2)$ deben resultar reales. Esto se logra tomando $A_2 = A^*$. De este modo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\cos(\phi) &= A_1 + A_2 = A_1 + A_1^* = 2\mathrm{Re}(A_1), \\
\mathcal{A}\sin(\phi) &= -i(A_1 - A_2) = -i\,(A_1 - A_1^*) = -i2i\mathrm{Im}(A_1) = 2\mathrm{Im}(A_1)(). \qquad (49)
\end{aligned}$$

Concluimos comparando (49) y (6) que

$$A_1 = A_2^* = \frac{1}{2}\left(\mathcal{A}\cos(\phi) + i\mathcal{A}\sin(\phi)\right) = \frac{1}{2}\mathcal{A}e^{i\phi}. \qquad (50)$$

Usando la equivalencia entre (45) y (46) podemos re-escribir la solución más general de la ecuación, (42) como:

$$x = \mathcal{A}\exp(-\frac{b}{2a}t)\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\, t + \phi\right) + \frac{g}{c}, \qquad (51)$$

En el caso de una masa (a) sujeta a un resorte de constante elástica c e inmersa en un medio que le hace una fuerza viscosa $-bdx/dt$ es $-b/2a < 0$, por lo tanto el movimiento de la masa corresponde a una oscilación cuya amplitud va decayendo exponencialmente en el tiempo. El movimiento es subamortiguado y la solución tiende, asintóticamente en el tiempo, a la solución de equilibrio $x_{eq} = g/c$.

En todos los casos, los valores de A_1 y A_2 se obtienen a partir de las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x(t=0) &= A_1 \exp(\lambda_1 0) + A_2 \exp(\lambda_2 0) + \frac{g}{c} = A_1 + A_2 + \frac{g}{c} \\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} &= \lambda_1 A_1 \exp(\lambda_1 0) + \lambda_2 A_2 \exp(\lambda_2 0) = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2. \end{aligned} \tag{52}$$

En el caso en que λ_1, λ_2, A_1 y A_2 no sean reales, entonces las igualdades (52) engloban 4 igualdades entre números reales. Dado que tanto la posición inicial, $x(t=0)$, como la de equilibrio, g/c, como la velocidad, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}$, son reales, las igualdades de (52) corresponden a:

$$\begin{aligned} x(t=0) &= \mathrm{Re}\,(A_1 + A_2) + \frac{g}{c} \\ 0 &= \mathrm{Im}\,(A_1 + A_2) \\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} &= \mathrm{Re}\,(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)\,, \\ 0 &= \mathrm{Im}\,(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)\,. \end{aligned} \tag{53}$$

Si en el caso con $b^2 - 4ac < 0$ preferimos escribir a la solución más general como en (51), entonces obtenemos directamente los valores de $\mathcal{A}$ y ϕ a partir de las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x(t=0) &= \mathcal{A}\exp(-\frac{b}{2a}0)\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}0 + \phi\right) + \frac{g}{c} = \mathcal{A}\cos(\phi) + \frac{g}{c} \\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} &= -\frac{b}{2a}\mathcal{A}\exp(-\frac{b}{2a}0)\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}0 + \phi\right) - \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\mathcal{A}\exp(-\frac{b}{2a}0)\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}0 + \phi\right) \\ &= -\frac{b}{2a}\mathcal{A}\cos(\phi) - \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\mathcal{A}\sin(\phi) \end{aligned} \tag{54}$$