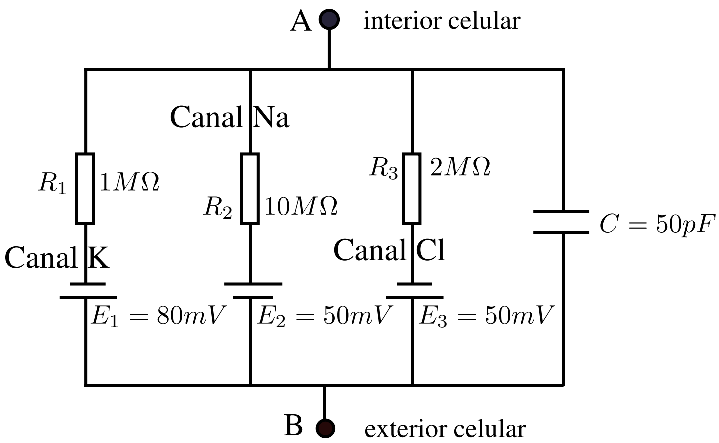
Física 1 (ByG) - Cátedra Ponce Dawson

1ºcuatrimestre de 2013

`Potencial de membrana`

Tenemos que resolver un circuito eléctrico que quiere representar una neurona. Antes de hacerlo primero vamos a ver por que podemos modelizar a una neurona mediante un circuito eléctrico. Un físico que no sabe mucho de biología diría que *una neurona es una célula que recibe estímulos y conduce información a través del sistema nervioso. Y que es importante que esta información sea transmitida con precisión, rapidez y, en ciertos casos, recorra grandes distancias. Y la mejor manera de lograr esto es transmitir la información a través de impulsos eléctricos*. La transmisión de estos impulsos se debe a una diferencia de potencial eléctrico que se genera gracias la diferencia de concentraciones de iones (potasio, sodio y cloro) entre el interior y el exterior de la neurona, que están separados por la membrana celular. Este esquema se ve representado en el circuito eléctrico de la siguiente manera:

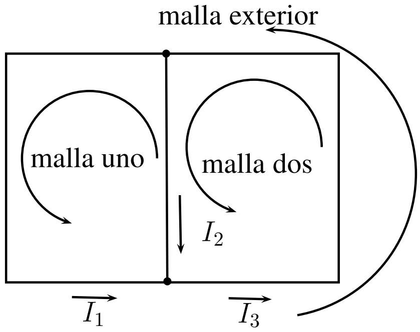


cada una de las ramas con una pila y una resistencia muestra la transmisión de los distintos iones. En nuestro caso tenemos transmisión de iones potasio, sodio y cloro. La pila marca cual es la diferencia de concentraciones de cada tipo de ion entre el interior y el exterior de la célula. La resistencia muestra que tan premisiva es la membrana celular al transporte de los distintos iones. En el circuito vemos que la membrana favorece la circulación de iones potasio, ya que es la rama menos resistiva. Además, esta rama es la que tiene una pila con mayor diferencia de potencial, indicando que para el potasio la diferencia de concentración de iones entre el interior y el exterior de la neurona es mayor que para los otros dos canales. La rama capacitiva se debe a que hay una acumulación neta de iones con cargas opuestas en cada una de las caras de la neurona separados por un medio dieléctrico (el material lípido de la membrana celular).

Ahora que ya tenemos contextualizado el problema podemos pasar a resolverlo con un poco mas de interés y tratar de interpretar los resultados que vayamos obteninedo.

a) Debemos encontrar el valor de las corrientes que circula por cada rama. Lo primero que debemos tener en claro es en que ramas hay cirulación de corriente. En particular debemos prestar atención a la rama capacitiva. El enunciado nos dice que *el circuito se encuentra funcionando hace suficiente tiempo*, de manera que el capacitor está completamente cargado. Eso significa que por la rama del capacitor no hay circulación de cargas, lo cual nos reduce el problema, ya que solo debemos considerar las ramas resistivas.

Para encontrar las corrientes por cada rama podemos proponer un sentido de circulación para cada una de ellas, recorrer las distintas mallas y generarnos tres ecuaciones para las tres incógnitas que tenemos: I_1, I_2 e I_3.



En la figura vemos una propuesta (arbitraria) para las corrientes. ¿Qué pasa si nos equivocamos con el sentido de circulación que elegimos? Nada. Si nos equivocamos de sentido, cuando hallemos la corriente nos va a dar negativo, eso nos va a indicar que debemos dar vuelta la flecha que pusimos en la figura 1.

Si recorremos la malla 1 y usamos la segunda ley de Kirchhoff para sumar diferencias de potenciales e igualarlo a la caída de tensión en cada una de las resistencias (conservación de la energía) llegamos a nuestra primer ecuación: $E_1 + E_2 = I_1R_1 - I_2R_2$.

Podemos hacer lo mismo con la segunda malla. La ecuación que obtenemos es: $-E_2 - E_3 = I_2R_2 + I_3R_3$.

Y ya que estamos hacemos lo mismo con la malla exterior: $E_1 - E_3 = I_1R_1 + I_3R_3$. Pero atención: esta ecuación no nos da nueva información. Observemos que se obtiene simplemente de sumar las primeras dos ecuaciones que habíamos encontrado. ¿Cómo se entiende esto? Fácil, con principio de superposición: la suma de las mallas 1 y 2 da como resultado la malla exterior, ya que al recorrer la rama 2 en sentidos opuestos, al superponer cada malla esta rama se anula y nos queda solo el circuito exterior.

Bien, la última ecuación no la usamos. Pero nos falta una. Dos ecuaciones, tres corrientes. ¿De donde sacamos la que nos falta? De la primera ley de Kirchhoff: la suma de las corrientes que entran a un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen. Conservación de la carga, en otras palabras. Con el sentido que propusimos para las corrientes nuestra tercer ecuación es: $I_1 + I_2 = I_3$.

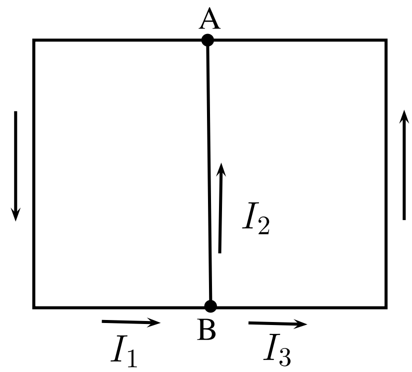
Ahora sí, tres ecuaciones - tres incógnitas:

i) $I_1R_1 - I_2R_2 = E_1 + E_2$; *ii)* $I_2R_2 + I_3R_3 = -E_2 - E_3$; *iii)* $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

Podemos resolver el sistema como mas nos guste: con substitución, igualación, etc. Sin embargo, lo mas prolijo (y seguro) es armar una matriz y triangularla. Ponemos en cada fila una ecuación y en cada columna los coeficientes que acompañan a I_1, I_2 e I_3 respectivamente (son los valores de la resistencias - un la última fila es como si todas las corrientes estuvieran multiplicadas por $1M\Omega$). Ampliamos la matriz con la suma o resta de las pilas según corresponda y triangulamos:

	I_1	I_2	I_3	ΔV		I_1	I_2	I_3	ΔV		I_1	I_2	I_3	ΔV
ec i	1	-10	0	130		1	-10	0	130		1	-10	0	130
ec ii	0	10	2	-100		0	10	2	-100		0	10	2	-100
ec iii	1	1	-1	0	ec iii- ec i	0	11	-1	-130	10ec iii - 11ec ii	0	0	-32	-200

La última fila de la matriz triangulada nos dice que $-32M\Omega I_3 = -200mV$, por lo tanto $I_3 = 6,25nA$, donde usamos que $\frac{mV}{M\Omega} = \frac{10^{-3}V}{10^6\Omega} = 10^{-9}\frac{V}{\Omega} = nA$. La segunda fila de la matriz dice $10M\Omega I_2 + 2M\Omega I_3 = -100mV$, por lo tanto $I_2 = -11,25nA$. Nos dió negativo. Esto significa que por la segunda rama circulan $11,25nA$ pero en el sentido inverso al que habíamos propuesto. Con la primer fila de la matriz hallamos I_1: $1M\Omega I_1 - 10M\Omega I_2 = 30mV$, entonces $I_1 = 17,50nA$. Listo, encotramos las corrientes. Pero volviendo a la membrana celular, ¿qué significan estos resultados? Que hay un flujo neto de iones potasio del interior hacia el exterior de la neurona y un flujo de iones sodio y cloro hacia el interior de la célula (esto lo vemos esquematicamente en la figura 2 donde ya pusimos el sentido correcto de todas las corrientes).



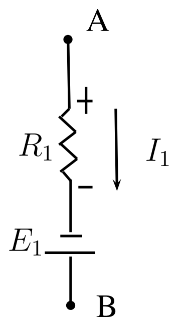
b) Para calcular el potencial de membrana $V_{AB} = V_A - V_B$ debemos recorrer el circuito partiendo desde el punto B y llegando al A. Tenemos tres ramas posibles para hacerlo y un solo resultado válido para V_{AB}. Esto significa que por cualquiera de las tres ramas debemos ver la misma diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la membrana. Y está bien: las tres ramas están conectadas en paralelo, la diferencia de potencial entre sus extremos deben ser iguales.

Recorriendo cada rama desde B hacia A tenemos: $i)$ $V_B - E_1 + I_1R_1 = V_A$, $ii)$ $V_B + E_2 - I_2R_2 = V_A$, $iii)$ $V_B - E_3 - I_3R_3 = V_A$. Por lo tanto, el potencial de membrana es $V_{AB} = I_1R_1 - E_1 = E_2 - I_2R_2 = -E_3 - I_3R_3 = -62,5mV$. ¿Cómo interpretamos este resultado? Fisicamente nos dice que en el exterior celular el potencial eléctrico es mayor que en el interior. Lo que está ocurriendo en la neurona es el pasaje de cationes potasio hacia el exterior celular, o sea, se están acumulando cargas positivas (K^+) en el exterior, por eso la diferencia de potencial $V_A - V_B$ (interior - exterior) nos dió negativa.

La carga acumulada en el capacitor es proporcional a la diferencia de potencial al que está puesto y a la capacidad del mismo ($C = 50pF = 50 \times 10^{-12}F$), por lo tanto: $Q = 50 \times 10^{-12}F \ \times \ 62,5 \times 10^{-3}V$, lo que nosda una carga $Q = 3,125pC$. Recordando que la carga eléctrica de un electrón equivale a $1,6 \times 10^{-19}C$, esto nos dice que en cada una de las capas de la membrana celular hay, mas o menos, la carga equivalente a $1,9 \times 10^7$ electrones.

c) Cambió la diferencia de potencial V_{AB}. Y no solo cambió su valor, cambió su signo. *Y en consecuencia cambió la resistencia* R_2 (la del canal de sodio). ¿Qué pasó con la neurona? *Se puso a charlar con la vecina.* Cuando dos neuronas se comunican se genera un potencial de acción que revierte la diferencia de potencial entre ambos lados de la membrana celular. El potencial de acción es debido al flujo de iones en la membrana. La neurona recibe un estímulo y abre los canales de sodio (bajando la resistividad) que fluyen del exterior al interior de la célula (de B hacia A). Este cambio en la conductividad del canal de sodio se debe a un cambio en la permeabilidad de la membrana celular. Luego de recibir el estímulo, los canales de potasio se abren para revertir la depolarización y llevar la neurona a su estado de reposo.

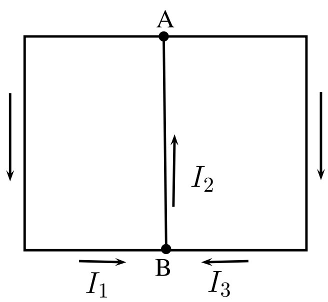
Ahora a las cuentas: calcular el nuevo valor de R_2 no es difícil. Sabemos que $V_{AB} = -I_2R_2 + E_2$. Listo, ¿no? No. Ya no sabemos cuanto vale I_2, ni el sentido y el valor de las otras dos corrientes. Bueno, mas o menos no sabemos. Como conocemos V_{AB} podemos inferir el sentido de la corriente por cada rama. Miremos el canal del potasio:



Si $V_A > V_B$ la corriente necesariamente tiene que ir de A hacia B, de otro modo no podríamos compensar la caída de potencial de la pila cuando vamos de B hacia A. La ecuación que nos queda al sumar las caídas de potencial es: $V_B - E_1 + I_1R_1 = V_A$, por lo tanto, $I_1R_1 = V_{AB} + E_1$; de aquí sí podemos despejar la corriente: $I_1 = (V_{AB} + E_1)/R_1$, lo que nos da $I_1 = 120nA$.

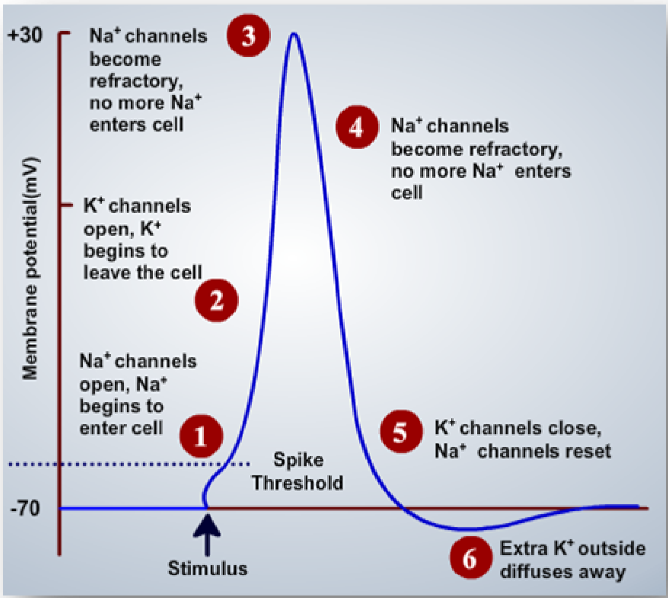
Con el mismo razonamiento podemos encontrar la corriente en el canal del cloro ya que la configuración es la misma que en en el canal del potasio. La suma de caídas de potencial nos da $V_B - E_3 + I_3R_3 = V_A$, por lo tanto $I_3R_3 = V_{AB} + E_3$; despejando hallamos $I_3 = 45nA$.

Listo, ya podemos calcular la corriente por la segunda rama. En la próxima figura vemos que el único sentido posible para I_2 es desde el exterior (B) hacia el interior (A) de la célula (como habíamos discutido anteriormente), y su valor es $I_2 = I_1 + I_3 = 165nA$.

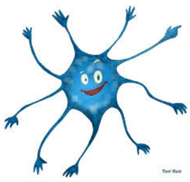


Ahora sí usamos la ecuación para la diferencia de potencial:$V_{AB} = -I_2R_2 + E_2$. Despejando de esta ecuación hallamos que $R_2 = \frac{V_{AB}-E_2}{-I_2} = 60,606K\Omega$. La resistencia del canal del sodio bajó de $10M\Omega$ a $60K\Omega$, es 167 veces menor; el canal del sodio aumentó su conductividad, que es lo que habíamos mencionado antes de hacer las cuentas.

Esquema del potencial de membrana.



El enfoque biológico de lo que estuvimos discutiendo lo pueden encotrar bien desarrollado en *Ion Channels of Excitable Membranes*, de Bertil Hille. La física de circuitos de corriente continua se puede leer de manera muy amena en *Física 2*, de Resnick o en *Electricidad y magnetismo*, volumen 2 del curso de física de Berkeley.



That's all folks!