Laboratorio de Física 1 (BG)

Guía 2

Primera Parte: Mediciones indirectas y diferencias significativas.

Verano de 2013

1 Objetivos

- Incorporar el tratamiento de incertezas en mediciones de magnitudes que se obtienen en forma indirecta.
- Desarrollar criterios para comparar distintas mediciones de una misma magnitud.

2 Introducción

No siempre se cuenta con un instrumento para medir en forma directa la magnitud requerida, sino que ésta se tiene que derivar de algunas otras magnitudes medidas en forma directa. Es decir, que existirá alguna relación funcional entre las magnitudes medidas en forma directa y la que se desea obtener, dependiendo del experimento que se realice.

Nos enfrentaremos frecuentemente con este problema en el laboratorio a la hora de decidir cómo medir una magnitud, incluso en los experimentos más simples. En ese caso habrá que tener en cuenta que la validez de las hipótesis del método utilizado condicionarán el resultado.

Por ejemplo, si queremos medir el volumen de un cuerpo cuya forma se aproxima razonablemente a alguna forma geométrica regular (esfera, cubo, etc.), se podría obtener calculando dicho volumen a partir de la medición directa de longitudes (el diámetro, un lado, etc). ¿Pero son realmente esos cuerpos una esfera o un cubo perfecto?

Cuando medimos una magnitud en forma directa, obtenemos como resultado de la medición un rango de valores, determinado con un valor medio y una incerteza. Por ejemplo: $x_0 \pm \Delta x$ (donde: x_0 es el valor medio y Δx la incerteza) significa que podemos asegurar que la magnitud medida está contenida en el rango $(x_o - \Delta x, x_o + \Delta x)$ con un nivel de confianza de aproximadamente el 70%.

Una *medición indirecta* también tendrá un valor medio y una incerteza. ¿Cómo los obtenemos? Las incertezas de las mediciones directas deberían influir o propagarse sobre el resultado de la medición indirecta. ¿La incerteza de la medición indirecta debería depender sólo de las incertezas de las mediciones directas o también de la relación entre estas magnitudes?

Por otro lado, si medimos una misma magnitud por diferentes métodos, obtendremos diferentes resultados de cada medición, es decir, obtendremos diferentes valores medios e incertezas. ¿Cómo las comparamos? ¿Cómo podemos determinar si dos resultados son equivalentes o son distintos?

Mediante experimentos simples, en esta práctica aprenderemos las herramientas necesarias para obtener la incerteza de una medición indirecta a partir de mediciones directas de magnitudes independientes y para comparar resultados de una misma magnitud procedentes de experimentos diferentes.

3 Actividades

La práctica consiste en medir el volumen de un cuerpo al menos por tres métodos distintos. Recordar que el método involucra no sólo la elección de los instrumentos de medición a utilizar, sino también el diseño del experimento.

- ¿Qué métodos utilizarías?
- ¿Qué suposiciones harías en cada caso para que el método sea razonablemente válido?

3.1 Preguntas para pensar y discutir

- ¿Todos los métodos que utilizaron son indirectos?
- Si utilizaron valores tabulados para alguno de los experimentos, ¿qué incerteza le asignaron?
- ¿Se obtuvo el mismo resultado mediante los distintos métodos utilizados? ¿Cómo los compararon?
- ¿Cuál resultado dirías que es el más preciso? ¿y el más confiable? ¿Por qué?
- Si tuviesen que informar un único valor como resultado de la magnitud que midieron. Suponiendo que todos los resultados son comparables, ¿Qué valor informarían? ¿Por qué?
- Suponiendo que los resultados NO son comparables, ¿Qué valor informarían? ¿Por qué?
- ¿Por qué se pide que las magnitudes involucradas sean independientes? ¿Cómo influiría sobre el resultado si no lo fueran?

4 Apéndice: Propagación de incertezas

Se puede obtener en forma indirecta la magnitud W, midiendo en forma directa las magnitudes x,y,z, etc. independientes entre sí, mediante una función $f(x, y, z, ...)$ que las relacione tal que $W = f(x, y, z, ...)$.

Entonces a partir de las mediciones directas, conocemos los valores:

$$\begin{aligned} x_o &\pm \Delta x \\ y_o &\pm \Delta y \\ z_o &\pm \Delta z \end{aligned}$$

se puede obtener en forma indirecta la magnitud $W_0 \pm \Delta W$ siendo:

$$W_o = f(x_o, y_o, z_o, ...) \tag{1}$$

$$\Delta W = \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z \right]^2 \right\}^{1/2} \tag{2}$$

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ es la derivada parcial de f con respecto a x, que se obtiene considerando a x como única variable y al resto (x, y, z, ...) como constantes. Notamos que recién después de calcular la derivada parcial de la función , se evalúa dicha expresión en los valores medios (x_0, y_0, z_0, ...). De la misma forma, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ es la derivada de f con respecto a la variable y, considerando al resto (x , z, ...) como constantes.

La expresión 2 es la conocida *fórmula de propagación de errores.* Es válida siempre que las mediciones de las variables x, y, z, ... sean independientes[1]. La expresión 2 es una fórmula aproximada para ΔW, válida cuando las derivadas parciales de orden superior de f son despreciables frente a la derivadas parcial de primer orden. En general, asumiremos que estamos dentro de las hipótesis de validez de est aproximación.

4.1 Ejemplo

- Si se quiere medir el área S de una mesa rectangular de lados $A_0 \pm = \Delta A$ y $B_0 \pm \Delta B$, el resultado de esa magnitud indirecta será $S_0 \pm \Delta S$. El valor medio del área de la mesa, será:

  $$S_0 = A_0 \cdot B_0$$

  y su incerteza:

  $$\Delta S = \left\{ \left[\frac{\partial S}{\partial A}(A_0, B_0) \cdot \Delta A \right]^2 + \left[\frac{\partial S}{\partial B}(A_0, B_0) \cdot \Delta B \right]^2 \right\}^{1/2} = \left\{ [B_0 \cdot \Delta A]^2 + [A_0 \cdot \Delta B]^2 \right\}^{1/2}$$

  donde

  $$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial A}(A_0, B_0) &= B_0 \\ \frac{\partial S}{\partial B}(A_0, B_0) &= A_0 \end{aligned}$$

  De esta form se encuentra el error ΔS de S_0.

[1] Independencia significa que conocer la magnitud x no provee ninguna información acerca de la incerteza de la magnitud y. Esta situación se da siempre que medimos magnitudes realizando experimentos independientes.

Segunda Parte: Análisis de relaciones no-lineales, Leyes de Escala y Alometría

1 Objetivo

Análisis de relaciones no-lineales mediante el estudio de leyes de escala alométricas en plantas.

2 Introducción

En esta guía estudiaremos cómo analizar y demostrar que una determinada relación presenta características no-lineales, principalmente como hacer para determinar cual es la forma funcional de dicha relación. Los casos de estudio que te proponemos son diversas leyes de escala en plantas. Un ejemplo muy impresionante de leyes de escala en biología es el caso de las *leyes alométricas* que se expresan de la forma:

$$Y = Y_0 M^b$$

donde Y es la variable biológica y M es la masa, mientras que b y Y_0 son constantes que caracterizan la relación. Muchos y variados fenómenos biológicos tienen la particularidad de escalear como "cuartos". Por ejemplo, la tasa metabólica escalea como $M^{3/4}$, el ritmo cardíaco y la tasa de metabolismo celular escalean como $M^{1/4}$, el tiempo de circulación de la sangre y el crecimiento embrionario escalean como $M^{1/4}$. Existe un modelo desarrollado por *West*, *Brown* y *Enquist[1]* (modelo de WBE) que propone que, tanto en plantas como en animales, la evolución por selección natural ha resultado en optimizar las redes vasculares de forma fractal. Esta es la principal hipótesis que permite predecir las leyes de escala mencionadas anteriormente (entre muchas otras)[2].

3 Actividades

Lo que proponemos básicamente en esta práctica es juntar hojas y medir a alguna de sus características físicas. La idea es colectar por lo menos 10 hojas frescas (pueden ser de la misma especie o de especies diferentes). Lo importante es que abarquen un rango amplio de tamaños. Por ejemplo, hoja de orégano y hoja de gomero.

1. Para cada hoja medimos la masa, el largo, el ancho y el área. Puede agregarse además otras variables como el número de nervaduras o las que parezcan relevantes. Con esos datos se grafica cada una de las variables medidas en función de la masa, en escala lineal.

   - Qué forma tienen los datos? (por ejemplo: recta, cuadratica, cubica, raz cuadrada, etc).
   - Puede hacerse un ajuste lineal?

2. Repetir los gráficos del ítem anterior, pero esta vez utilizando el logaritmo de las variables.

   - Qué forma adoptan en esta representación? Discutir la información que podra obtenerse de un ajuste lineal.

3.1 Algunas preguntas

Aquí van algunas preguntas que pueden orientar a lo largo de la práctica. Recomendamos leerlas antes, y sobre todo, volver a leerlas después! Las preguntas pueden cambiar de significado a medida que la práctica avanza.

- Cómo se puede medir el área de una hoja? Qué incerteza le adjudican a dicha medición?
- Qué otros modos de cuantificar el "tamaño" se les ocurren?
- Si la masa de una hoja crece al doble, entonces el largo/ancho/área de la hoja crece al doble también?
- Si los datos en escala lineal no parecen una recta, pero en logaritmo sí, qué puede decirse?
- Si los datos en escala lineal parecen una recta, y en logaritmo también, qué puede decirse?
- Y si los datos no parecen una recta de ningun modo?

4 Información adicional

En el caso de plantas, el modelo de WBE permite realizar ciertas predicciones:

$$L = L_0 M^{1/4}$$

$$r = r_0 M^{3/8}$$

siendo L la altura de la planta, r el radio del tronco y M la masa.

Respecto de la geometría de la planta, también existen predicciones interesantes:

$$A = A_0 r^2$$

$$N = N_0 r^{-2}$$

siendo A el área de la hoja, N el número de ramas, y r el radio del tronco. Pueden encontrar una lista con muchas más leyes alométricas en el cuadro 1.

Referencias

[1] West, Brown y Enquist, *Nature* **400**, 664 (1999)

[2] Price y Enquist, *Functional Ecology* **20**, 11 (2006)

Table 1 Predicted values of scaling exponents for physiological and anatomical variables of plant vascular systems.

Variable	Plant mass		Branch radius		
	Exponent predicted	Symbol	Symbol	Exponent	
				Predicted	Observed
Number of leaves	$\frac{3}{4}$ (0.75)	n_0^L	n_k^L	2 (2.00)	2.007 (ref. 12)
Number of branches	$\frac{3}{4}$ (0.75)	N_0	N_k	–2 (–2.00)	–2.00 (ref. 6)
Number of tubes	$\frac{3}{4}$ (0.75)	n_0	n_k	2 (2.00)	n.d.
Branch length	$\frac{1}{4}$ (0.25)	l_0	l_k	$\frac{2}{3}$ (0.67)	0.652 (ref. 6)
Branch radius	$\frac{3}{8}$ (0.375)	r_0			
Area of conductive tissue	$\frac{7}{8}$ (0.875)	A_0^{CT}	A_k^{CT}	$\frac{7}{3}$ (2.33)	2.13 (ref. 8)
Tube radius	$\frac{1}{16}$ (0.0625)	a_0	a_k	$\frac{1}{6}$ (0.167)	n.d.
Conductivity	1 (1.00)	K_0	K_k	$\frac{8}{3}$ (2.67)	2.63 (ref. 12)
Leaf-specific conductivity	$\frac{1}{4}$ (0.25)	L_0	L_k	$\frac{2}{3}$ (0.67)	0.727 (ref. 17)
Fluid flow rate			$\dot{Q}_k$	2 (2.00)	n.d.
Metabolic rate	$\frac{3}{4}$ (0.75)	$\dot{Q}_0$			
Pressure gradient	$-\frac{1}{4}$ (–0.25)	$\Delta P_0/l_0$	$\Delta P_k/l_k$	$-\frac{2}{3}$ (–0.67)	n.d.
Fluid velocity	$-\frac{1}{8}$ (–0.125)	u_0	u_k	$-\frac{1}{3}$ (–0.33)	n.d.
Branch resistance	$-\frac{3}{4}$ (–0.75)	Z_0	Z_k	$-\frac{1}{3}$ (–0.33)	n.d.
Tree height	$\frac{1}{4}$ (0.25)	h			
Reproductive biomass	$\frac{3}{4}$ (0.75)				
Total fluid volume	$\frac{25}{24}$ (1.0415)				

Values are given as a function of total plant mass, M, and branch radius, r_k. For the latter case, predictions are compared with measured values in the last column. References cited do not quote confidence levels, except for branch length, where they are given as ± 0.036. Because botanists rarely report allometric scaling with mass, no values for observed exponents are quoted. n.d., no data available.

Cuadro 1: Leyes de escala alométricas para diversas variables anatómicas y fisiológicas de sistemas vasculares de plantas.