# Guía 1: Mediciones Directas e Indirectas
# Estimación del período de un péndulo / Estimación de la constante de gravedad (g).

Turno P. Balenzuela - Laboratorio Jueves - Dept. Física, FCEyN, UBA.
Nuevo Plan de Carrera

Marzo 2018

## 1 Introducción:

Esta guía sugiere algunas actividades para familiarizarse con la medición y el análisis estadístico de magnitudes aleatorias. En principio se podría decir que una magnitud es aleatoria si al reproducir muchas veces la medición de una misma magnitud arroja resultados distintos. Dependiendo del método utilizado en el experimento, el observador también puede ser parte del proceso de medición. La interacción del observador con el experimento puede afectar el resultado de la medición. En particular, en algunos experimentos, el resultado puede ser sensible al tiempo de reacción del observador (el intervalo transcurrido entre la percepción de un estímulo y la acción motora).

Por otro lado, cuando se desea obtener una magnitud física, no siempre se cuenta con un instrumento para medirla en forma DIRECTA. Frecuentemente, la magnitud deseada se deriva de algunas otras magnitudes que fueron obtenidas en forma directa. Esto se logra a través de alguna relación funcional entre las magnitudes, y se dice que la medición fue INDIRECTA. Por ejemplo, podemos medir la distancia recorrida por un móvil y el tiempo transcurrido de forma directa (con metro y cronómetro), pero para saber la velocidad debemos estimarla de forma indirecta.

La elección del experimento es un punto crítico a la hora de obtener una magnitud. Para ello, resulta de suma importancia la decisión de los instrumentos a utilizar, así como el método elegido (siempre hay que pensar que se debe tener en cuenta la validez de las hipótesis del método utilizado).

Por ejemplo, si queremos obtener la superficie de un cuerpo cuya forma se aproxima a alguna forma geométrica conocida (círculo, cuadrado, etc), se podría medir directamente las longitudes (diámetros, lados, etc.) y luego realizar la cuenta adecuada para obtener la magnitud deseada. ¿Pero son realmente esas superficies círculos o cuadrados perfectos?

Cuando medimos una magnitud en forma directa, obtenemos como resultado de la medición un conjunto de valores que llamamos INTERVALOS DE CONFIANZA relacionados a la INCERTEZA de la medición. Por ejemplo, si medimos en forma directa la magnitud $x$, dado $x = x_0 \pm \Delta x$ (donde: $x_0$ es el valor medio y $\Delta x$ el error absoluto), podemos decir que un dado valor de la magnitud medida se encuentra en el intervalo $(x_0 - \Delta x,\ x_0 + \Delta x)$ con cierta probabilidad, que depende de como hayamos calculado el error absoluto.

Al expresar una magnitud que fue obtenida en forma indirecta, también lo haremos en la forma: $W = W_0 \pm \Delta W$. Pero, ¿Cómo se obtienen estos parámetros? Las incertezas de las mediciones directas deberían influir o propagarse sobre el resultado de la medición indirecta. ¿La incerteza de la medición indirecta depende sólo de las incertezas de las mediciones directas o también de la relación entre ellas?

Supongamos que se puede obtener en forma indirecta la magnitud W midiendo en forma directa las magnitudes x, y, z,... (independientes entre sí), mediante una función $f(x, y, z, ...)$, tal que $W = f(x, y, z, ...)$.

A partir de las mediciones directas, conocemos los valores: $x = x_0 \pm \Delta x$; $y = y_0 \pm \Delta y$; $z = z_0 \pm \Delta z$;....

Entonces, se puede obtener en forma indirecta la magnitud $W = W_0 \pm \Delta W$ siendo:

$$W_0 = f(x_o, y_o, z_o, ...) \tag{1}$$

$$\Delta W = \left\{ [\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0, ...) \cdot \Delta x]^2 + [\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0, ...) \cdot \Delta y]^2 + [\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0, ...) \cdot \Delta z \right\}^2 + ...]^{1/2} \tag{2}$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}$ es la derivada parcial de $f$ con respecto a $x$, evaluada en los valores medios: $x_0, y_0, z_0, ...$; que se obtiene considerando a $x$ como la única variable, mientras que al resto $y, z, ...$ se las considera constantes. Notar que recién después de calcular la derivada parcial, se evalúa dicha expresión en $x_0, y_0, z_0, ....$ De la misma forma, es la derivada parcial de $f$ con respecto a la variable $y$, considerando al resto $(x, z, ...)$ constantes. La expresión (2) se conoce como **fórmula de propagación de errores**. Es válida siempre que los parámetros $x, y, z, ...$ sean independientes (independencia significa que conocer la incerteza de la magnitud $x$ no provee ninguna información acerca de la incerteza de las otras magnitudes). La expresión (2) es una fórmula aproximada para $\Delta W$, que es válida cuando las derivadas parciales de $f$ de orden superior son despreciables frente a la primer derivada parcial (en general, estaremos dentro de las hipótesis de validez de esta aproximación). Pueden seguir un ejemplo en el ápendice.

Por otro lado, si medimos una misma magnitud física utilizando diferentes métodos, ¿obtendremos resultados diferentes? ¿Cómo podemos determinar si dos resultados son distintos?

Los objetivos del presente TP son, a partir de una serie de mediciones,

- Estimar la magnitud y la incerteza estadística del fenómeno estudiado.
- Comprender y comparar distintos métodos para estimar estos valores, y cómo estos varían con el número de observaciones.
- Estudiar el tratamiento de las incertezas de magnitudes que se obtienen en forma indirecta.
- Discutir los conceptos de precisión, exactitud y confianza.

# 2 Experiencia 1.

Esta guía propone una actividad para familiarizarse con la medición y el análisis estadístico de magnitudes aleatorias. Para ello, se propone medir el período de un péndulo con un cronómetro. El tiempo medido depende de muchos factores: del nivel de atención del alumno, del requerimiento de una decisión para discriminar valores que resultaron dudosos, entre otros, además del instrumental y el método utilizado.

1. Enumeren todos los factores que se les ocurre que podrían afectar la medición. Incluyendo factores que pueden ser deseados (potenciales manipulaciones como el largo del hilo) o no deseados (potenciales fuentes de error como la atención del operador o su tiempo de reacción). Para cada uno de ellos, especifiquen como esperan que afecte la medición y como podrían controlarlo.

2. Un integrante del grupo tome 200 mediciones del período del péndulo, utilizando un cronómetro. ¿Hay una única forma de hacerlo? ¿Cuál eligieron? ¿Por qué?

3. Importe los datos al programa de análisis (Origin / Python). Divida los datos en diferentes grupos: N = 200, N = 120, N = 60 y N = 30, y obtenga el valor medio, desvío estándar y error estándar, en cada caso. Evalúe la influencia del tamaño de la muestra (N) sobre cada uno de estos estimadores.

4. Realice los gráficos de los histogramas correspondientes a los diferentes grupos de mediciones: N = 200, N = 120, N = 60 y N = 30, y determine la Moda, la Mediana y la Media de cada distribución de datos.

5. Obtenga la curva de Gauss que represente a cada distribución ajustando por una función de la forma:

$$G(x) = (\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}) \cdot exp(\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}) \tag{3}$$

Obtenga el ancho de la curva de Gauss para sistema ($\sigma$) y evalúe la influencia de N sobre dicho parámetro.

*Una guía para ajustar datos de histogramas con Origin se encuentra en la web de la materia:* `http://materias.df.uba.ar/f1byga2018c1`

*Una guía para ajustar datos de histogramas con Python se encuentra en:* `https://github.com/jkamienkowski/LF1BG`

Las siguientes preguntas pueden ayudar al análisis y comprensión del estudio desarrollado:

- ¿En dónde se encuentra la mayor influencia del instrumento de medición?
- ¿El tiempo de reacción es un factor a tomar en cuenta?
- Si se quiere comparar si una nueva medición pertence a dicho conjunto. ¿Con qué medidas se lo debe comparar?

- Si se realiza un nuevo experimento, con varias mediciones, del cual se obtiene un nuevo valor medio y se lo quiere comparar con el anterior. ¿Con qué medidas se lo debe comparar?
- ¿Cómo puedo disminuir la incerteza de la magnitud obtenida si el error estadístico resulta mucho menor que el Nominal?
- ¿Es necesario hacer tantas mediciones del experimento?

## 2.1 Otras actividades

Y si se quedaron con ganas de más... Les proponemos realizar algunas de las siguientes experiencias. Repetir el análisis anterior, teniendo en cuenta las nuevas experiencias.

### 2.1.1 Experiencia Alternativa 1.1 (Tiempo de reacción)

Un compañero deberá sostener una regla común con la mano, dejándola colgar libremente desde el extremo superior. Otro deberá colocar su mano cerca del extremo inferior, con los dedos pulgar e índice ligeramente abiertos alrededor de la regla. El primero va a soltar la regla sin avisar, mientras el segundo deberá atraparla lo más rápido posible.

- ¿Qué incerteza se le asigna a la medición de distancia?
- ¿Cómo se puede calcular el tiempo de reacción?
- ¿Qué incerteza genera en el valor del tiempo de reacción?

### 2.1.2 Experiencia Alternativa 1.2 (Tiempo de reacción)

¿La medición depende del operador? Otro miembro del grupo puede repetir la experiencia (tomando sólo las mediciones que crean necesarias a partir de sus resultados anteriores).

# 3 Experiencia 2.

A partir de los resultados anteriores, hallé el valor de la constante gravitaria ($g$), sabiendo que:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{4}$$

donde $T$ es el período y $L$ es la longitud del hilo.

Al analizar y presentar los datos es importante tener presente las siguientes preguntas:

- Comparen el resultado con los otros grupos ¿Todos obtuvieron el mismo valor? ¿Las diferencias entre los valores de los distintos grupos fueron significativas?

- ¿El resultado significativo es distinguible del resultado esperado? ¿El resultado esperado tiene una incerteza?
- ¿Qué grupo obtuvo el resultado el resultado más preciso? ¿Y el más más exacto? ¿Por qué?
- En el calculo está involucrado $\pi$ ¿Este tiene una incerteza asociada? Si es así, ¿Cómo la consideraría? ¿O la despreciaría? ¿Por qué?

## 3.1 Otras actividades

Y si todavía les sobra tiempo... Les proponemos una experiencia más, además de que siempre está abierta la posibilidad de seguir probando mejorar / modificar las experiencias anteriores.

## 3.2 Experiencia Alternativa 2.1. Comparación de métodos y resultados en la medición de volumen

Con el objetivo de comparar tanto los resultados de una misma magnitud obtenida por diferentes métodos, como comparar los métodos. Se buscará obtener el volumen de un cuerpo utilizando tres métodos experimentales diferentes. Cabe recordar que el método involucra tanto la elección de los instrumentos de medición, como el diseño del experimento. ¿Qué métodos utilizarías? ¿Qué suposiciones harías en cada caso para que el método sea razonablemente válido?

Las siguientes preguntas pueden ayudar para el análisis de los datos y considerar algunos aspectos de los métodos utilizados:

- Si utilizaron valores tabulados para alguno de los experimentos, ¿Qué incerteza les asignaron?
- ¿Se obtuvo el mismo resultado mediante los distintos métodos utilizados? ¿Cómo los compararon?
- ¿Qué resultado dirías que es el más preciso? ¿Y el más confiable? ¿Por qué? ¿Se puede hablar de exactitud en esta experiencia?

### 3.2.1 Determinación del error en la superficie

Si se quiere medir el área $S$ de una mesa rectangular de lados $A$ y $B$. Tanto $A$ como $B$ fueron medidas directamente utilizando una cinta métrica, resultando: $A = A_0 \pm \Delta A$ y $B = B_0 \pm \Delta B$. El resultado de la medición indirecta de esta magnitud $S$ será: $S = S_0 \pm \Delta S$. El valor medio del área de la mesa se obtiene como:

$$S_0 = A_0 \cdot B_0 \tag{5}$$

Y su incerteza,

$$\Delta S = \left\{ [\frac{\partial S}{\partial A}(A_0, B_0) \cdot \Delta A]^2 + [\frac{\partial S}{\partial B}(A_0, B_0) \cdot \Delta B]^2 \right\}^{1/2} \tag{6}$$

Donde, $\frac{\partial S}{\partial A}(A_0, B_0) = B_0$ y $\frac{\partial S}{\partial} B(A_0, B_0) = A_0$. Entonces obtenemos,

$$\Delta S = \left\{ [B_0 \cdot \Delta A]^2 + [A_0 \cdot \Delta B]^2 \right\}^{1/2} \tag{7}$$