Primer parcial - 15/05/2018

Resuelva los ejercicios en hojas separadas; utilice $g = 10\frac{m}{s^2}$
<u>Justifique todos sus razonamientos</u>

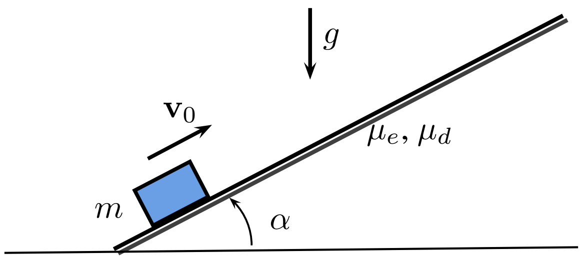
1. (**3pts**) Un paquete de masa m es lanzado, con velocidad inicial $\mathbf{v}_0$, sobre un plano con inclinación α. El paquete sube hasta detenerse luego de recorrer cierta distancia sobre el plano y vuelve a bajar. Entre la superficie y el paquete hay rozamiento.

   a) Realice el diagrama de cuerpo libre para el paquete (subiendo y bajando) y plantee las ecuaciones de Newton correspondientes.

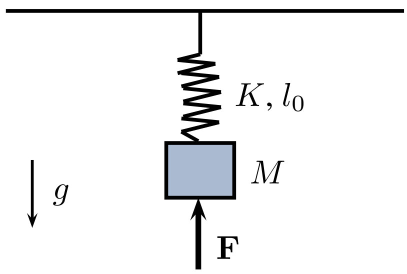
   b) Sin hacer cuentas: ¿espera que la aceleración sea la misma a la subida que a la bajada?

   c) En el caso en que $\alpha = 30°$, $\mu_d = 0{,}2$, $\mu_e = 0{,}4$ y $m = 20$kg, calcule la aceleración del paquete a lo largo de todo el movimiento e indique claramente la intensidad y la dirección de la fuerza de rozamiento para cada caso.

   d) Muestre que en la altura máxima, cuando el paquete se detiene, no puede permanecer en reposo.



Ejercicio 1



Ejercicio 2

2. (**3.5pts**) Un resorte con constante elástica K y longitud propia l_0 tiene un extremo fijo al techo y el otro unido a un bloque de masa M. Sobre el bloque se aplica una fuerza $\mathbf{F}$ constante como se muestra en la figura.

   a) Realice un diagrama de cuerpo libre para el bloque e indique los pares de acción-reacción presentes. Comente qué supuso sobre el resorte para realizar el diagrama.

   b) Calcule la posición de equilibrio para el bloque. Analice el resultado en función de los parámetros del problema. *Sugerencia: elija un sistema de referencia conveniente para escribir* <u>*fácilmente*</u> *a la fuerza elástica.*

   c) Escriba la ecuación de movimiento para la posición vertical del bloque. ¿Cuánto vale la frecuencia de oscilación? Si se duplica el valor de la fuerza $\mathbf{F}$, indique cómo cambia la frecuencia.

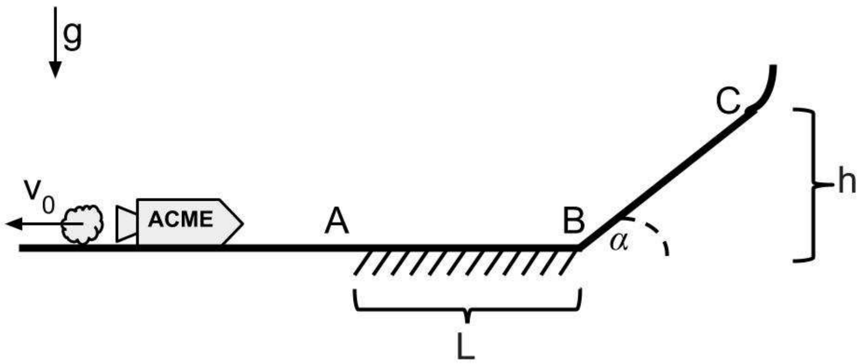
   d) En el caso en que $K = 250$N/m, $l_0 = 50$cm, $M = 5$kg y $F = 12$N, halle la amplitud y fase del movimiento si en el instante inicial el bloque parte de la posición de equilibrio con velocidad de 1m/s dirigida hacia el techo. Calcule la mínima distancia respecto al techo que alcanza el bloque.

3. (**3.5pts**) Un cohete de masa total M_t, conformado por un proyectil y combustible (de masa m_{comb}), se encuentra inicialmente en reposo. En un determinado instante se expulsa el combustible a una velocidad v_0, con el objetivo de empezar a deslizar al proyectil por una rampa para que éste luego ascienda verticalmente, tal como se muestra en la figura. Tenga en cuenta que entre los puntos A y B hay un rozamiento no despreciable con la superficie, cuyos coeficientes estático y dinámico son μ_e y μ_d.

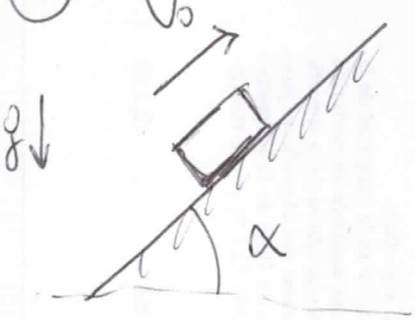
   a) En la primer etapa, cuando el combustible es expulsado: diga si el momento lineal y la energía del sistema se conservan. Calcule la velocidad que adquiere el proyectil luego de expulsar el combustible.

   b) Luego de expulsar al combustible, numere todas las fuerzas presentes sobre el proyectil en todo el recorrido y diga cuáles de ellas son no conservativas y cuáles realizan trabajo. Encuentre la energía del proyectil en los puntos A, B y C. ¿Se conserva la energía mecánica?

   c) Calcule si el proyectil logra llegar a la estratósfera ($10000m$ de altura), en el caso donde $M_t = 3m_{comb}$, $\mu_e = 0{,}5$, $\mu_d = 0{,}1$, $L = 20000m$ y $v_0 = 1000\frac{m}{s}$. Explique qué diferencias habría si se aumenta al doble m_{comb} manteniendo la relación original entre m_{comb} y M_t.

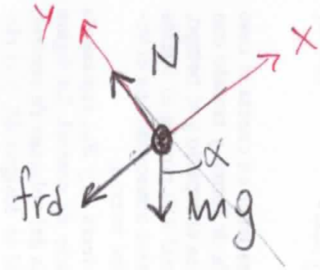


(1)



a) Diag. cuerpo libre y ecs Newton

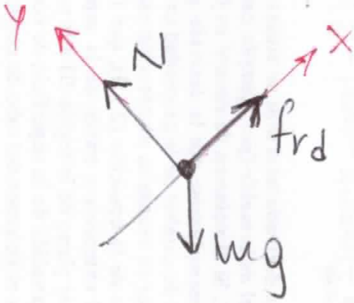
Subiendo



$x)\ -f_{rd} - mg\,\text{sen}\alpha = ma$

$y)\ N - mg\cos\alpha = 0$

Bajando



$x)\ f_{rd} - mg\,\text{sen}\alpha = ma$

$y)\ N - mg\cos\alpha = 0$

Tanto en la subida como en la bajada actúa el rozamiento dinámico (el cuerpo se desliza sobre la rampa).

De la ec en y) $N = mg\cos\alpha$

y vale que $f_{rd} = \mu_d N = \mu_d mg\cos\alpha$

b) En la subida ambas fuerzas (rozamiento y peso) se oponen al movimiento, mientras que en la bajada el peso va a favor. Por lo tanto, en la subida la aceleración (en módulo) será mayor que en la bajada.

c) Datos: $\alpha = 30°$, $\mu_d = 0{,}2$ y $m = 20\ kg$, $g = 10\ m/s^2$

$N = 20kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot \cos(30) \rightarrow N = 173{,}2\ N$

$f_{rd} = 0{,}2\ \ 173{,}2\ N \longrightarrow f_{rd} = 34{,}64\ N$. (tanto en subida como en bajada)

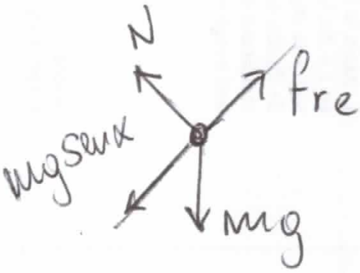
SUBIDA: $a = \frac{-\mu_d mg\cos\alpha - mg\,\text{sen}\alpha}{m} \Rightarrow \boxed{a = -g(\mu_d\cos\alpha + \text{sen}\alpha)}$

$a = -6{,}73\ \frac{m}{s^2}$: Sube frenando

BAJADA: $a = \frac{\mu_d mg\cos\alpha - mg\,\text{sen}\,\alpha}{m} \Rightarrow \boxed{a = g(\mu_d \cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)}$

$a = -3{,}26\ \frac{m}{s^2}$: baja acelerando

d) En la altura máxima, el cuerpo queda instantáneamente en reposo. Si la fuerza de rozamiento estática es suficiente para compensar a la componente del peso paralela al plano inclinado entonces el cuerpo quedará en reposo:



$$fre - mg\,\text{sen}\,\alpha = 0 \quad (\text{reposo})$$

$$fre = \cancel{mg}\,\text{sen}\,\alpha \leq \mu_e \cancel{mg}\cos\alpha$$

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \leq \mu_e \Rightarrow \boxed{tg\,\alpha \leq \mu_e}$$

condición de reposo.

DATOS: $\mu_e = 0{,}4$, $\alpha = 30°$

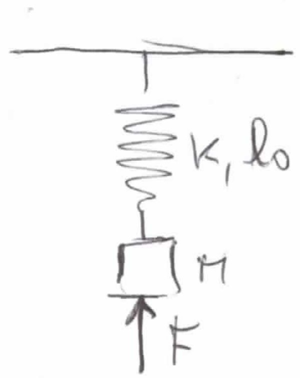
$tg\,\alpha = 0{,}57$

veo que $tg\,\alpha \leq \mu_e$

$0{,}57 \leq 0{,}4$ no se cumple

$\Rightarrow$ en la altura máxima no puede quedar en reposo

②



a) Diag cuerpo libre

•) Si el resorte está comprimido

*) la reacción a Mg está en la Tierra;

*) la reacción a F_e está sobre el resorte

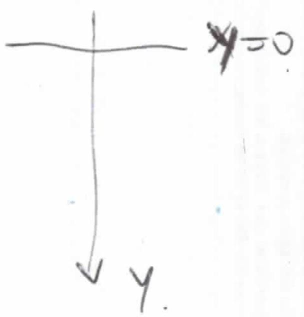
*) la reacción a F está sobre quien aplique la fuerza.

•) Si el resorte está estirado

Reacciones:
Igual que antes

b) Posición de equilibrio: busco ~~cuando~~ dónde la aceleración se anula.

Elijo un sist de ref. con origen en el techo y positivo vertical hacia abajo



Con este sist de ref $F_e = -K(Y - l_0)$

Equilibrio: $F_e + Mg - F = 0$

$$-k(Y_{eq} - l_0) + Mg - F = 0$$

$$\boxed{Y_{eq} = \frac{Mg - F}{K} + l_0}$$

O sea, Y_{eq} es l_0 más un término que puede ser:

i) positivo ($Mg > F$, el peso aporta más fuerza que F) ⇒ el equilibrio está por debajo de l_0 (resorte estirado)

ii) Negativo ($Mg < F$, el peso aporta menos fuerza que F) ⇒

el equilibrio está por arriba de l_0 (resorte comprimido).

c) Ec Newton para la posición vertical:

$$M\ddot{y} = F_e + Mg - F$$

$$M\ddot{y} = -k(y - l_0) + Mg - F$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{M}(y - l_0) + \frac{Mg - F}{M}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = -\frac{k}{M}\left[y - \left(l_0 + \frac{Mg - F}{k}\right)\right]$$

que es de la forma $\ddot{y} = -\omega^2 [y - y_{eq}]$

con $\omega^2 = \frac{k}{M}$: frec de oscilación (indep'te de F)

y $y_{eq} = l_0 + \frac{Mg - F}{k}$: posición de equilibrio.

Una posible solución es

$$y(t) = y_{eq} + A\cos(\omega t + \phi) \quad , \quad v(t) = -A\omega \,\text{sen}(\omega t + \phi)$$

d) DATOS: $k = 250\,\frac{N}{m}$, $l_0 = 0{,}5\,m$, $M = 5\,kg$, $F = 12\,N$, $g = 10\,\frac{m}{s^2}$

$$y_{eq} = 0{,}5\,m + \frac{50N - 12N}{250\,N/m} \rightarrow y_{eq} = 0{,}652\,m$$

$$\omega = \sqrt{\frac{250\,N/m}{5\,kg}} = 7{,}07\,\frac{rad}{seg}$$

Condiciones Iniciales

$$y(0) = y_{eq}$$

$$v(0) = -1\,m/s \quad \text{(por el sist de ref. elegido)}$$

Encuentro Amplitud y fase:

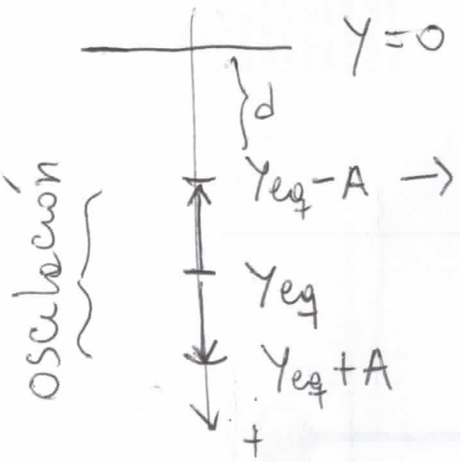
$$Y(0) = \cancel{Y_{eq}} = \cancel{Y_{eq}} + A\cos(\phi) \Rightarrow A\cos(\phi) = 0$$

solo si $\cos(\phi) = 0 \rightarrow$ elijo $\boxed{\phi = \frac{\pi}{2}}$

$$V(0) = -1\,\frac{m}{s} = -A \cdot 7{,}07\,\frac{1}{seg}\,\overbrace{sen(\pi/2)}^{1} \Rightarrow \boxed{A = 0{,}14\,m}$$

Por lo tanto:

$$Y(t) = 0{,}652\,m + 0{,}14\,m \cdot \cos(\omega t + \pi/2)$$



$Y_{eq}-A \rightarrow$ posición de máximo acercamiento al techo: $0{,}652m - 0{,}14m$

$d = \boxed{0{,}512\,m}$

dist. mínima al techo

(3)

a) Durante la expulsión del combustible podemos despreciar la acción de las fuerzas externas $\Rightarrow$ $\bar{P}_{sis}$ se conserva. El sistema es el cohete, formado por el proyectil + el combustible

Como inicialmente el cohete estaba en reposo

$$\bar{P}_{sis} = 0 = \underbrace{m_{comb}\,\bar{V}_0 + m_{proy}\,\bar{V}_{proy}}_{\bar{P}_{sis}\ final}$$

Con esta ecuación encuentro la velocidad de salida que tiene el proyectil:

$$\bar{V}_{proy} = -\frac{m_{com}}{m_{proy}}\,\bar{V}_0 \quad , \qquad \text{y dado que } M_T = m_p + m_c$$

$$m_p = M_T - m_c$$

$$\bar{V}_0 = -V_0\,\check{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{V}_{proy} = \frac{m_{com}}{M_T - m_{comb}}\,V_0\,\check{x}}$$

velocidad inicial que adquiere el proyectil

La energía del sistema no se conserva ya que inicialmente estaba en reposo ($E_{cin} = 0$) y luego sus partes adquieren velocidad ($E_{cin} > 0$). Por lo tanto $\Delta E \neq 0$. Las fuerzas internas las genera la explosión del combustible.

b) Luego de la expulsión del combustible el proyectil atraviesa: i) una zona horizontal con rozamiento; ii) una rampa sin rozamiento; iii) asciende verticalmente.

En la etapa i) actúan peso, normal y rozamiento

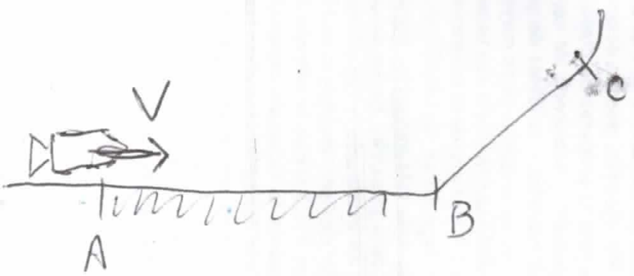
N y frd no son conservativas

- N no realiza trabajo ($\perp$ al desp)
- froz realiza trabajo negativo
- Mg no realiza trabajo ($\perp$ al desp)

En la etapa ii) N es no conservativa y no ~~rea~~ realiza trabajo

Mg realiza trabajo negativo ($W_{peso} = -\Delta U_g$)

En la etapa iii) solo actúa el peso y vale que ~~Δ~~ $W_{peso} = -\Delta U_{grav}$



En A: $E_{Mec} = \frac{1}{2} M V_A^2$

siendo $V_A = \frac{m_{com}}{M_T - m_{comb}} V_0$

la vel de salida luego de la expulsión del combustible

En B: $E_{Mec} = \frac{1}{2} M V_B'^2$, V_B' cambia respecto a la vel en A ya que el rozamiento hace perder energía mecánica al proyectil:

$$\frac{1}{2} M V_B'^2 - \frac{1}{2} M V_A^2 = -\mu_d M g L$$

Del punto B al C la energía mecánica se conserva, ya que la única fuerza no conservativa (N) no realiza trabajo:

$$\frac{1}{2} M V_B^2 = \frac{1}{2} M V_C^2 + M g h_C$$

En la altura máxima solo hay energía potencial gravitatoria. Y dado que se desprecia el rozamiento con el aire, la energía en la altura máxima es igual a la energía en el punto C (ó B).

c) <u>DATOS</u> $h_{estrat.} = 10\,000\,m$, $M_T = 3 m_{com}$, $\mu_d = 0{,}1$

$L = 20\,000\,m$, $V_0 = 1000\,\frac{m}{s}$

vel inicial del proyectil $V_{Proy} = \frac{m_{com}}{3m_{com} - m_{com}} V_0 = \frac{1}{2}\, 1000\,\frac{m}{s}$

$$\boxed{V_{Proy} = 500\,m/s}$$

Energía en A: $E_{mec} = \frac{1}{2} M_{Proy} V_{Proy}^2$

Energía en B: $E_{mec} = \frac{1}{2} m_{Proy} V_B^2$

$$\Delta E_M = W_{Roz} \rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m_{Proy}} V_B^2 - \frac{1}{2} \cancel{m_{Proy}} V_{Proy}^2 = -\mu_d \cancel{m_{Proy}} g L$$

$$V_B = \sqrt{V_{Proy}^2 - 2 \mu_d g L} \Rightarrow V_B = 458\,\frac{m}{s}$$

Altura MAX: $\frac{1}{2} \cancel{m_{Proy}} V_B^2 = \cancel{m_{Proy}} g h_{MAX}$

$$h_{MAX} = \frac{1}{2} \frac{V_B^2}{g} \rightarrow \boxed{h_{MAX} = 10500\,mts > h_{est.}}$$

Supera la estratósfera!

Si se aumenta al doble la masa del combustible, manteniendo la relación $M_T = 3\, m_{comb}$, la velocidad de salida del proyectil resulta:

$$V'_{proy} = \frac{m'_{com}}{3\, m'_{comb} - m'_{comb}} \cdot V_0$$

$V'_{proy} = \frac{1}{2} V_0 \Rightarrow$ la velocidad del proyectil no se modifica, por lo tanto el proyectil alcanzará la misma altura que antes.