Segundo parcial - 29/06/2018

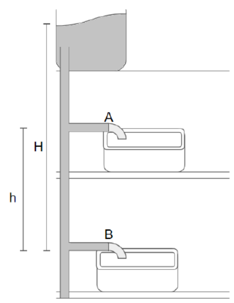
Resuelva los ejercicios en hojas separadas.
Justifique todos sus razonamientos

1. Un tanque de agua de gran sección se encuentra en la terraza de un edificio de dos pisos, abierto a la atmósfera y conectado por una tubería de radio r a dos canillas, una en cada piso, tal como se muestra en la figura 1. En un primer momento, al estar cerradas ambas canillas, el agua permanece en equilibrio hidrostático.

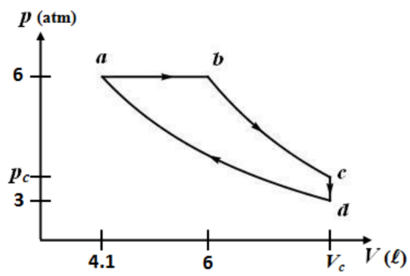
   a) Sin hacer cuentas, diga intuitivamente de qué parámetros depende la presión en los puntos A y B ¿Cuál es mayor? Luego calcule la fuerza que hace el fluido sobre las canillas.

   b) Al abrirse las canillas, se comienzan a llenar dos bañeras de volumen V_a y V_b. Calcule el tiempo que tardan en llenarse. ¿Qué hipótesis sobre el fluido hizo para llegar al resultado?

   c) Demuestre que ambas bañeras tardan lo mismo en llenarse, si $g = 10\text{m/s}^2$, $r = 0{,}02\text{m}$, $H = 4\text{m}$, $h = 3\text{m}$, $V_a = 0{,}2\text{m}^3$, $V_b = 0{,}4\text{m}^3$, $\rho = 997\text{kg/m}^3$ y $P_{atm} = 1{,}01 \times 10^4\text{Pa}$. Explique cualitativamente por qué se da éste resultado.



Ejercicio 1



Ejercicio 2

2. Un mol de gas ideal monoatómico ($\gamma = 5/3$) evoluciona según el gráfico p-V de la figura 2: se expande isobáricamente de a hasta b, luego se expande de forma adiabática hasta c; entre c y d evoluciona de forma isocórica y finalmente se comprime isotérmicamente regresando al punto a.

   a) Diga si los procesos son reversibles o irreversibles, justificando claramente.

   b) Diga cuánto valen p, V y T en los puntos a, b, c y d.

   c) Calcule ΔU, W y Q en cada proceso. Calcule estas mismas cantidades en el ciclo completo.

   d) Considere ahora que el gas no es ideal, sino que tiene la ecuación de estado

   $$P(V,T) = \frac{n\,R\,T}{V}\left(1 + \frac{\alpha\,T}{V}\right) \tag{1}$$

   con $\alpha = 1\frac{\ell}{\text{K}}$ y que su energía interna está dada por

   $$U(V,T) = U_o(T) - n\,R\,a\frac{T^2}{V}\,. \tag{2}$$

   ¿Cuánto vale la variación de energía interna en el ciclo? ¿Y en una compresión isotérmica a 300 K entre 3 atm y 6 atm? En éste último caso solo indique cómo haría los cálculos.

3. Un cuerpo de masa M y calor específico $C_p(T) = \beta T$ que está a temperatura T_c es arrojado en una *gran* fuente de agua que se encuetra a temperatura T_A. Todo el proceso ocurre a presión atmosférica.

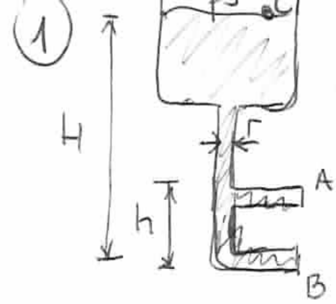
   a) Sin hacer cuentas, indique si el proceso es reversible o irreversible y cuál será la temperatura de equilibrio.

   b) Calcule el calor cedido o absorbido por el cuerpo. Este calor, ¿es igual a la variación de entalpía del cuerpo?

   c) Calcule la variación de entropía del cuerpo, de la fuente de agua y del universo. Para el caso en que $M = 10$kg, $\beta = 0{,}5$J/(kg K^2), $T_c = 80$°C y $T_A = 25$°C, dé los valores numéricos de las entropías calculadas anteriormente.

   d) Si se utilizara al cuerpo y a la fuente de agua como focos térmicos de una máquina reversible, indique si el calor cedido a la fuente de agua será igual, mayor o menor que en el caso anterior. De no ser igual, ¿dónde *está* la energía restante?

(1)



(I)

a) la presión del agua sobre las canillas depende de: la densidad del agua, la diferencia de alturas entre cada canilla y el tanque, la aceleración de la gravedad y la presión atm.

La presión sobre la canilla B será mayor ya que tiene una mayor diferencia de altura con el tanque.

La fuerza que ejerce el agua es:

$$F = p \cdot \text{Area} \rightarrow \boxed{F = (p_0 + \rho g \Delta h) \cdot (\pi r^2)}$$

Presión hidrostática:

$$p = p_0 + \rho g \Delta h$$

Δh: dif de alturas entre la altura max del agua en el tanque y la canilla

b) Suponemos que la sección del tanque es mucho más grande que el radio r de los caños $\Rightarrow$ la velocidad en el punto C puede despreciarse: $v_C \cdot A_{Tanque} = v_A A_{caño}$

$$v_C = v_A \frac{A_{caño}}{A_{tanque}} \rightarrow 0.$$

Usamos Bernoulli para comparar el fluido en la sup del tanque con el fluido a la salida de las canillas:

$$p_C + \rho g y_C + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_C^2} = p_A + \rho g y_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2$$

$$\cancel{p_0 - p_A} + \rho g (y_C - y_A) = \tfrac{1}{2}\rho v_A^2 \quad , \quad y_C - y_A = H - h$$

cuando se abre la canilla $p_A = p_0$.

$$\Rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{2g(H-h)}}$$

Sabiendo la velocidad con la que sale el agua podemos calcular el caudal y luego el tiempo que tarda en llenarse la bañera.

$\left[\frac{m^3}{s}\right]$ $Q_A = \pi r^2 \cdot \sqrt{2g(H-h)}$, quiero tener un volumen V_A de agua

$$\Rightarrow V_A = Q_A \cdot T_A \rightarrow \boxed{T_A = \frac{V_A}{\pi r^2 \sqrt{2g(H-h)}}}$$

tiempo que tarda en llenarse la bañera A

Analogamente, para la canilla B tenemos:

$v_B = \sqrt{2gH}$, $Q_B = \pi r^2 \sqrt{2gH}$ y $T_B = \dfrac{V_B}{\pi r^2 \sqrt{2gH}}$.

c) Los tiempos de llenado valen:

•) $T_A = \dfrac{V_A}{\pi r^2 \sqrt{2g(H-h)}} = \dfrac{0{,}2\,m^3}{\pi (0{,}02\,m)^2 \sqrt{2 \cdot 10\,m/s^2 \,(4-3)\,m}}$

$$\boxed{T_A = 35 \text{ seg}}$$

•) $T_B = \dfrac{V_B}{\pi r^2 \sqrt{2gH}} = \dfrac{0{,}4\,m^3}{\pi (0{,}02\,m)^2 \sqrt{2 \cdot 10\,m/s^2 \, 4m}}$

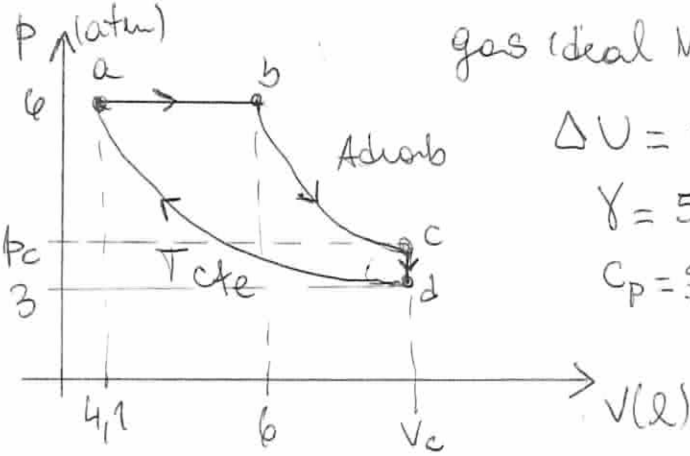
$$\boxed{T_B = 35 \text{ seg}}$$

esto ocurre porque

$$\frac{V_A}{\sqrt{H-h}} = \frac{V_B}{\sqrt{H}}$$

$$\frac{0{,}2\,m^3}{\sqrt{1\,m}} = \frac{0{,}4\,m^3}{\sqrt{4\,m}} \rightarrow 0{,}2 = 0{,}2 \checkmark$$

la relación entre volumenes es igual a la relación entre diferencias de alturas.

(2) 

gas ideal monoatómico , $n = 1$ mol (II)

$\Delta U = n C_v \Delta T$

$\gamma = 5/3$

$C_p = \frac{5}{2} R$, $C_v = \frac{3}{2} R$

$R = 0{,}082 \frac{\text{atm lts}}{\text{mol K}}$

a) Dado que en todas las etapas del ciclo puede graficarse la relación p-V, significa que los procesos son reversibles ya que el gas está pasando por sucesivos puntos de equilibrio

b) p, V y T en los puntos a, b, c y d.

es un gas ideal $\Rightarrow$ Vale $pV = nRT$

Punto a: $\begin{cases} p_a = 6 \text{ atm} \\ V_a = 4{,}1 \text{ lts} \end{cases}$ $T_a = \frac{p_a V_a}{nR} = 300 \text{ K}$

Punto b: $\begin{cases} p_b = p_a \\ V_b = 6 \text{ lts} \end{cases}$ $T_b = \frac{p_b \cdot V_b}{nR} = 439 \text{ K}$

Punto c: de b hacia c hay una expansión adiabática

$\Rightarrow \begin{cases} p_b V_b^{\gamma} = p_c V_c^{\gamma} & (1) \\ T_b V_b^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1} & (2) \end{cases}$ Pero no conozco nada del punto c.

Punto d: evolución isotérmica entre a y d $\Rightarrow T_d = T_a = 300 \text{ K}$

$\begin{cases} p_d = 3 \text{ atm} \\ T_d = 300 \text{ K} \end{cases}$ $V_d = \frac{nRT_d}{p_d} = 8{,}2 \text{ lts}$

Como $V_c = V_d$ uso (1) para calcular p_c y uso (2) para calcular T_c:

$$p_c = p_b \cdot \left(\frac{V_b}{V_c}\right)^{\gamma} = 3{,}54 \text{ atm}$$

$$T_c = T_b \left(\frac{V_b}{V_c}\right)^{\gamma-1} = 356{,}5 \text{ K}$$

c) ΔU, W y Q en cada etapa

<u>ab</u>: $W_{ab} = p \cdot \Delta V = 11{,}4$ l·atm (expansión a p cte)

$$\Delta U_{ab} = n C_v (T_b - T_a) = 17{,}097 \text{ l·atm}$$

$$Q_{ab} = \Delta U_{ab} + W_{ab} = 28{,}5 \text{ l·atm} > 0$$ el gas absorbe calor

<u>bc</u>: etapa adiabática $\Rightarrow Q_{bc} = 0$

$$\Delta U_{bc} = -W_{bc} = n C_v (T_c - T_b) = -10{,}14 \text{ l·atm}$$

<u>cd</u>: Proceso isocórico $\Rightarrow W_{cd} = 0$

$$\Delta U_{cd} = Q_{cd} = n C_v (T_d - T_c) = -6{,}95 \text{ l·atm} < 0$$ el gas cede calor

<u>da</u>: compresión isotérmica $\Rightarrow \Delta U_{da} = 0$

$$Q_{da} = W_{da} = \int_d^a p \, dV = \int_d^a nRT \frac{1}{V} \, dV$$

$$Q_{da} = W_{da} = nRT_a \ln\left(\frac{V_a}{V_d}\right) = -17{,}05 \text{ l·atm} < 0$$ el gas cede calor

En el ciclo completo:

$$\Delta U_{Total} = 0$$

$$W_{TOTAL} = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{dc} = 4{,}5 \ l \cdot atm$$

$$Q_{TOTAL} = Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{cd} + Q_{da} = 4{,}5 \ l \cdot atm$$

se verifica que en el ciclo $Q_{TOTAL} = W_{TOTAL}$.

d) Aunque el gas no sea ideal, la variación de energía interna en un ciclo vale cero.

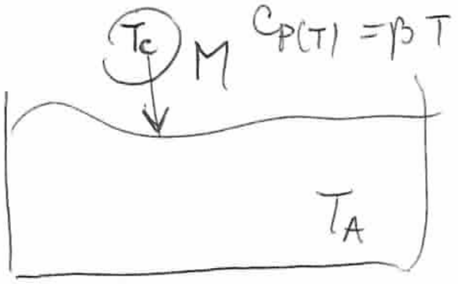
Para una compresión isotérmica la variación de energía resulta:

$$\Delta U = -nRaT^2 \left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i} \right)$$

donde los volúmenes corresponden a las presiones dato. Estos volúmenes se calculan usando la ec de estado:

$$P_f = \frac{nRT}{V_f} \left(1 + \frac{\alpha T}{V_f} \right) \quad y \quad P_i = \frac{nRT}{V_i} \left(1 + \frac{\alpha T}{V_i} \right)$$

③



a) Al poner en contacto dos cuerpos de distinta temperatura fluye calor del caliente al frío de manera abrupta, por lo tanto el proceso es irreversible.

La temperatura de equilibrio es la de la fuente de agua.

b) El calor intercambiado por el cuerpo es

$$Q = \int_{T_c}^{T_A} M\, c_{P(T)} \cdot dT = M\beta \int_{T_c}^{T_A} T\, dT \Rightarrow \boxed{Q = M\beta \tfrac{1}{2}\left(T_A^2 - T_c^2\right)}$$

Si $T_c > T_A \Rightarrow$ el cuerpo cede calor

si $T_c < T_A \Rightarrow$ el cuerpo absorbe calor

Como el proceso es irreversible, todo el calor que cede (o absorbe) el cuerpo lo absorbe (o cede) la fuente de agua.

Como el intercambio de calor ocurre a presión constante $\Rightarrow$ vale que $\Delta H = Q$.

c) Variaciones de entropía:

•) del cuerpo

$$\Delta S_c = \int_{T_c}^{T_A} \frac{dQ}{T} = M\beta \int_{T_c}^{T_A} \frac{T\,dT}{T} \Rightarrow \boxed{\Delta S_c = M\beta\left(T_A - T_c\right)}$$

•) de la fuente: absorbe (o cede) el calor del cuerpo manteniendo su temperatura cte $\Rightarrow$

$$\Delta S_F = \frac{-Q}{T_A} \Rightarrow \boxed{\Delta S_F = -M\beta \frac{1}{2} \frac{T_A^2 - T_c^2}{T_A}}$$

•) del Universo

$$\Delta S_U = \Delta S_c + \Delta S_F$$

$$\boxed{\Delta S_U = M\beta (T_A - T_C) - M\beta \frac{T_A^2 - T_C^2}{2T_A}}$$

Se puede mostrar que $\Delta S_U > 0$ siempre:

$$\Delta S_U = M\beta (T_A - T_C) - M\beta \frac{(T_A - T_C)(T_A + T_C)}{2T_A}$$

$$\Delta S_U = M\beta (T_A - T_C) \cdot \left[1 - \frac{T_A + T_C}{2T_A}\right]$$

$$\Delta S_U = M\beta (T_A - T_C) \frac{2T_A - (T_A + T_C)}{2T_A}$$

$$\Delta S_U = M\beta (T_A - T_C) \cdot \frac{(T_A - T_C)}{2T_A}$$

$$\Delta S_U = M\beta \frac{(T_A - T_C)^2}{2T_A} > 0 \checkmark$$ Proceso Irreversible

Para los datos: $M = 10\,kg$, $\beta = 0{,}5\, \frac{J}{kg\,K}$, $T_C = 80°C = 353K$, $T_A = 25°C = 298K$

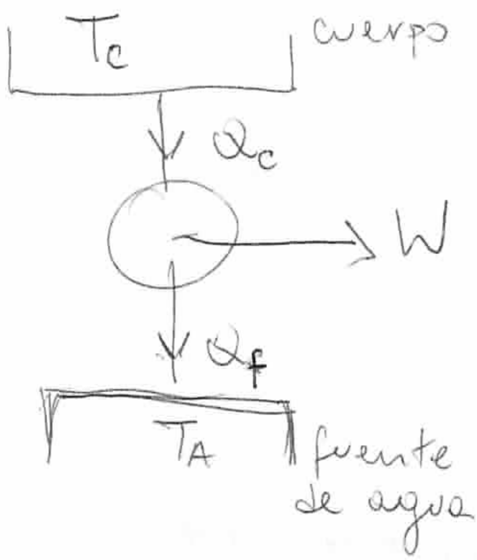
$$\Delta S_C = 10kg\ 0{,}5\ \frac{Joules}{kg\,K^2} \cdot (298 - 353)K \rightarrow \Delta S_C = -275\ \frac{J}{K}$$

$$\Delta S_F = -10kg\ 0{,}5\ \frac{J}{kg\,K^2}\ \frac{1}{2}\ \frac{(298)^2 - (353)^2\,K^2}{298k} \rightarrow \Delta S_F = +300{,}5\ \frac{J}{K}$$

$$\Delta S_U = -275\ \frac{J}{K} + 1201{,}5\ \frac{J}{K} = +25{,}5\ \frac{J}{K} > 0 \checkmark$$

Como el cuerpo inicialmente está a mayor temp que la fuente su variación de entropía es negativa ya que cede calor

d) Si se vincula al cuerpo y a la fuente de agua mediante un proceso reversible $\Rightarrow$ el calor cedido por el cuerpo a la fuente será menor. La energía restante será el trabajo extraído de la máquina térmica.



$$Q_c = W + |Q_f|$$