Guía 0. Matemática

I. Funciones

1) Siendo A=[a,b,c,d,m] y B=[0,1,2,3], indicar cuales de las siguientes relaciones son funciones. En aquellas que no lo son haga modificaciones para que lo sean:
f=[(a;0),(b;0),(c;1),(d;2),(m;3)]
g=[(a;0),(b;1),(c;2),(d;3),(m;3),(c;0)]
h=[(a;1),(b;2)]

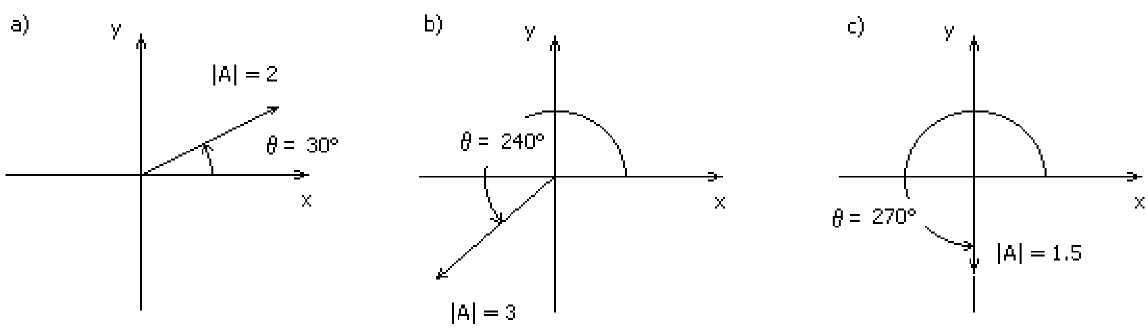
2) Determinar el dominio adecuado para:
a) $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ b) $2x^3 / \ln|x+2|$

3) Demuestre las siguientes identidades usando las definiciones de las funciones:
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1; \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x); \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x);$$
$$\cos^2(x) = (1+\cos(2x))/2; \sin^2(x) = (1-\cos(2x))/2;$$
$$\cosh(x)^2 - \sinh^2(x) = 1; \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x); 2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x).$$

II. Vectores

4) Determine el módulo y la dirección de los siguientes vectores. Represéntelos gráficamente.
a) **A**= (-4; 3) b) **B** = (2; 0) c) **C** = -2 $\hat{x}$ − 3 $\hat{y}$ d) **D** = 0 $\hat{x}$ − 5 $\hat{y}$

5) Halle las componentes cartesianas de los siguientes vectores:



6) Dados los vectores **A** y **B** indicados, halle gráficamente su suma.

a) **A** = (-3; 2) **B** = (-2; 5)

b) **A** tal que |**A**| = 2 , θ = 240° **B** tal que |**B**|= 3 , θ = 135°

c) **A** = (-2; 0) **B** = (0; 4)

7) Sean **A** y **B** los vectores dados en el ejercicio anterior. Halle analíticamente las componentes cartesianas y polares del vector **A** + **B**, y del **A** – **B**. ¿El módulo del vector suma, **C = A** + **B**, es igual a la suma de los módulos de **A** y de **B**?

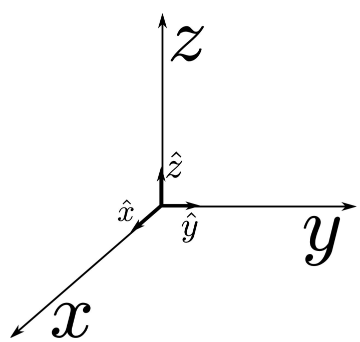
8) Halle el vector que tiene origen en el punto **A** y extremo en el punto **B** en los siguientes casos:
a) **A**=(2; -1) y **B**=(-5; -2).
b) **A** =(2; -5; 8) y **B**=(-4; -3; 2).

9) Dados los vectores:
A = $(3\hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z})$ **B** = $(4\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z})$ **C** = $(-2\hat{y} - 5\hat{z})$
efectúe las siguientes operaciones:
a) (**A** – **B**)/|**C**| + **C**
b) 5**A** - 2**C**
c) –2 **A** + **B** – **C**/5

Se define el **producto escalar** de dos vectores como **A . B =**| **A**|| **B**|cos θ**,** donde θ es el ángulo que forman los dos vectores.

---

10) Sean $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, los versores usuales de la terna derecha mostrada en la figura.



$\hat{x}$ = (1;0;0) $\hat{y}$ = (0;1;0) $\hat{z}$ = (0;0;1)

Calcule $\hat{x}.\hat{x}$, $\hat{x}.\hat{y}$, $\hat{x}.\hat{z}$, $\hat{y}.\hat{x}$, $\hat{y}.\hat{y}$, $\hat{y}.\hat{z}$, $\hat{z}.\hat{x}$, $\hat{z}.\hat{y}$, $\hat{z}.\hat{z}$

11) Usando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si
A = $A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y} + A_z\,\hat{z}$ **B** = $B_x\,\hat{x} + B_y\,\hat{y} + B_z\,\hat{z}$

$$\boxed{\mathbf{A}.\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

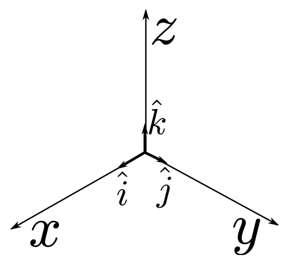
12) Efectúe el producto escalar de los vectores **A** y **B** y diga si en algún caso **A** es perpendicular a **B.**
a) **A** = $3\hat{x} - 2\hat{y} + \hat{z}$ **B** = $-\hat{x} + 3\hat{z}$
b) **A** = (2; 3; -1) **B** = (6; -5; 2)
c) |**A**| = 3 |**B**| = 2 θ = 60° (θ: ángulo entre **A** y **B**)

Se define el **producto vectorial** como **A** × **B =C** tal que
a) $|C| = |A||B|\,\mathrm{sen}\,\theta$**,** donde θ es el ángulo que forman los dos vectores
b) **C** tiene dirección perpendicular al plano determinado por **A** y **B**

c) El sentido es tal que **A**, **B** y **C** tengan la misma orientación en el espacio que $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.

---

13) Sean $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, los versores usuales de la terna derecha mostrada en la figura



Calcule $\hat{\imath} \times \hat{\imath}$, $\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$, $\hat{\imath} \times \hat{k}$, $\hat{\jmath} \times \hat{\imath}$, $\hat{\jmath} \times \hat{\jmath}$, $\hat{\jmath} \times \hat{k}$, $\hat{k} \times \hat{\imath}$, $\hat{k} \times \hat{\jmath}$, $\hat{k} \times \hat{k}$.

14) Usando la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si:

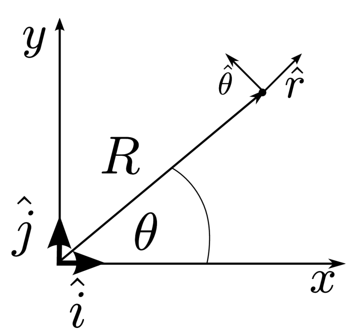
A = $A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k}$ **B** = $B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath} + B_z\,\hat{k}$

entonces **A** x **B** = (Ay Bz - Az By ; Az Bx - Ax Bz ; Ax By - Ay Bx)

15) Sean los vectores **A** = (3; 2; 1) **B** = (1; 0;-1) **C** = (0;-2; 4) calcule:

a) **B** x **C**
b) -4(**B** x **B**) - **A**
c) (**A** + **B**) x **C**
d) (**A** x **B**).**C**

16) **Coordenadas polares:** El radio vector **R** tiene las componentes cartesianas **R** = x$\hat{\imath}$ + y$\hat{\jmath}$. En función de los versores $\hat{\theta}$ y $\hat{r}$, **R** toma la forma: **R** = R $\hat{r}$.



Demuestre que:

a) $\hat{r}$ = cos θ $\hat{\imath}$ + sen θ $\hat{\jmath}$ $\hat{\theta}$ = -sen θ $\hat{\imath}$ + cos θ $\hat{\jmath}$

b) d$\hat{r}$ /dθ = $\hat{\theta}$ d$\hat{\theta}$ /dθ = -$\hat{r}$

c) A partir de **R** = R $\hat{r}$ **,** pruebe que **v** = d**R**/dt = $\dot{R}$ $\hat{r}$ + Rθ $\hat{\theta}$

d) Pruebe que $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\,\hat{\boldsymbol{r}} + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$

Ayuda: utilice las relaciones

$d\hat{\boldsymbol{r}}/dt = (d\hat{\boldsymbol{r}}/d\theta)(d\theta/dt) = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ $\qquad$ $d\hat{\boldsymbol{\theta}}/dt = (d\hat{\boldsymbol{\theta}}/d\theta)(d\dot{\theta}/dt) = -\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{r}}$

III. Ecuaciones Diferenciales

17) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Es decir, encuentra las funciones y(t). En todos los casos, y_0 es una constante.

a) $\dfrac{dy}{dt} = 2\ ;\ \ y(0) = 0$

b) $\dfrac{dy}{dt} = a\ ;\ \ y(0) = y_0$

c) $\dfrac{dy}{dt} = e^t + 2\ ;\ \ y(0) = y_0$

d) $\dfrac{dy}{dt} - \sin(3t) = 0\ ;\ \ y(0) = y_0$

e) $\dfrac{dy}{dt} = 2y\ ;\ \ y(1) = y_0$

f) $t\dfrac{dy}{dt} = 1;\ \ y(1) = y_0$

18) Suponga una colonia que tiene N_0 bacterias al tiempo t=0. Si la colonia crece a una tasa proporcional a su población, entonces:

$$\frac{dN}{dt} = k.N$$

con $k>0$.

a) Resuelva esta ecuación para encontrar *N(t)*. Grafique cualitativamente la solución.

b) ¿Cuánto tarda la población inicial en duplicarse? ¿Cuánto tiempo más hay que esperar para que se vuelva a duplicar?

19) La ecuación del ejercicio 18) (crecimiento exponencial o Malthusiano) tiene una aplicación limitada porque no es razonable que la colonia siga creciendo para siempre. Una mejora es considerar que la tasa de crecimiento depende del número de bacterias de forma tal que si *N* es un número "chico" la colonia crezca pero si es un número "grande" disminuya. Esto puede tenerse en cuenta de la siguiente forma (¿por qué?):

$$\frac{dN}{dt} = r.N\left(1 - \frac{N}{k}\right)$$

En la ecuación anterior, *r* es una constante positiva y *k* (también positiva) se conoce como *capacidad de carga*.

a) ¿Para qué conjunto de valores de *N*, la población disminuye y para cuales crece?

b) ¿Para qué valores de *N*, la población no crece ni disminuye?

c) ¿Existe algún valor de *N estable*? Por estable queremos decir que si *N* aumenta o disminuye respecto de ese valor, la población vuelve a ese valor.

d) Encuentre la solución *N(t)*. Para hacerlo considere la ayuda.

e) Grafique cualitativamente la solución para distintas condiciones iniciales e interprete el resultado en función de las respuestas anteriores. Para graficar, puede usar un programa como el Matlab.

Ayuda:

$$\int \frac{1}{x\left(1-\frac{x}{k}\right)} = \ln\left(\frac{x}{x-k}\right)$$

20) Sea $R=(x;y)$ una función de $\Re^2$ en $\Re^2$. Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{R}=\left(\frac{dx}{dt};\frac{dy}{dt}\right)=(2;4y)$$

Encuentre la solución con condiciones iniciales $\mathbf{R}(t=0)=(1;1)$ y exprésela en forma vectorial.

21) Una reacción química autocatalítica es una en la que la producción de una sustancia está estimulada por la propia sustancia. Este proceso (*retroalimentación positiva*) llevaría a un crecimiento descontrolado de la sustancia en cuestión si no estuviera limitado de alguna forma. Supongamos que llamamos c a la concentración de la sustancia C y $f(c)$ a su tasa de producción por unidad de tiempo dc/dt. La siguiente ecuación es un ejemplo de una ecuación que modela una reacción autocatalítica:

$$\frac{dc}{dt}=f(c)=2\frac{\text{molar}}{\text{seg}}c-1\frac{\text{molar}}{\text{seg}^2}c^2$$

a) Haga un gráfico de la tasa de producción en función de c.
b) ¿Para qué valores de c la tasa de producción es positiva y para qué valores es negativa?
c) Si inicialmente la concentración de C es 0.75 molar, ¿subirá o disminuirá la concentración con el tiempo?
d) Encuentre una expresión para $c(t)$.
e) ¿Qué relación tiene este problema con el del crecimiento logístico (ejercicio 5)

22) Bajo ciertas condiciones que estudiaremos cuando veamos mecánica a escala celular y molecular, la aceleración de un objeto que se mueve en un fluido es $a=-r.v$, donde r es una constante positiva que depende de la masa y de la forma del objeto y de la viscosidad del fluido. Si la velocidad inicial es $v_0>0$, encuentre la velocidad en función del tiempo para el objeto.

23) Un problema clásico de la *psicofísica* es cómo se traduce un estímulo físico en una sensación o percepción. Usualmente, los estímulos que percibimos, como la luz, el sonido y la presión, tienen una amplia gama de intensidades, que varía en muchos órdenes de magnitud. Por esta razón, los mecanismos sensoriales tienen que tener la doble capacidad de ser muy sensibles (detectar pequeños estímulos) y a la vez tener un *rango dinámico* amplio (detectar estímulos de muy diversa magnitud sin saturar).
Este tema fue estudiado por Ernst H. Weber (1795–1878). En uno de sus experimentos clásicos, un sujeto sostenía un peso con una mano y los ojos vendados. Lentamente, se iba agregando un peso extra y la persona debía decir en qué momento empezaba a sentir que el peso cambiaba. Lo que Weber descubrió fue que la percepción era proporcional al incremento relativo en el peso. Es decir, si una persona sostenía inicialmente 1 kg de peso y sentía el primer cambio cuando se agregaban 100 gr, esa misma persona necesitaría un incremento de 200 gr para sentir un cambio si sostenía un peso de 2 kg. En términos matemáticos, si llamamos p a la percepción y s al peso:

$$\Delta p=k\frac{\Delta s}{s},$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Es decir, los cambios en la percepción (Δp) son proporcionales a los cambios relativos en el peso ($\Delta s/s$). Pasando Δs dividiendo y considerando cambios infinitesimales, podemos escribir una ecuación diferencial:

$$\frac{dp}{ds}=\frac{k}{s}$$

a) Resolver la ecuación anterior para encontrar la percepción en función del estímulo (en este caso el peso s). Suponga que s_0 es el estímulo umbral debajo del cual no se percibe nada.

b) Suponga que si usa un estimulo de magnitud s_0, la percepción es p_0. ¿En cuánto se incrementa la percepción si se multiplica la magnitud del estímulo por 10? ¿Y si se vuelve a multiplicar por 10? Interprete este resultado en términos de la ventaja de tener un rango dinámico amplio.

24) Resuelva estas ecuaciones diferenciales de segundo orden. Tome como condición inicial en todos los casos $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$ (F y A son dos constantes)

a) $\mathrm{m}\, x'' = F$; b) $x'' = A.t$ c) $x'' = e^t$

Ayuda: Muchas veces, para resolver una ecuación de segundo orden, conviene primero asignarle un nuevo nombre a la derivada primera. Por ejemplo, en lugar de x″, usar x′=v y x″=v′, y así pasar a un sistema de ecuaciones de primer orden.

Notación: $x' = \dfrac{dx}{dt}$ y $x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

25) Probar que $x = \cos(3t)$ es una solución de la ecuación $x'' = -9.x$

26) Encontrar una solución para las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas

a) $\boldsymbol{x''} = -4.\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x(0)} = 3$; $\boldsymbol{x'(0)} = 0$
b) $\boldsymbol{x''} = -4.\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x(0)} = 0$; $\boldsymbol{x'(0)} = 6$
c) $\boldsymbol{x''} = -4.\boldsymbol{x} - 12$; $\boldsymbol{x(0)} = 0$; $\boldsymbol{x'(0)} = 0$