

1. Cinemática

- 1) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Es decir, encuentra las funciones $y(t)$. En todos los casos, y_0 es una constante.

a) $\frac{dy}{dt} = 2$; $y(0) = 0$ b) $\frac{dy}{dt} = e^t + 2$; $y(0) = y_0$ c) $\frac{dy}{dt} = 2y$; $y(1) = y_0$

- 2) Escriba la ecuación diferencial para la posición en función del tiempo en un movimiento a velocidad (v_0) constante. Integrando la ecuación, encuentre una solución para $x(t)$.
- 3) Escriba la ecuación diferencial que rige la velocidad en función del tiempo para un movimiento a aceleración (a_0) constante. Integrando, encuentre una solución para $v(t)$. Dado $v(t)$, escriba la ecuación diferencial para la función posición en función del tiempo y resuélvala.
- 4) La aceleración de una partícula que se mueve sobre una trayectoria recta está dada por
- $$a(t) = -2\frac{m}{s^4} t^2$$
- donde m es 'metros' y s 'segundos'.

- a) Encuentre la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$ si $x_0 = x(0) = 0$ y $v_0 = v(0) = 10$ m/s.
b) ¿Cuál es su posición y velocidad en $t=3$ seg?

- 5) Sabiendo que un cuerpo se mueve en línea recta con velocidad

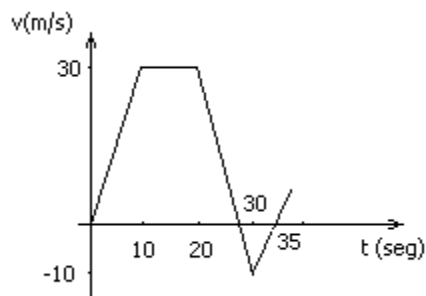
$$v(t) = 3\frac{m}{s} e^{-2t/s}$$

$$x_0 = x(0) = 0$$

Encuentre y grafique la posición $x(t)$. ¿Se detiene alguna vez el cuerpo? ¿Hasta donde llegará?

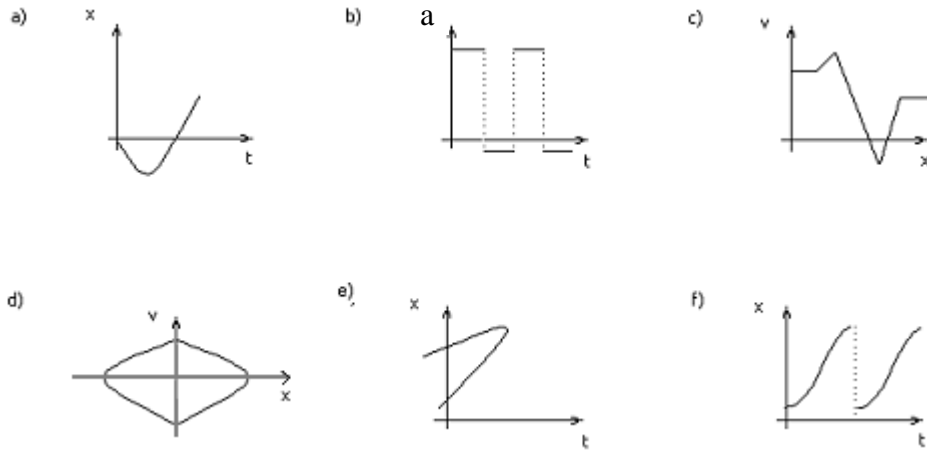
- 6) Un automovilista parte en el instante $t=0$, de $x=0$ con una velocidad de 10 m/s y con una aceleración de 1 m/s² (constante). Dicha aceleración tiene la misma dirección que la velocidad pero sentido contrario.
- a) ¿En qué instante el auto tiene $v=0$? ¿Qué distancia recorrió?
b) ¿En qué instante vuelve a pasar por $x=0$? ¿Qué sucederá luego?
c) Grafique $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$.
d) Tomando ahora la aceleración de 1 m/s² en el mismo sentido que la velocidad, rehaga c) y compare con el caso anterior.

- 7) El gráfico de la figura representa la velocidad en función del tiempo para una partícula con movimiento rectilíneo.



- a) Halle $x(t)$, sabiendo que el móvil partió de $x = 0$.
- b) Grafique $x(t)$, $a(t)$.
- c) Halle x , v , a , a los 5 segundos y a los 25 segundos.

8) De los gráficos que se dan a continuación, ¿cuáles representan movimientos físicamente posibles?



9) Una de las técnicas existentes para estimar el peso molecular (PM) de proteínas o separar proteínas de distinto PM originalmente en solución es la electroforesis en gel. La técnica consiste en colocar una solución con proteínas en un gel y someterla a la acción de un campo eléctrico. En estas condiciones, las proteínas migran a una velocidad constante¹.

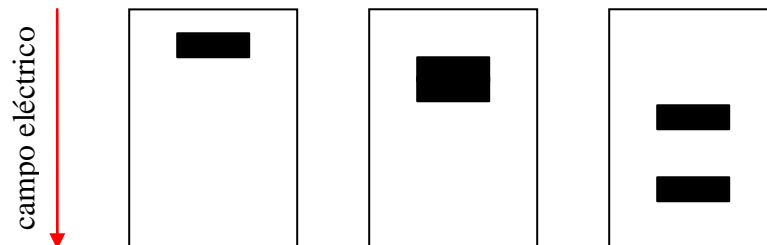


Figura: Se muestra, de izquierda a derecha, la evolución temporal de la corrida electroforética. La mezcla original se separa en dos bandas conteniendo cada una una única proteína.

En la variante conocida como “electroforesis en gel desnaturizante”, la velocidad de migración de cada proteína disminuye con el PM de acuerdo a:

$$v = v_0 - k \cdot \log(\text{PM})$$

Un investigador tiene una solución con dos tipos de proteínas que desea separar haciendo una corrida de electroforesis en gel desnaturizante. El PM de las proteínas es 25 y 75 Kg/mol. En las condiciones del experimento, se observa que las proteínas adquieren una velocidad $v = 2 \text{ mm/min} - 0,25 \text{ mm/min} \cdot \log(\text{PM})$, con PM expresado en Kg / mol.

- a) Suponiendo que las bandas tienen un espesor constante de 1 mm, ¿cuál es el tiempo mínimo que debería dejarse correr las proteínas para poder distinguir las dos bandas?

(considere que se pueden distinguir cuando hay al menos 1 mm de separación entre bandas).

- b) Si el gel tiene una longitud de 5 cm, ¿cuánto es lo mínimo que debería pesar una proteína de mayor PM para poder distinguir su banda de la correspondiente a la proteína de PM = 25?

¹ La razón por qué las proteínas migran en presencia de un campo eléctrico la entenderemos en la guía de electrostática y la razón por la que lo hacen con velocidad constante cuando veamos dinámica viscosa.

- 10) Se lanza un cuerpo hacia arriba con velocidad inicial de 15 m/s. Un segundo después se deja caer otro cuerpo desde una altura 15 m sin velocidad inicial.

- a) Calcule el tiempo que tardan en encontrarse.
b) ¿A qué distancia del piso se encuentran?

- 11) Una piedra se hunde en el agua con una aceleración dada por $a = g - b \cdot v$, donde g es la aceleración de la gravedad (10 m/s) y b es una constante positiva que depende de la forma y del tamaño de la piedra y de las propiedades físicas del agua. Nótese que en este caso la aceleración de la piedra depende de su velocidad.

- c) ¿Cuáles son las unidades de la constante b ?
d) Suponiendo que la piedra parte del reposo, encuentre la función $v(t)$ que describe la velocidad de la piedra en función del tiempo.
e) Usando el resultado de b), exprese la aceleración y la posición de la piedra en función del tiempo
f) ¿Qué distancia recorre una piedra de $b=1$ en 1 seg? ¿y una de $b=2$? (las unidades de b son las que averiguó en la pregunta a)

- 12) La posición de una partícula en el espacio se puede describir con el siguiente vector posición $r(t) = (t^3 + 2t + 1, -e^{2t}, \cos(3t))$ halle :

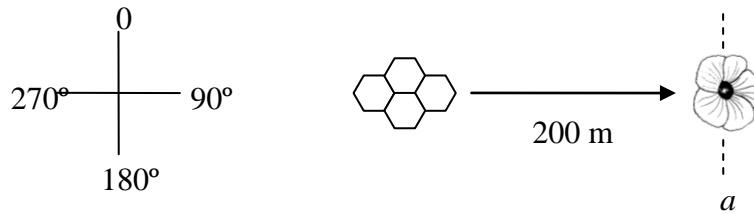
- a) $v(t) = dr/dt$
b) $|v|(t) = |dr/dt|$
c) $a(t) = d^2r/d^2t$

En los tres casos especializar en $t=0$ y en $t=\pi/6$.

- 13) Un coche viaja a lo largo de una curva sobre un plano. Sus coordenadas cartesianas en función del tiempo están dadas por las ecuaciones: $x(t) = 2t^3 - 3t^2$, $y(t) = t^2 - 2t + 1$. Halle:

- a) La posición del coche en $t = 1$ segundo.
b) Los vectores $v = v(t)$ y $a = a(t)$.
c) Los instantes en que $v = 0$.

- 14) Cuando una abeja obrera detecta una fuente de alimento, regresa al hogar y comunica a otras abejas como hacer para encontrarla. Para esto realiza una “danza” que informa la distancia de la colmena a la fuente y la dirección respecto del sol en que ésta se encuentra. La decodificación de este fascinante sistema de comunicación le valió al zoólogo alemán Kart von Frisch el premio Nobel de fisiología de 1973. En un trabajo publicado en 2005 en la revista Nature², J.R. Riley y colaboradores adosan transmisores a las abejas y estudian el vuelo seguido por ellas luego de presenciar una danza.



Izq: La convención de ángulos usada por Riley. 90° corresponde al este. Der: La fuente de alimento se encuentra a 90° y 200 metros de la colmena. Definimos la línea imaginaria a que corre de 0 a 180° y pasa por la fuente.

- a) Una de las abejas seguidas navega con velocidad constante en línea recta con dirección 87° y tarda 28 s en cruzar la línea a. ¿Cuál es su vector velocidad? ¿A cuántos m/s viaja?

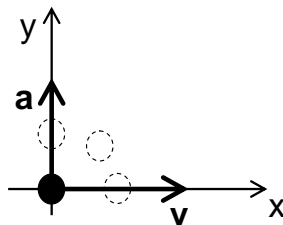
Esa abeja navegaba cuando no soplaba viento. Cuando sopla viento, es necesario distinguir entre la “velocidad respecto a tierra” (v_t) y la “velocidad respecto al aire” (v_a). Se define que $v_t = v_a + v_v$, donde v_v es la velocidad del viento. Por supuesto, para movimientos en 2 dimensiones estas velocidades son magnitudes vectoriales. En el punto a) la trayectoria se definía en relación a la tierra, por lo tanto la velocidad calculada fue v_t . ¿Cuál era el vector v_a ?

Con este tipo de análisis Riley describe cómo las abejas son capaces de corregir su vuelo para compensar el arrastre del viento.

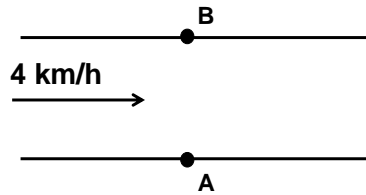
- b) Ahora sopla viento de 3,3 m/s en dirección 38° . Se observa que la trayectoria seguida por otra abeja es exactamente igual que en a)! Halle los vectores v_w y v_a . ¿Hacia que ángulo apunta v_a ? ¿cuál es el módulo de su velocidad respecto al aire?

¹ The flight paths of honeybees recruited by the waggle dance. Nature, vol 435, pag 205.

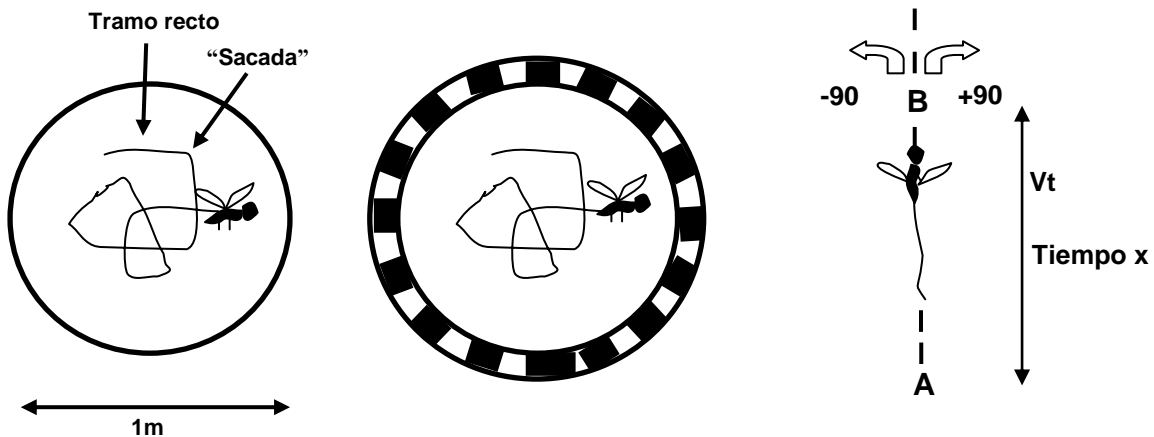
- 15) Una partícula pasa por el punto (0,0) con la velocidad y aceleración que se indican en la figura. ¿Cuál de los tres círculos puntueados puede representar la posición de la partícula un instante breve después? Justifique.



- 16) Un río de orillas rectas y paralelas tiene un ancho de 40 m. El agua del río baja a una velocidad de 4 km/h paralela a los márgenes. Un nadador quiere cruzar el río en línea recta desde el punto A hasta el B.

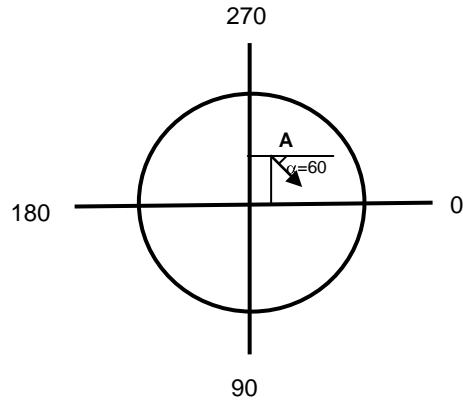


- a) ¿En qué dirección tiene que nadar para llegar a B en 1 minuto? ¿a qué velocidad nada?
 b) ¿Cuál es la mínima velocidad que puede tener el nadador para poder llegar a B (siempre en línea recta)?
- 17) El mismo nadador del ejercicio anterior quiere volver de B hasta A un tiempo después pero observa que la corriente del río ya no es la misma. Decide nadar a 6 km/h en cierta dirección pero llega a la otra orilla a 20 metros de A (río abajo) después de nadar 1,5 minutos.
- a) ¿Cuál es la velocidad del agua del río ahora? ¿En qué dirección nadó?
 b) ¿Podría haber llegado justo al punto A eligiendo una mejor dirección de nado?
- 18) Dickinson y Tamero estudiaron las trayectorias de vuelo de moscas sometidas a diferentes estímulos visuales; estos estudios revelaron que las moscas construyen sus trayectorias mediante una alternancia entre tramos de vuelo en línea recta y “sacadas” que consisten en giros rápidos de aprox 90° en una de dos direcciones seguidos de un nuevo vuelo en línea recta. Para identificar los estímulos que disparan la ocurrencia de las sacadas, los autores construyeron una arena donde las moscas vuelan libremente y son sometidas a diferentes tipos de imágenes mientras se registra su trayectoria de vuelo mediante un sistema de video:



Para analizar las diferencias entre el vuelo libre en una arena uniforme (U) y una arena con un patrón visual “estructurado” (E), los investigadores registraron la trayectoria de una mosca en la arena U y tomaron los siguientes datos:

Punto de partida A ubicado 20 cm por encima y 10 cm a la derecha del centro de la arena (ver esquema). La mosca estudiada volaba en la dirección que indica la figura.
 Velocidad de vuelo recto constante = 30 cm/seg



Tramo	Tiempo de vuelo	Giro al fin del tramo*	Posición final
1 (A a B)	0,85 seg	Vuelo 60°	B
2 (B a C)	0,5 seg	+ 85	C
3 (C a D)	0,45 seg	+ 92	D
4 (D a E)	1,1 seg	- 79	E

* ángulo del giro respecto a la dirección de vuelo (Se define + en sentido horario y - en sentido antihorario; ver figura)

- a) calcular la posición final de la mosca en cada tramo en coordenadas cartesianas. Representar la trayectoria en la arena gráficamente

Después de nuevos experimentos en el ambiente estructurado, los investigadores descubrieron que las moscas compensan este estímulo visual modulando su velocidad de vuelo. En un experimento, una mosca pasó por los siguientes puntos a los tiempos indicados:

A = (-15; -20) t = 12 seg
 B = (-29,63; -5,37) t = 12,9 seg
 C = (-17,99; 19,63) t = 14,1 seg

- b) ¿Cuál es la nueva velocidad de vuelo (suponga una velocidad de vuelo constante) en la arena E? ¿Cambió la velocidad de vuelo respecto a la arena U?

referencia: Tammero LF, and Dickinson MH. J.Exp.Biol. (2002) 205:327-343

19) Se lanza un proyectil con velocidad inicial de 50 m/s, formando un ángulo de 60° horizontal. Obtenga:

- La altura máxima y el tiempo que tarda en alcanzarla.
- El tiempo que tarda en tocar el suelo y la velocidad con la que lo hace.
- El tiempo que tarda en subir 1 m, y el vector velocidad en ese instante.
- Grafique $x(t)$, $y(t)$, $V_x(t)$, $V_y(t)$.

Créditos: Mucha gente contribuyó a la realización de esta guía. Gran parte de los ejercicios que la componen fueron propuestos por Guille Solovey, Diego Laplagne, Lucía Chemes y Pablo Polosecki. A ellos y a todos los docentes y alumnos que durante los años aportaron sugerencias o correcciones a los ejercicios va mi agradecimiento.