Mediciones Indirectas: Determinación del volumen de un cuerpo por diferentes métodos

Objetivos

- Determinar el volumen de un cuerpo mediante diferentes métodos.
- Estudiar el tratamiento de las incertezas de magnitudes que se obtienen en forma indirecta.
- Comparar los resultados obtenidos de una misma magnitud por diferentes métodos, a través del criterio de diferencias significativas.
- Comprender los conceptos de precisión y exactitud.

Introducción

Cuando se desea obtener una magnitud física, no siempre se cuenta con un instrumento para medirla en forma directa. Frecuentemente, la magnitud deseada se deriva de algunas otras magnitudes que sí pueden conseguirse en forma directa. Esto se da a través de alguna relación funcional entre las magnitudes medidas en forma directa y la que se desea obtener. La elección del experimento es un punto crítico a la hora de obtener una magnitud. Es importante, entre otras cosas, los instrumentos utilizados, así como el método elegido (tener en cuenta la validez de las hipótesis del método utilizado).

Por ejemplo, si queremos obtener el volumen de un cuerpo cuya forma se aproxima a alguna forma geométrica conocida (esfera, cubo, etc.), se podría medir directamente las longitudes (diámetros, lados, etc.). ¿Pero son realmente esos cuerpos una esfera o un cubo perfecto?

Cuando medimos una magnitud en forma directa, obtenemos como resultado de la medición un conjunto de posibles valores determinado por la incerteza obtenida luego de un análisis de errores posibles. Por ejemplo, si $x = x_o \pm \Delta x$ (donde: x_o es el valor medio y Δx el error absoluto), podemos decir que un dado valor de la magnitud medida se encuentra en el intervalo (x_o - Δx, x_o +Δx) con una confianza de aproximadamente el 68 %.

Cuando se determina una magnitud que fue obtenida en forma indirecta, también tendremos un resultado expresado de la siguiente forma: $x = x_o \pm \Delta x$ ¿Cómo se obtienen estos parámetros en este caso? Las incertezas de las mediciones directas deberían influir o propagarse sobre el resultado de la medición indirecta. ¿La incerteza de la medición indirecta debería depender sólo de las incertezas de las mediciones directas o también de la relación entre estas magnitudes?

Supongamos que se puede obtener en forma indirecta la magnitud W midiendo en forma directa las magnitudes $x, y, z,$ etc., independientes entre sí, mediante una función $f\,(x, y, z, ...)$, tal que $W = f(x, y, z, ...)$.

A partir de las mediciones directas, conocemos los valores: $x_o \pm \Delta x;\ y_o \pm \Delta y;\ z_o \pm \Delta z; ....$

Entonces, se puede obtener en forma indirecta la magnitud $W = W_o \pm \Delta W$ siendo:

$$W_o = f(x_o, y_o, z_o, ...) \qquad (1)$$

$$\Delta W = \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o, ...) \cdot \Delta x \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o, ...) \cdot \Delta y \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o, ...) \cdot \Delta z \right]^2 + ... \right\}^{1/2} \quad (2)$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o, ...)$ es la derivada parcial de *f* con respecto a *x*, evaluada en los valores medios: x_o, y_o, z_o, …; y se obtiene considerando a *x* como la única variable y al resto (*y*, *z*, …) como constantes. Notar que recién después de calcular la derivada parcial, se evalúa dicha expresión en x_o, y_o, z_o, …. De la misma forma, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o, ...)$ es la derivada de *f* con respecto a la variable *y*, considerando al resto (*x*, *z*, …) constantes.

La expresión (2) se conoce como *fórmula de propagación de errores*. Es válida siempre que los parámetros *x, y, z,…* sean independientes (*independencia* significa que conocer la incerteza de la magnitud *x* no nos da ninguna información acerca de la incerteza de las otras magnitudes). La expresión (2) es una fórmula aproximada para ΔW, que es válida cuando las derivadas parciales de *f* de orden superior son despreciables frente a la primer derivada parcial (en general, estaremos dentro de las hipótesis de validez de esta aproximación).

Por otro lado, si medimos una misma magnitud por diferentes métodos, obtendremos diferentes resultados de cada medición? ¿Cómo podemos determinar si dos resultados son distintos?

Actividades

Se desea obtener el volumen de un cuerpo utilizando tres métodos experimentales diferentes. Cabe recordar que el método involucra tanto la elección de los instrumentos de medición, como el diseño del experimento.

¿Qué métodos utilizarías?

¿Qué suposiciones harías en cada caso para que el método sea razonablemente válido?

Las siguientes preguntas pueden ayudar para el análisis de los datos y considerar algunos aspectos de los métodos utilizados:

- Si utilizaron valores tabulados para alguno de los experimentos, ¿qué incerteza les asignaron?

- ¿Se obtuvo el mismo resultado mediante los distintos métodos utilizados? ¿Cómo los compararon?

- ¿Qué resultado dirías que es el más preciso? ¿Y el más confiable? ¿Por qué? ¿Se puede hablar de exactitud en esta experiencia?

- ¿Cómo despreciaría el error de π?

Apéndice

Si se quiere medir el área *S* de una mesa rectangular de lados A y B. Tanto A como B fueron medidas directamente, resultando: A = $A_o \pm \Delta A$ y B = $B_o \pm \Delta B$. El resultado de la medición indirecta de esta magnitud S será: S = $S_o \pm \Delta S$.

El valor medio del área de la mesa se obtiene como:

$S_o = A_o . B_o$

Y su incerteza

$$\Delta S = \left\{ \left[\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) \cdot \Delta A \right]^2 + \left[\frac{\partial S}{\partial B}(A_o, B_o) \cdot \Delta B \right]^2 \right\}^{1/2} = \left\{ [B_o \cdot \Delta A]^2 + [A_o \cdot \Delta B]^2 \right\}^{1/2}$$

donde $\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) = B_o$ y $\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) = A_o$.